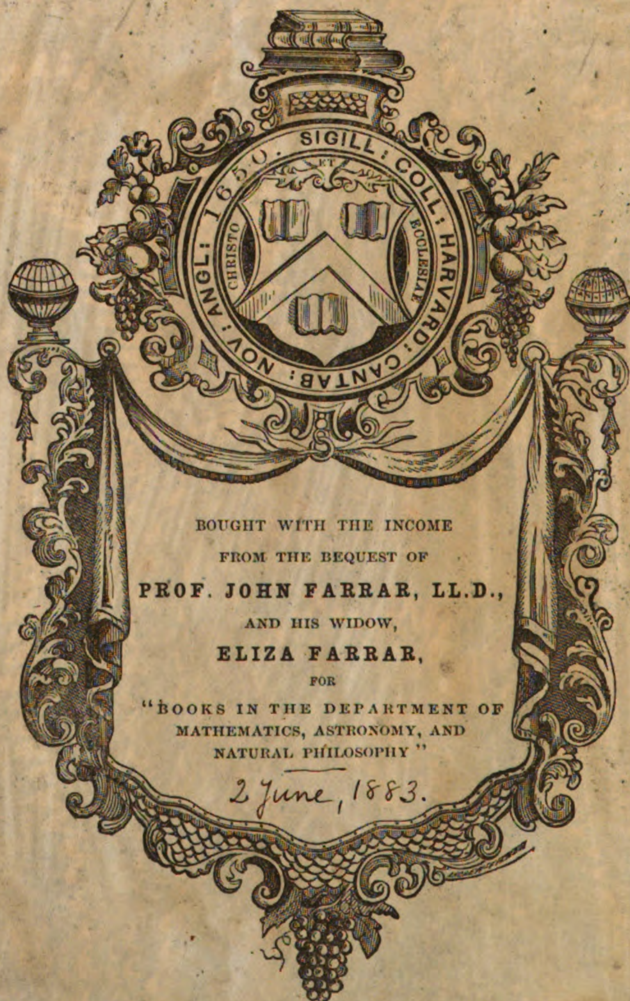

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



Grundriss

der

Differential- u. Integral-Rechnung

mit Anwendungen.

I. Theil. Differential-Rechnung

mit 69 Figuren im Texte

von

M. Stegemann, Dr. phil.,
weil. Professor an der Königl. Technischen Hochschule
zu Hannover.

Vierte verbesserte und vervollständigte Auflage

herausgegeben

von

Th. Sinram,
Lehrer der mathematischen Wissenschaften in Hamburg.

Hannover.

Helwing'sche Verlags-Buchhandlung.

(Th. Mierzinsky, Kgl. Hofbuchhändler.)

1880.

Vorrede zur ersten Auflage.

Bei der Bearbeitung der vorliegenden Schrift habe ich gesucht, neben der Forderung wissenschaftlicher Strenge vor allen Dingen der didactischen Forderung möglichster Fasslichkeit zu genügen.

In Betreff der speciellen Ausführung bemerke ich dass ich mich bemüht habe, die Einsicht in den Gang der analytischen Untersuchung durch graphische Darstellungen zu erleichtern, und ferner, dass ich bei schwierigen oder wichtigen Stellen die Entwickelung der allgemeinen Theorie durch Erörterung eines speciellen Falles eingeleitet habe.

Die grosse Anzahl von Beispielen und Anwendungen in jedem Capitel, sowie die gelegentlichen Bemerkungen und der Anhang sind zunächst für solche Leser bestimmt, welche durch Selbststudium sich in der Wissenschaft weiter ausbilden, und mehr befestigen wollen; indessen dürften sie auch dem Lehrer ein

Mittel bieten, um seine Schüler zur freien Selbstthätigkeit anzuregen.

In Betreff der äussern Ausstattung ist die Verlagshandlung sowohl wie die Druckerei allen meinen Wünschen bereitwillig entgegengekommen.

Hannover, den 1. August 1862.

M. Stegemann.

Vorrede zur vierten Ausgabe.

In dieser Ausgabe ist nur Einiges in Bezug auf die früheren Ausgaben dieses Werkes verändert. Im Allgemeinen ist der Stoff und die Anordnung deshalb beibehalten, weil gerade dieses und die klare Ausdrucksweise bei den Beweisen der Hauptgrund ist, weshalb dieses Buch so sehr gut zur Einführung in die Differential-Rechnung sich eignet. Einige Hülfssätze der algebraischen Analysis sind umgestellt und unter Aufgabe 12 pag. 19 Bemerkungen sind die Sätze 4, 5 und 6 neu hinzugekommen. In Aufgabe 14 pag. 23 ist eine allgemeine Auflösung an Stelle der früheren getreten; ausserdem sind auch in verschiedene §§. des Werkes kleine Vereinfachungen bei den Beweisen oder den Entwickelungen von Formeln vorgenommen. Der §. 68 ist ganz fortgefallen, weil die in demselben besprochene Aufgabe sich sehr leicht vermittelst der vorigen §§. lösen lässt; dieselbe befindet sich unter den Uebungs-Aufgaben des §. 67.

Hamburg, im April 1880.

Th. Sinram.

Inhalt.

II. Abtheilung.

Functionen von mehreren unabhängig veränderlichen Grössen.

Einleitung.

1) Wenn man **eine Gleichung zwischen zwei Grössen** (x und y) aufstellt, so sind diese Grössen dadurch in eine gegenseitige Abhängigkeit gebracht, und zwar so, dass die eine Grösse (y) nur einen oder mehrere **ganz bestimmte Werthe** haben kann, wenn man der anderen Grösse (x) einen beliebigen Werth giebt.

Ist z. B. 1) $y = x^2 + 3x - 2$,

so	ist	$y = +8$	wenn	$x = -5$
„	„	$y = +2$	„	$x = -4$
„	„	$y = -2$	„	$x = -3$
„	„	$y = -4$	„	$x = -2$
„	„	$y = -4$	„	$x = -1$
„	„	$y = -2$	„	$x = 0$
„	„	$y = +2$	„	$x = 1$
„	„	$y = +8$	„	$x = 2$ etc. etc.

Hätte man in Gleichung 1) beliebige Werthe für y angenommen, so wären dadurch die entsprechenden Werthe von x ebenfalls bestimmt gewesen. Weil aber Gleichung 1) in Bezug auf x vom zweiten Grade ist, so entsprechen jedem beliebigen Werthe von y zwei Werthe von x, z. B. wenn $y = 2$, so ist $x = +1$ oder $x = -4$.

2) Die Grösse (x), deren Werth man beliebig bestimmt, nennt man die **unabhängige** Grösse; die andere Grösse (y) dagegen nennt man die **abhängige** Grösse oder die Function der ersteren.

Wenn also in der Gleichung

$$y = x^2 + 3x - 2$$

x diejenige Grösse ist, deren Werth man **beliebig** bestimmen kann, so ist x die **unabhängige** Grösse, und y ist die abhän-

gige Grösse (der Werth von y hängt in unserer Gleichung ab von dem beliebig angenommenen Werthe von x) oder y ist eine Function von x.

Eine Function von x ist demnach irgend eine Grösse (y), welche von x abhängig ist.

Bemerkung.

Jeder reducirte mathematische Ausdruck, in welchem x vorkommt, ist natürlich **abhängig** von x.

Man kann demnach kurzweg sagen: ein **mathematischer Ausdruck, in welchem x vorkommt,** ist eine **Function** von x.

Demnach sind z. B. folgende Ausdrücke Functionen von x:

1) x^2+3x-2

2) $\sin x$

3) $a^x+b.\sin x+x^m$.

Setzt man nun

$$y=x^2+3x-2$$
$$y=\sin x$$
$$y=a^x+b.\sin x+x^m,$$

so wird y eine Function von x.

3) In der vorigen Nummer haben wir x als diejenige Grösse angenommen, deren Werth man beliebig annehmen durfte. Eben so gut hätten wir y als die **unabhängige** Grösse ansehen können, dann wäre x die **abhängige** gewesen, oder x wäre eine Function von y gewesen.

Wir sehen hieraus: **Wenn y eine Function von x ist, so ist auch x eine Function von y, oder die Abhängigkeit zwischen zwei Grössen (x und y) ist stets gegenseitig.**

Hätte man drei oder mehrere Unbekannte in einer Gleichung, oder in mehreren Gleichungen, deren Zahl aber **geringer** sein muss als die Zahl der Unbekannten, so würde etwas ganz Aehnliches gelten. Wir wollen uns vor der Hand auf den Fall beschränken, wo **eine** Gleichung mit **zwei** Unbekannten vorliegt, d. h. wo wir es mit einer Function von **einer einzigen unabhängigen Grösse** zu thun haben. In diesem Falle bezeichnet man die unabhängige Grösse gewöhnlich mit x, die abhängige dagegen mit y.

4) Man theilt die Functionen ein in **algebraische** Functionen und **transcendente** Functionen. y ist eine algebraische Function von x, wenn y mit x durch die gewöhnlichen Operationen der Algebra verbunden ist.

Ist dieses nicht der Fall, so ist y eine **transcendente** Function von x.

Demnach ist in den folgenden Gleichungen 1) bis 3), y eine **algebraische** Function von x, während in den Gleichungen 4) bis 6), y eine **transcendente** Function von x ist.

1) $y = a x^3 + 3 \sqrt{x} - x^2 \sqrt[5]{x}$
2) $y = a x^2 - 7 x + x^n$
3) $y x + 4 a x - 7 y^2 x^3 = 0$
} algebraische Functionen,

4) $y = \sin x + \lg x$
5) $y + e^x = \cos x + \operatorname{arc\,tg} y$
6) $y^x - \cos x + x^n + A = 0$
} transcendente Functionen.

Man theilt die Functionen ferner noch ein in entwickelte explicite) und unentwickelte (implicite) Functionen.

y ist eine **entwickelte** Function von x, wenn die Beziehung zwischen x und y in einer für y entwickelten Gleichung gegeben ist. Ist dagegen eine Gleichung, in welcher x und y enthalten ist, nicht für y aufgelöst, so ist y eine **unentwickelte** Function von x.

In den vorstehenden Gleichungen 1), 2) und 4) ist y eine **entwickelte** Function von x.

In den Gleichungen 3), 5) und 6) ist y eine **unentwickelte** Function von x.

Berücksichtigen wir **beide Eintheilungsgründe,** nach denen oben die Functionen eingetheilt sind, so zerfallen die Functionen in 4 Categorien.

1) **algebraische entwickelte Functionen,**

z. B. $y = a x^3 + 3 \sqrt{x} - x^2 \sqrt[5]{x}$.

2) **algebraische unentwickelte Functionen,**

z. B. $y x + 4 a x + 7 y^2 x^3 = 0$.

3) **transcendente entwickelte Functionen,**

z. B. $y = \sin x + \lg x$.

4) transcendente unentwickelte Functionen,

z. B. $y - \sin x = \lg x$.

oder $y^x - \cos x + x^n + A = 0$.

5) Man erkennt leicht, dass es in vielen Fällen möglich ist, y sowohl als entwickelte Function wie auch als unentwickelte Function darzustellen, und besonders, dass man jede entwickelte Function auch in Form einer unentwickelten Function darstellen kann; so z. B. kann man leicht aus der Gleichung

$$y = \sin x + \lg x$$

die Gleichung

$$y - \sin x = \lg x$$

herstellen. Es ist indessen **nicht immer** möglich, y in Form einer entwickelten Function darzustellen, wenn y als unentwickelte Function vorliegt; so z. B. ist es nicht möglich, die Gleichung

$$x^y + \cos x + x . \sin y = e^x$$

für y zu entwickeln.

6) Will man andeuten, dass y **irgend eine** entwickelte Function von x ist, so schreibt man gewöhnlich:

$y = f(x)$ (spr. f-Function von x)

oder $y = \varphi(x)$ (spr. φ-Function von x)

oder $y = F(x)$ (spr. F-Function von x)

Hier bedeuten $f(x)$, $\varphi(x)$, $F(x)$ mathematische Ausdrücke, welche ausser den constanten und bekannten Grössen noch die Grösse x enthalten. Die **verschiedenen** Functionszeichen $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ bedeuten im **Allgemeinen** mathematische Ausdrücke verschiedener Art; indessen kann es auch vorkommen, dass in **speciellen** Fällen zwei **verschiedene** Functionszeichen **gleiche** Bedeutung haben,

z. B. dass $fx = Fx$ ist.

Bemerkung. Ist z. B. $fx = \sin x$ und $Fx = \cos(90^0 - x)$, so ist für jeden Werth von x, $fx = Fx$.

Ist dagegen $fx = \operatorname{tg} x$ und $Fx = \operatorname{ctg} x$, so ist $fx = Fx$, wenn $x = 45^0$.

7) Um auszudrücken, dass y eine **unentwickelte** Function von x ist, pflegt man zu schreiben:

$$f(x, y) = 0$$
$$F(x, y) = 0$$
$$\varphi(x, y) = 0.$$

Man denkt sich dann die unentwickelte Function auf 0 reducirt, was **immer möglich** ist.

Hat man z. B.

$$y + e^x = \cos x + \operatorname{arc}\operatorname{tg} y,$$

so kann man statt dessen schreiben

$$y + e^x - \cos x - \operatorname{arc}\operatorname{tg} y = 0.$$

Setzt man nun

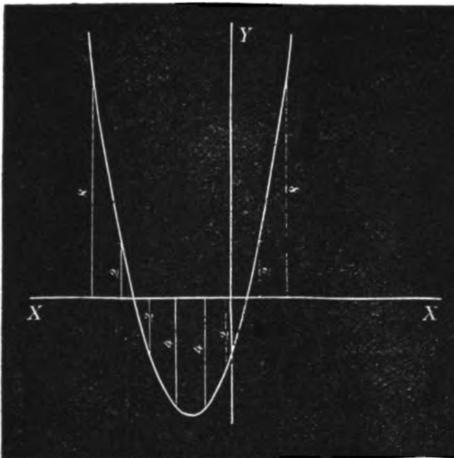
$$y + e^x - \cos x - \operatorname{arc}\operatorname{tg} y = f(x, y),$$

so folgt

$$f(x, y) = 0.$$

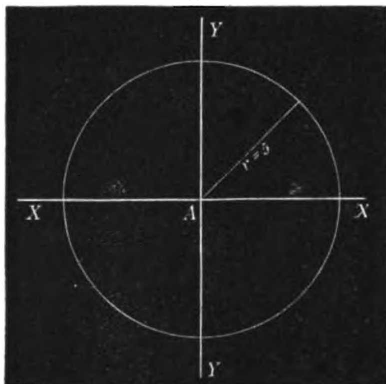
8) Die analytische Geometrie bietet bekanntlich ein Mittel, um die gegenseitige Abhängigkeit zweier Grössen x und y (welche irgend einer Gleichung ($y = fx$) genügen) zur Anschauung zu bringen. Betrachtet man nämlich x und y als rechtwinklige Coordinaten und denkt man die Curve construirt, welche der Gleichung $y = fx$ entspricht, so wird für jeden Punkt dieser Curve die Masszahl der Ordinate so gross sein, wie derjenige Werth von y, den man aus der Gleichung $y = f(x)$ erhält, wenn man in dieser

Fig. 1.



Gleichung x gleich der Masszahl der Abscisse des genannten Punktes macht. Ist z. B. die Gleichung

Fig. 2.



$$y = x^2 + 3x - 2$$

die Gleichung der Curve in Fig. 1, so ist die Curve auch wieder die graphische Darstellung der Abhängigkeit, welche nach der obenstehenden Gleichung zwischen x und y vorhanden ist.

In ähnlicher Weise stellt Fig. 2 die Abhängigkeit dar, in welche x und y durch die folgenden Gleichungen

$$y^2 + x^2 - 25 = 0$$
$$y = \pm \sqrt{25 - x^2}$$

gebracht sind.

Bemerkung.

Statt des rechtwinkligen Coordinaten-Systems kann man auch ein beliebiges anderes Coordinaten-System wählen, um die **gegenseitige Abhängigkeit** zweier Grössen darzustellen; indessen ist das rechtwinklige Coordinaten-System gewöhnlich das bequemste.

9) Nehmen wir wieder an, es sei die Gleichung $y = f(x)$ gegeben, und auch, dass x aus dem speciellen Werthe x' in den speciellen Werth x'' übergeht, und zwar so, **dass x bei diesem Uebergange alle Werthe durchläuft, welche zwischen x' und x'' liegen** (dass x also bei seinem Uebergange aus dem Werthe x' in den Werth x'' keinen Sprung macht) so kann zweierlei stattfinden, entweder

I. **fx wird aus dem speciellen Werth fx' ohne Sprung in den speciellen Werth fx'' übergehen,** oder

II. **fx wird bei seinem Uebergange aus dem speciellen Werth fx' in den speciellen Werth fx'' ein oder mehrere Male einen Sprung machen.**

Im ersten Falle ist fx zwischen den Grenxen x′ und x″ **continuirlich,** und im zweiten Falle ist die Function fx zwischen den Grenzen x′ und x″ **discontinuirlich.**

10) In Bezug auf Continuität kann man die Functionen in 3 Classen eintheilen, und zwar in

I. Functionen, welche für jeden (endlichen) **Werth von x continnuirlich bleiben,**

z. B. $y = x^2 + 3x - 2$.

II. Functionen, welche für bestimmte Werthe von x discontinuirlich werden,

z. B. $y = \frac{a}{c - x}$ (für $x = c$)

$y = \sqrt{25 - x^2}$ (für $x = \pm 5$)

III. Functionen, welche für jeden Werth von x discontinuirlich sind,

z. B. $y = (\sqrt{-1})^x$.

Bemerkungen.

1) Wenn x durch den Werth ± 5 hindurch geht, so springt der Werth von $y = \sqrt{25 - x^2}$ aus dem Reellen ins Imaginaire, oder aus dem Imaginairen ins Reelle über. Die Discontinuität liegt also in diesem Falle darin, dass der Functionswerth aus einer Zahlenreihe in eine andere überspringt.

2) Die Continuität und Discontinuität ist ausführlicher in Schlömilchs algebraischer Analysis behandelt, worauf wir hiermit verweisen.

Hülfssätze aus der algebraischen Analysis.

---

1. **Lehrsatz.** Wenn in der Gleichung

1) $a + bi = \alpha + \beta i$

die Zahlen α, β, a und b reelle Zahlen sind und $i = \sqrt{-1}$

so ist 2) $\begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \end{cases}$

Beweis. Wäre $a > \alpha$, so müsste ein Theil von a gleich einem Theile von βi sein. Dies ist aber nicht möglich, weil eine reelle Grösse nicht gleich einer imaginären Grösse sein kann. Wäre dagegen $a < \alpha$, also $\alpha > a$, so müsste ein Theil von α gleich einem Theile von bi sein. Dies ist wieder unmöglich aus demselben Grunde. Also kann a nicht grösser als α, noch kann α grösser als a sein; mithin ist

3) $a = \alpha$, w. z. b. w.

Setzt man nun in Gleichung 1

$a = \alpha$, so ergiebt sich ohne Weiteres

$bi = \beta i$, also

4) $b = \beta$, w. z. b. w.

2. **Lehrsatz.** Wenn $n = m + 1$, so ist

$$\text{I. } \frac{m(m-1).(m-2)\ldots\{m-(k-1)\}}{1.2.3\ldots.k} + \frac{m.(m-1)\ldots.(m-k)}{1.2.3..k.(k+1)}$$

$$= \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-k)}{1.2.3\ldots k(k+1)}$$

Beweis. Zunächst ist

$$\frac{m.(m-1).(m-2)\ldots\{m-(k-1)\}}{1.2.3\ldots k}+\frac{m.(m-1)\ldots(m-k)}{1.2.3\ldots k.(k+1)}$$

$$=\frac{m.(m-1).(m-2)\ldots\{m-(k-1)\}}{1.2.3\ldots k}.\frac{k+1}{k+1}+\frac{m.(m-1)\ldots(m-k)}{1.2.3\ldots k(k+1)}$$

$$=\frac{m.(m-1)\ldots.\{m-(k-1)\}.(k+1)+m.(m-1)\ldots(m-k)}{1.2.3\ldots\quad k\quad(k+1)}$$

Hieraus folgt

$$\frac{m.(m-1)\,(m-2)\ldots\{m-(k-1)\}}{1.2.3\ldots k}+\frac{m.(m-1)\ldots(m-k).}{1.2.3.k(k+1)}$$

$$=\frac{m.(m-1)\ldots\{m-(k-1)\}\;\{k+1+m-k\}}{1.2.3\ldots.\;k\;\;(k+1)}$$

oder

$$\frac{m.(m-1).(m-2)\ldots.\{m-(k-1)\}}{1.2.3\ldots\;k}+\frac{m.(m-1)\ldots(m-k)}{1.2.3\ldots k.(k+1)}$$

$$=\frac{m.(m-1)\ldots\{m-(k-1)\}\;\{m+1\}}{1.2.3..\;\;k.\;\;(k+1)}$$

Da nun $m + 1 = n$ also auch

$m - (k - 1) = n - k$ so folgt

$$\frac{m.(m-1)\ldots.\{m-(k-1)\}}{1.2.3\ldots k}+\frac{m.(m-1)\ldots(m-k)}{1.2.3\ldots k(k+1)}=\frac{n.(n-1)\ldots(n-k)}{1.2.3\ldots k.(k+1)}$$

w. z. b. w.

Beispiele.

1) $$\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}+\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}=\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}.\frac{5}{5}+\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}$$

$$=\frac{10.9.8.7.5}{1.2.3.4.5}+\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}=\frac{10.9.8.7.(5+6)}{1.2.3.4.5}$$

$$\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}+\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}=\frac{11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5}$$

2) $$\frac{5.4.3}{1.2.3}+\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}=\frac{5.4.3}{1.2.3}.\frac{4}{4}+\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}$$

$$\frac{5.4.3}{1.2.3}+\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}=\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}$$

3) **Aufgabe.** Es ist eine geometrische Reihe gegeben

$$A, Ap, Ap^2; Ap^3 \ldots \ldots Ap^n$$

Man soll die Summe aller Glieder derselben bestimmen.

Auflösung. Setzen wir die Summe aller Glieder = S, so ist

1) $S = A + Ap + Ap^2 + \ldots Ap^n$

Multiplicirt man diese Gleichung mit p, so folgt:

2) $pS = Ap + Ap^2 + \ldots Ap^n + Ap^{n+1}$

Subtrahiren wir nun Gleichung 2) von Gleichung 1), so folgt:

3) $S - p\,S = A - Ap^{n+1}$

4) $S(1 - p) = A(1 - p^{n+1})$

5) $S = A \dfrac{1 - p^{n+1}}{1 - p}$ Wenn die Anzahl der Glieder der geometrischen Reihe eine unendliche ist, wenn also in Gleichung 5) $n = \infty$ ist, so erhalten wir

6) $S = A \dfrac{1 - p^{\infty}}{1 - p}$

oder

$$S = \frac{A}{1 - p}$$

4. **Erklärung.** Eine unendliche Reihe ist convergent, wenn die Summe ihrer unendlich vielen Glieder einen bestimmten (endlichen) Werth hat, und es ausserdem möglich ist, durch Addition einer **genügenden Anzahl** der ersten Glieder diesem Werthe näher zu kommen, als der Werth jeder beliebig kleinen Zahl ist.

Hieraus folgt, dass eine unendliche Reihe convergent ist, wenn

1) die Summe einer beliebigen Anzahl der ersten Glieder einen bestimmten (endlichen) Werth hat,

2) bei **hinreichend grosser** Anzahl dieser ersten Glieder

die Summe aller **folgenden Glieder** kleiner wie jede beliebige Zahl werden kann.

Bemerkung. Um einzusehen, dass beide Bedingungen zur Convergenz einer Reihe nothwendig sind, betrachte man die unendliche Reihe

$$1)\ S = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m-1)^2} + \frac{1}{(m-2)^2} + \frac{1}{(m-3)^2} + \cdots$$

Setzt man in derselben m gleich irgend einer positiven ganzen Zahl, z. B. $m = 2$, so verwandelt sich Gleichung 1) in

$$2)\ S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{p^2} + \cdots$$

Nun ist $\frac{1}{(p+1)^2} < \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$

$$\frac{1}{(p+2)^2} < \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

$$\frac{1}{(p+3)^2} < \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{(p+q)^2} < \frac{1}{p+q-1} - \frac{1}{p+q}$$

Hieraus folgt:

$$3)\ \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+2)^2} + \cdots \frac{1}{(p+q)^2} < \frac{1}{p} - \frac{1}{p+q}$$

Setzen wir nun $q = \infty$, so erhalten wir auf der linken Seite von Gleichung 3) die Summe der **unendlich** vielen Glieder, welche in Gleichung 2) auf das Glied $\frac{1}{p^2}$ folgen, und es ist die Summe dieser Glieder kleiner als $\frac{1}{p}$. Da nun durch Annahme eines **hinreichend grossen** Werthes von p der Bruch $\frac{1}{p}$ kleiner wie jede beliebige Zahl gemacht werden kann, so folgt daraus, dass unsere Reihe in Gleichung 2) der zweiten Bedingung genügt, welche wir für die Convergenz einer unendlichen Reihe aufgestellt haben. Trotzdem aber ist die Reihe nicht convergent, weil allein schon das Glied $\frac{1}{0}$ unendlich gross ist; mithin die Summe **aller** Glieder sicher unendlich gross sein muss, weil sie positiv sind, und deshalb durch Addition zu dem Gliede $\frac{1}{0}$ die Summe S noch vergrössern müssen.

5. **Lehrsatz.** Eine **fallende** geometrische Reihe ist convergent.

Beweis. Ist die Reihe

$$A, Ap, Ap^2 \dots Ap^n, Ap^{n+1}, Ap^{n+2} \dots$$

eine fallende **geometrische** Reihe, so ist nach unserm Hülfssatze 3) die Summe der n + 1 ersten Glieder dieser Reihe

$$1) \; S = A. \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p};$$

dagegen ist die Summe der unendlich vielen Glieder, die auf das n + 1ste Glied folgen

$$2) \; D = Ap^{n+1}. \frac{1 - p^{\infty}}{1 - p}$$

oder weil $p^{\infty} = 0$ ist,

$$3) \; D = \frac{Ap^{n+1}}{1 - p}$$

Aus Gleichung 1) folgt nun, dass für jeden beliebigen Werth von n die Summe der n + 1 ersten Glieder unserer Reihe einen **bestimmten** (endlichen) Werth hat. Weil aber $p < 1$ ist, so folgt aus Gleichung 3), dass die Summe aller Glieder, welche auf das (n + 1) erste Glied folgen, bei **hinreichend grossem** Werthe von n kleiner, wie jede beliebige Zahl gemacht werden kann, denn p ist ein echter Bruch und daher ist $p^n = 0$, wenn $n = \infty$, folglich der Werth des letzten Gliedes der unendlichen Reihe

$$\frac{Ap^{\infty}}{1 - p} = 0$$

Es sind demnach in den Gleichungen 1) und 3) beide Bedingungen erfüllt, welche nach Hülfssatz 5) zur Convergenz einer unendlichen Reihe nothwendig sind; also ist eine **fallende** geometrische Reihe convergent.

Zusatz. Wenn man in einer **fallenden** geometrischen Reihe irgend ein Glied durch das vorhergehende dividirt, so ist der entsprechende Quotient ein echter Bruch (p), der für die ganze Reihe **denselben** Werth hat. Wir dürfen deshalb aus

dem vorstehenden Lehrsatze schliessen, dass eine unendliche Reihe dann convergent ist, wenn der Quotient, der aus der Division irgend eines Gliedes durch das vorhergehende entsteht, ein echter Bruch ist, welcher überall in der Reihe **denselben** Werth hat, oder gar beim Fortschreiten in der Reihe **immer kleiner** wird.

6. Lehrsatz. Wenn in der unendlichen Reihe

1) $A, aB, a^2 C \ldots a^m M, a^{m+1} N, a^{m+2} Q \ldots$

keiner der Coefficienten A B C etc. unendlich gross wird, so ist die Reihe convergent, **wenn $a < 1$ ist.**

Beweis. Wenn der absolute Werth irgend eines der Coefficienten der Reihe 1), z. B. der Coefficient M von keinem anderen Coefficienten übertroffen wird, so bilde man die Reihe

2) $M, a M, a^2 M \ldots a^m M, a^{m+1} M \ldots$

Ist nun $a < 1$, so ist diese Reihe eine **fallende** geometrische Reihe, und ist convergent. Da nun die Glieder der Reihe 1) dem absoluten Werthe nach **kleiner** sind als die entsprechenden Glieder der Reihe 2) oder **höchstens** diesen Gliedern **gleich** sein können, so muss die Reihe 1) convergent sein, wenn alle ihre Glieder gleiche Zeichen haben. Sie ist aber um so mehr convergent, wenn die Glieder verschiedene Zeichen haben, und sich deshalb zum Theil aufheben.

Unsere Reihe 1) ist also unter allen Umständen convergent, wenn

1) $a < 1$ und
2) keiner der Coefficienten unendlich gross ist.

7. Lehrsatz. Wenn in der Reihe

1) $A, a B. a^2 C \ldots a^m M, a^{m+1} N \ldots$

keiner der Coefficienten unendlich gross ist, so kann man a **stets so klein machen,** dass irgend ein Glied z. B. $a^m M$ dessen Coefficient (M) nicht Null ist, dem **absoluten Werthe nach** grösser ist, als die Summe aller unendlich vielen Glieder, welche auf das genannte Glied folgen.

Beweis. Wenn a **hinreichend** klein ist, so ist nach Hülfssatz 6) die Reihe 1) convergent. Es muss also die Summe aller Glieder, welche auf das Glied $a^m M$ folgen, einen bestimmten Werth haben. Setzen wir denselben gleich S, so folgt:

$$2)\ S = a^{m+1} N + a^{m+2} P + \ldots$$

$$3)\ S = a^{m+1} \{N + a . P + a^2 Q + \ldots\}$$

Die unendliche Reihe in der Klammer ist wieder convergent. Setzen wir ihren absoluten Werth = W, so folgt in Bezug auf die absoluten Werthe

$$4)\ S = a^{m+1} W.$$

Es ist jetzt also zu beweisen, dass für einen **hinreichend kleinen** Werth von a

$$5)\ a^m M > a^{m+1} W \text{ oder}$$

$$M > a W.$$

Macht man nun $a < \frac{M}{W}$ so ist

offenbar $M > a W$. also auch

$$M\ a^m > a^{m+1} W.$$

Wir haben jetzt nur auf die absoluten Werthe von M, W und S Rücksicht genommen. Es folgt also, dass dem absoluten Werthe nach

$$6)\ M\ a^m > S. \text{ w. z. b. w.}$$

8. Lehrsatz. Wenn die Summe zweier geschlossener Reihen, welche nach steigenden Potenzen von x fortschreiten,

$$S = A + B x + C x^2 + D x^3 + E x^4 + \ldots$$

$$S = a + b x + c x^2 + d x^3 + e x^4 + \ldots$$

für **jeden** Werth von x einander gleich sind, so sind die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x einander gleich.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist für jeden Werth von x

$$1) A + B x + C x^2 + D x^3 + E x^4 + \ldots = a + b x + c x^2 + d x^3 + \ldots$$

Setzen wir hierin

$x = 0$ so folgt

$$2)\ A = a$$

Subtrahiren wir nun die Gleichung 2) von Gleichung 1), so folgt:

3) $Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots = bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$

Dividiren wir Gleichung 3) durch x, so ergiebt sich:

4) $B + Cx + Dx^2 + Ex^3 + \ldots = b + cx + dx^2 + ex^3 + \ldots$

Setzen wir wieder:

$x = 0$ so folgt

5) $B = b$.

Subtrahiren wir nun Gleichung 5) von Gleichung 4), so folgt:

6) $Cx + Dx^2 + Ex^3 + \ldots = cx + dx^2 + ex^3 + \ldots$

durch x dividirt giebt:

7) $C + Dx + Ex^2 + \ldots = c + dx + ex^2 + \ldots$

Setzt man hierin wieder:

$x = 0$ so folgt

$C = c$.

In ähnlicher Weise fortschliessend, kann man beweisen,

$D = d$

$E = e$ etc.

Zusatz. Wenn für jeden Werth von x

8) $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \ldots = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$

so ist $A = \alpha$

$B = 0$

$C = \beta$

$D = 0$

$E = \gamma$ etc.

Um dies einzusehen, setze man statt Gleichung 8),

9) $\alpha + 0x + \beta x^2 + 0x^3 + \gamma x^4 + \ldots = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$

9. Lehrsatz. Wenn die unendlichen Reihen:

1) $A, Bx, Cx^2, Dx^3, Ex^4 \ldots$

2) $a, bx, cx^2, dx^3, ex^4 \ldots$

innerhalb bestimmter Grenzen von x convergent und wenn

ihre Werthe innerhalb derselben Grenzen für jeden Werth von x einander gleich sind, also

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

so sind die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x einander gleich.

Der Beweis ist dem vorigen Beweise analog.

10. Lehrsatz. Wenn m eine positive ganze Zahl ist, so ist

$$\text{I. } (x+a)^m = x^m + mx^{m-1}a + \frac{m.(m-1)}{1.2}x^{m-2}a^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}a^3 + \ldots . a^m$$

Beweis. Durch wiederholte Multiplication findet man

1) $(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$
2) $(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$
3) $(x+a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$

Die Gleichung 3) kann man auch schreiben

$$4)\ (x+a)^4 = x^4 + 4x^{4-1}a + \frac{4.3.}{1.2.}x^{4-2}a^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3.}x^{4-3}a^3 + a^4$$

Wir sehen hieraus, dass Gleichung I) richtig ist, wenn man m = 4 setzt. In ähnlicher Weise kann man sich auf empirischem Wege überzeugen, dass die Gleichung I) richtig ist, wenn man m resp. gleich 1, 2 und 3 setzt.

Wir dürfen also vorläufig behaupten, dass wenigstens für einige Werthe von m die Gleichung I) richtig ist.

Multipliciren wir die Gleichung I) mit x + a, so folgt

$$5)\ (x+a)^{m+1} = \begin{cases} x^{m+1} + m.x^m a + \frac{m.(m-1)}{1.2}x^{m-1}a^2 + \\ \qquad\qquad x^m a + \qquad\qquad mx^{m-1}a^2 + \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} + \frac{m.(m-1.)\,(m-2)}{1.2.3}x^{m-2}a^3 + \ldots . x.a^m \\ + \qquad \frac{m.(m-1)}{1.2} \qquad x^{m-2}a^3 + \ldots mx.a^m + a^{m+1} \end{cases}$$

$$6)\ (x+a)^{m+1} = x^{m+1} + \left\{\begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}\right\} x^m a + \left\{\begin{matrix} \frac{m.(m-1)}{1.2} \\ m \end{matrix}\right\} x^{m-1} a^2 +$$

$$+ \left\{\begin{matrix} \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3} \\ \frac{m.(m-1)}{1.2} \end{matrix}\right\} x^{m-2} a^3 + \ldots \left\{\begin{matrix} 1 \\ m \end{matrix}\right\} x a^m + a^{m+1}$$

Setzt man hierin $m+1=n$, so folgt nach dem Hülfssatze 2):

$$7)\ (x+a)^n = x^n + n x^{n-1} a + \frac{n.(n-1)}{1.2} x^{n-2} a^2 + \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} a^3 + \ldots n x a^{n-1} + a^n$$

Diese Gleichung stimmt nun der Form nach genau mit Gleichung I). Wenn also die Gleichung I) richtig ist für irgend einen Werth von m, so ist sie auch dann noch richtig, wenn m um 1 grösser wird. Nun folgt aus den Gleichungen 1 bis 3, dass Gleichung I) richtig ist, wenn m resp. die Werthe 2), 3) oder 4 annimmt. Wir dürfen also weiter schliessen. Wenn Gleichung I) richtig ist für $m = 4$, so ist sie auch richtig für $m = 5$. Wenn Gleichung I) richtig ist für $m = 5$, so ist sie auch richtig für $m = 6$.

In dieser Weise können wir weiter schliessen, bis wir m auf den Werth irgend einer beliebigen **positiven ganzen Zahl** gebracht haben; und dürfen deshalb behaupten:

Wenn m eine **positive ganze Zahl** ist, so ist

$$\text{I.}\ (x+a)^m = x^m + m x^{m-1} a + \frac{m.(m-1)}{1.2} x^{m-2} a^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3} x^{m-3} a^3 + \ldots m x a^{m-1} + a^m$$

Bemerkungen. 1) Wir werden später sehen, dass unsere Gleichung nicht allein gilt, wenn m eine positive ganze Zahl ist, sondern dass sie für jeden **beliebigen Werth** von m richtig bleibt. Unser Lehrsatz erscheint dann als **specieller** Fall des Taylor'schen Lehrsatzes.

2) Wir bemerken bei dieser Gelegenheit, dass man zuweilen ein allgemeines Gesetz erst für einen **speciellen Fall** nachweisen muss, um dasselbe in seinem **ganzen Umfange** nachweisen zu können.

Zusatz. Setzt man in Gleichung I)

$x = 1$, so folgt

$$8)\ (1+a)^m = 1+m.a+\frac{m.(m-1)}{1.2}a^2+\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}a^3+\ldots a^m$$

$$9)\ (1+\frac{1}{n})^n = 1+n.\frac{1}{n}+\frac{n.(n-1)}{1.2}\frac{1}{n^2}+\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{n^3}+\ldots\frac{1}{n^n}$$

$$=1+\frac{n}{n}+\frac{\frac{n}{n}.\frac{n-1}{n}}{1.2}+\frac{\frac{n}{n}.\frac{n-1}{n}.\frac{n-2}{n}}{1.2.3}+\ldots\frac{1}{n^n}.$$

$$10)\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1.\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1.2}+\frac{1.\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3}+\ldots\frac{1}{n^n}$$

11. Aufgabe. Wie gross ist $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ wenn

$n = \infty$ ist?

Auflösung. Wir nehmen zunächst an, dass n eine beliebige positive ganze Zahl sei, dann finden wir aus dem Hülfssatze 10),

$$1)\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1.\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1.2}+\frac{1.\left(1-\frac{1}{n}\right).\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3}+\ldots\frac{1}{n^n}$$

Die Gleichung gilt für jeden Werth von n. Sie gilt also auch dann noch, wenn $n = \infty$ ist. In diesem Falle aber wird $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$ etc. gleich Null. Wir erhalten also wenn

$n = \infty$ ist

$$2)\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots$$

Bemerkungen. 1) Wenn man denjenigen Werth von $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ bezeichnen will, den man erhält, wenn $n = \infty$, so schreibt man gewöhnlich:

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ d. h. Grenze von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Hier ist natürlich diejenige Grenze gemeint, der sich der Werth von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nähert, wenn n unendlich gross wird.

2) Das Product 1.2.3.4 ... m, schreibt man gewöhnlich m! (spr. m-factorielle) also z. B. 1.2.3.4.5.6 = 6! (spr. 6-factorielle).

3) Es ist also nach Gleichung 2)

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

4) Wenn wir in der unendlichen Reihe für $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ irgend ein Glied durch das vorhergehende dividiren, so ist der entsprechende Quotient ein echter Bruch, welcher um so kleiner wird, je weiter wir in der Reihe fortschreiten. Also ist nach dem Zusatze 6) die Reihe für

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

eine convergente Reihe. —

12. Aufgabe. Man soll den Werth von $(1+\alpha)^{1/\alpha}$ bestimmen, wenn $\alpha = 0$ gesetzt wird.

Auflösung. Wir wollen den Werth von $(1+\alpha)^{1/\alpha}$ durch lim. $(1+\alpha)^{1/\alpha}$ bezeichnen, wenn α zu Null wird.

Setzen wir nun $\alpha = \frac{1}{n}$, so wird

1) $\lim (1+\alpha)^{1/\alpha} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, also

2) $\lim (1+\alpha)^{1/\alpha} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

Bemerkungen.

1) Man wird bemerken, dass in $\lim (1+\alpha)^{1/\alpha}$ das Symbol „lim." diejenige Grenze bezeichnet, welcher sich der Ausdruck $(1+\alpha)^{1/\alpha}$ nähert, wenn α **zu Null** wird, während in lim. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ das Zeichen „lim." diejenige Grenze bezeichnet, welcher sich der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nähert, wenn n **unendlich gross** wird.

2) Die Ausdrücke lim. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und $\lim (1+\alpha)^{1/\alpha}$ werden gewöhnlich durch e bezeichnet, so dass

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

3) Die Zahl e spielt eine sehr wichtige Rolle in der höheren Mathematik; sie ist die Basis der sogenannten natürlichen Logarithmen.

4) Es ist lim. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$

1. Beweis. Man setzt in Aufgabe 11) Gleichung 1)

1) für $n=-n$

so erhält man als Gleichung

2) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots\ldots=e$

2. Beweis. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}$

$$=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

Setzt man $n-1=\alpha$, so ist

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$$

Nun ist lim. $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)=1$, wenn $\alpha=\infty$

und lim. $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$, folglich ist

lim. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$, wenn $n=\infty$ ist.

5) Es ist $e>2$ und <3.

In der Gleichung für

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots.$$

ist z. B. $\frac{1}{1.2.3}<\frac{1}{1.2.2}$ etc., folglich ist

$$\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots.<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots.$$

$$<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots\infty\right)$$

$$<1$$

oder

$$e=1+1+(<1).$$

Hieraus folgt e > 2 und < 3.

6) e ist eine irrationale Zahl.

Beweis.

$$\text{I. } e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots \frac{1}{p!} + \frac{1}{(p+1)!} + \frac{1}{(p+2)!} + \ldots$$

oder

$$\text{II. } e - 2 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots \frac{1}{p!} = \frac{1}{(p+1)!} + \frac{1}{(p+2)!} + \ldots$$

Angenommen, e wäre nun nicht irrational, sondern ein Bruch, nämlich $e = \frac{p}{q}$, wenn p und q ganze Zahlen sind, so setze man in Gleichung I) so viele Theile von der rechten Seite nach der linken, bis im Nenner die Facultät p erreicht ist. Multiplicirt man nun die Gleichung II), so dass die linke Seite derselben zur ganzen Zahl wird, also mit $1.2.3\ldots p$, so erhalten wir auf der linken Seite

$$(p-1)!\, q - 2.p! - \frac{p!}{2} - \frac{p!}{3} - \ldots - 1, \text{ also ganze Zahlen}$$

und rechts

$$= \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \ldots$$

$$= \frac{1}{p+1}\left[1 + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{(p+2)(p+3)} + \ldots\right]$$

Weil nun $p+2 > p+1$, ebenso $(p+2)(p+3) > (p+1)^2$, so ist also

$$\frac{1}{p+1}\left[1 + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{(p+2)(p+3)} + \ldots\right] < \frac{1}{p+1}\left[1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + \ldots\right]$$

$$< \frac{1}{p+1}\left(\frac{p+1}{p}\right)$$

$$< \frac{1}{p}$$

Es ist also $(p-1)!\, q - 2p! - \frac{p!}{2} - \frac{p!}{3} - \ldots - 1 < \frac{1}{p}$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist durch die Multiplication zur ganzen Zahl gemacht und die rechte Seite ist

kleiner als 1, weil p eine ganze Zahl ist. Es müsste also, wenn wir $e = \frac{q}{p}$ annehmen, eine ganze Zahl kleiner als der Stammbruch $\frac{1}{p}$ sein. Dieses ist aber unmöglich, mithin kann e kein Bruch sein, e ist aber auch keine ganze Zahl, weil $e > 2$ und < 3 ist, mithin ist e eine irrationale Zahl.

13. Aufgabe. Man soll einen Näherungswerth von:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{10!} + \cdots$$

dadurch bestimmen, dass man die ersten Glieder bis zum Gliede $\frac{1}{10!}$ inclusive addirt. —

Auflösung. Wir finden:

$$1 + 1 = 2$$
$$\frac{1}{2!} = 0{,}5$$
$$\frac{1}{3!} = 0{,}16666667$$
$$\frac{1}{4!} = 0{,}04166667$$
$$\frac{1}{5!} = 0{,}00833333$$
$$\frac{1}{6!} = 0{,}00138889$$
$$\frac{1}{7!} = 0{,}00019841$$
$$\frac{1}{8!} = 0{,}00002480$$
$$\frac{1}{9!} = 0{,}00000276$$
$$\frac{1}{10!} = 0{,}00000028$$

$$e = 2{,}71828181$$

14. Aufgabe. **Man soll untersuchen, wie gross der Fehler höchstens sein kann, den man begeht, wenn man bei Berechnung des Werthes von**

$$\text{I)}\ e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \frac{1}{p!} + \dots\dots$$

alle Glieder vernachlässigt, welche auf das Glied $\frac{1}{p!}$ folgen.

Setzen wir den Rest $= R$, so ist

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \frac{1}{p!} + R$$

folglich $R = \frac{1}{(p+1)!} + \frac{1}{(p+2)!} + \dots\dots$

oder $R = \frac{1}{(p+1)!}\left(1 + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{(p+2)(p+3)} + \frac{1}{(p+2)(p+3)(p+4)} + \dots\right)$

Weil nun $(p+2)\,(p+3)\,(p+4) \dots\dots > (p+2)\,(p+2)\,(p+2) \dots$ ist, so ist auch

$$1 + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{(p+2)(p+3)} + \dots < 1 + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{(p+2)^2} + \dots$$
$$< \frac{p+2}{p+1}$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten der Ungleichung mit $\frac{1}{(p+1)!}$, so erhält man

$$R < \frac{1}{(p+1)!} \cdot \frac{p+2}{p+1}$$

Setzt man z. B. wie in Aufgabe 13) für $p = 10$, so kann R, d. i. der Fehler, den wir dadurch begehen, dass wir in der Reihe I) alle Glieder vernachlässigen, welche auf das $\frac{1}{10!}$ folgen, höchstens $= \frac{1}{11!} \cdot \frac{12}{11}$, d. i. 0,000000027 sein.

15. Wir wollen jetzt noch die Eigenschaften der Brüche untersuchen, deren Zähler und Nenner gleich Null sind. Be-

trachten wir zu dem Ende den Bruch $\frac{7x}{4x}$, so finden wir, dass **für jeden Werth von x**

1) $\frac{7x}{4x} = \frac{7}{4}$ ist.

Setzen wir in dieser Gleichung $x = 0$, so wird auf der linken Seite Zähler und Nenner zu Null. Wir erhalten also in diesem Falle aus Gleichung 1)

2) $\frac{0}{0} = \frac{7}{4}$.

Ferner ist **für jeden Werth** von x

3) $\frac{38x}{2x} = 19$.

Setzen wir in dieser Gleichung $x = 0$, so entsteht die Gleichung

4) $\frac{0}{0} = 19$.

Ebenso wie in den Gleichungen 2) und 4) der Bruch $\frac{0}{0}$ resp. die Werthe $\frac{7}{4}$ und 19 hatte, so kann er **jeden beliebigen Werth haben. Der Bruch $\frac{0}{0}$ ist demnach eine unbestimmte Form, die jeden beliebigen Werth darstellen kann.**

Es lässt sich nun aber nicht verkennen, dass in der Gleichung 2) der Bruch $\frac{0}{0}$ **nur den ganz bestimmten Werth** $\frac{7}{4}$ und dass er in Gleichung 4) **nur den ganz bestimmten Werth** 19 hatte. In dem Bruche $\frac{0}{0}$ war also **nur** die **Form unbestimmt,** während der Bruch einen **ganz bestimmten Werth** hatte.

Wenn man also den Werth eines Bruches ausdrücken will, **dessen Zähler und Nenner gleich Null sind,** so kommt es darauf an, statt der Form $\frac{0}{0}$ eine andere Form zu wählen,

welche den Werth des Bruches erkennen lässt. Eine solche Form ist leicht gefunden. Setzen wir z. B. $\frac{7x}{4x} = \lim \left(\frac{7x}{4x}\right)$ wenn $x = 0$ ist, so ist $\lim \left(\frac{7x}{4x}\right)$ ein Ausdruck für einen Bruch, **dessen Zähler und Nenner gleich Null sind**, aber die Form des Ausdruckes ist nicht mehr unbestimmt, sondern man erkennt ohne Weiteres, dass $\lim \left(\frac{7x}{4x}\right)$ gleich $\frac{7}{4}$ ist.

Ebenso erkennt man, dass

$$\lim. \left(\frac{38x}{2x}\right) = 19 \text{ ist.}$$

Bezeichnet man ganz allgemein den Werth des Bruches $\frac{m(x-a)}{n(x-a)}$ durch W, während W_a denjenigen Werth von $\frac{m(x-a)}{n(x-a)}$ bezeichnet, den man erhält, wenn $x = a$ wird, so ist

$$1)\quad W_a = \frac{m(a-a)}{n(a-a)} \text{ oder}$$

$$2)\quad W_a = \frac{0}{0}.$$

Aus der Gleichung 2) kann man den Werth von W_a nicht erkennen, weil $\frac{0}{0}$ jeden Werth darstellen kann, setzt man aber

$$3)\quad W_a = \lim. \frac{m(x-a)}{n(x-a)},$$

so erkennt man sofort, dass

$$W_a = \frac{m}{n} \text{ ist.}$$

17. Aufgabe. Man soll den Werth (W_a) des Bruches $\frac{x^3-a^3}{x-a}$ für den Fall ermitteln, dass x gleich a wird.

Auflösung. Setzen wir ohne Weiteres in dem Bruche $\frac{x^3-a^3}{x-a}$ den Werth von x gleich a, so erhält man

$$1)\quad W_a = \frac{a^3-a^3}{a-a} \text{ oder}$$

$$2)\quad W_a = \frac{0}{0}.$$

Durch diese Gleichung ist der Werth von W_a nicht bestimmt, weil $\frac{0}{0}$ eine unbestimmte Form ist. Um diese Form zu vermeiden, setzen wir:

$$3)\quad W_a = \lim. \frac{x^3-a^3}{x-a}$$

Hierdurch ist ausgedrückt, dass W_a gleich derjenigen Zahl ist, welcher sich der Werth des Bruches $\frac{x^3-a^3}{x-a}$ nähert, wenn $x=a$ wird. Um diesen Werth zu ermitteln, müssen wir die Grösse $\frac{x^3-a^3}{x-a}$ in einer andern Form darstellen. Dividiren wir daher den Zähler durch den Nenner, so ergiebt sich

$$4)\quad (x^3-a^3) : (x-a) = x^2 + ax + a^2$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^3 - x^2 a} \\ x^2 a - a^2 \\ \underline{x^2 a - x a^2} \\ \quad x a^2 - a^3 \\ \quad \underline{x a^2 - a^3} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Es ist also

$$5)\quad \lim \frac{x^3-a^3}{x-a} = \lim (x^2 + xa + a^2)$$

also nach Gleichung 3)

$$6)\quad W_a = \lim (x^2 + xa + a^2).$$

Berücksichtigen wir nun, dass $\lim \frac{x^3 - a^3}{x - a}$ und $\lim (x^2 + xa + a^2)$ diejenigen Werthe resp. bezeichnen, welche die Grössen $\frac{x^3 - a^3}{x - a}$ und $(x^2 + xa + a^2)$ annehmen, wenn man $x = a$ setzt, so folgt aus Gleichung 6)

$$W_a = a^2 + aa + a^2, \text{ oder}$$

$$7) \quad W_a = 3a^2.$$

Bemerkung. Die analytische Geometrie bietet ein ausgezeichnetes Mittel, um auf graphischem Wege zu veranschaulichen, dass ein Bruch, dessen Zähler und Nenner gleich Null sind, einen ganz bestimmten Werth hat.

Wir werden bei der Entwickelung des Differential-Begriffes darauf zurückkommen.

Differential-Rechnung.

Erster Theil.

Functionen von einer unabhängig-veränderlichen Grösse.

I. Capitel.

Grundbegriffe der Differential-Rechnung und einige allgemeine Sätze.

§. 1.

Entwickelung des Differential-Quotienten für den speciellen Fall, dass $y = x^3$ ist.

Wir haben in unserer Einleitung gesehen, dass durch **eine** Gleichung zwischen den Grössen x und y diese Grössen **nicht vollkommen bestimmt** werden, dass aber y bestimmt ist, wenn man für x einen beliebigen Werth annimmt. Ist nun z. B. die Gleichung

$$1)\quad y = x^3$$

gegeben, so ist y bestimmt, wenn man x gleich irgend einer beliebigen Zahl setzt. Ist x **veränderlich,** so muss auch y **veränderlich** sein; und weil y nach Gleichung 1) von x **abhängig**

ist, so müssen die Aenderungen, welche y erleidet, den Aenderungen von x entsprechen. Nehmen wir nun an, es sei

2) $x = 10$, so ist $y = 10^3 = 1000$

Bezeichnet ferner x' einen neuen Werth von x, und y' den entsprechenden neuen Werth von y, und setzen wir

3) $x' = 12$, so ist $y' = 12^3 = 1728$.

Durch Subtraction folgt aus den Gleichungen 2) und 3)

4) $x' - x = 2$, $y' - y = 728$. d. h.

wenn der ursprüngliche Werth von x gleich 10 ist, und x um 2 **vermehrt** wird, so ist die entsprechende **Zunahme** von y gleich 728. Man hat für die Zunahme von x und y eigne Symbole eingeführt. Die Zunahme von x wird bezeichnet durch $\triangle x$ (spr. Zunahme von x oder Differenz x). Die Zunahme von y bezeichnet man durch $\triangle y$ spr. Zunahme von y oder Differenz y).

§. 2.
Fortsetzung.

Wenn wir jetzt in der Gleichung

1) $y = x^3$

die Grösse x um $\triangle x$ vermehren, und die entsprechende Zunahme von y gleich $\triangle y$ ist, so ist

2) $y + \triangle y = (x + \triangle x)^3$

Subtrahiren wir Gleichung 1) von Gleichung 2), so ergiebt sich

3) $\triangle y = (x + \triangle x)^3 - x^3$

also nach Division mit $\triangle x$

4) $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(x + \triangle x)^3 - x^3}{\triangle x}$$

Der Bruch $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ wird **Differenz-Quotient** genannt. Es leuchtet nun ein, dass der Werth des Differenz-Quotienten **abhängig** ist von dem Werthe von x und von dem Werthe

von $\triangle x$. Von **ganz besonderem Interesse** ist derjenige Werth des Differenz-Quotienten, $\frac{\triangle y}{\triangle x}$, welchen man erhält, wenn $\triangle x$ zu Null wird. **Die Ermittelung dieses Werthes von $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ bildet zugleich die wichtigste Aufgabe der Differential-Rechnung.**

Wenn $\triangle x$ zu Null wird, so wird nach Gleichung 3) auch $\triangle y$ zu Null; der Differenz-Quotient $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ wird in diesem Falle also zu einem Bruche, dessen Zähler und Nenner gleich Null sind. Man könnte demnach $\frac{0}{0}$ für $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ schreiben.

§. 3.

Fortsetzung.

Aus Nr. 15—17 unserer Hülfssätze der niedern Analysis folgt aber, dass der Bruch $\frac{0}{0}$ eine unbestimmte Form ist. Aus diesem Grunde ist es nothwendig, statt der Form $\frac{0}{0}$ einen Ausdruck zu wählen, aus welchem man erkennen kann, **nicht allein**, dass in unserm Bruche Zähler und Nenner gleich Null sind, **sondern auch**, dass unser Bruch **derjenige Werth** des Bruches $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ist, den man erhält, wenn man $\triangle x$ und (in Folge dessen nach §. 2, Gleichung 3) auch $\triangle y$ gleich Null setzt. Aus diesem Grunde setzt man dx (sprich Differential von x) für $\triangle x$, dy (spr. Differential von y) für $\triangle y$, um anzudeuten, dass in dem Bruche $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ Zähler und Nenner zu Null geworden sind. Hiernach bezeichnet $\frac{dy}{dx}$ den Werth des Bruches $\frac{\triangle y}{\triangle x}$, wenn in ihm Zähler

und Nenner zu Null geworden sind. Analog der Benennung des Bruches $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nennt man $\frac{dy}{dx}$ den Differenfial-Quotienten von y $(=x^3)$.

Bemerkung: Den Anfänger machen wir noch besonders darauf aufmerksam, dass in dem Ausdrucke Δx das Δ nicht von dem x getrennt werden darf, und namentlich, das Δ und x nicht als Factoren eines Productes angesehen werden können. Δx ist nur ein **Symbol** für die Zunahme, welche x erleidet, wenn x von **einem** beliebigen Werthe in einen **andern** beliebigen Werth übergeht. Ist z. B. x ursprünglich gleich 10 und ändert man x darauf, bis es gleich 12 geworden ist, so ist die Zunahme gleich 2, man bezeichnet dies durch die Gleichung $\Delta x = 2$ (spr. Zunahme von x gleich 2). Etwas Analoges gilt von den Symbolen Δy, dx, dy. Nur ist zu bedenken, dass dx und dy dem Werthe nach gleich Null sind.

§. 4.
Fortsetzung.

Im §. 2 folgte aus der Gleichung

1) $y = x^3$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$

hieraus folgt:

3) $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$

Es leuchtet ein, dass

$\lim \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$ den Werth des Bruches $\frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$

bedeutet, wenn in demselben Δx zu Null wird. Um nun diesen Werth zu ermitteln, setzen wir

4) $\frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \frac{x^3 + 3x^2 . \Delta x + 3x . \Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x.}$

also

5) $\frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \frac{3x^2 . \Delta x + 3x . \Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x.}$

oder

6) $\frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x.} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2.$

Diese Gleichung gilt für jeden Werth von $\triangle x$, sie gilt also auch, wenn $\triangle x$ zu Null wird. Wenn aber $\triangle x$ zu Null wird, so werden die Glieder $3x\triangle x + \triangle x^2$ auch zu Null, also ist

$$7)\ \lim \frac{(x+\triangle x)^3 - x^3}{\triangle x} = 3x^2.$$

Schalten wir nun den Werth von $\lim \frac{(x+\triangle x)^3 - x^3}{\triangle x}$ in Gleichung 3) ein, so ergiebt sich

$$8)\ \frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

Bemerkung. In dem Vorstehenden haben wir den Werth des Differential-Quotienten einer Function von x für einen speciellen, sehr einfachen Fall ($y = x^3$) ermittelt. In allen übrigen Fällen ist der Gang der Untersuchung im Wesentlichen derselbe. — Wir empfehlen deshalb dem Anfänger, sich die vorigen Paragraphen recht klar zu machen, ehe er weiter geht, und machen noch besonders darauf aufmerksam, das in unserm speciellen Falle nach Gleichung 8) $\frac{dy}{dx}$ wieder eine Function von x ist. (Vergl. §. 6.)

§. 5.

Bestimmung des Differential-Quotienten, wenn $y = fx$ ist.

Wir wollen jetzt annehmen, es sei y eine **beliebige** Function von x, und bezeichnen dies durch

$$1)\ y = f(x).$$

Hieraus folgt

$$2)\ y + \triangle y = f(x + \triangle x).$$

Subtrahiren wir Gleichung 1) von Gleichung 2), so ergiebt sich

$$3)\ \triangle y = f(x + \triangle x) - f(x),$$

$$4)\ \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

5) $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{fx(+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Der Differential-Quotient $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ einer beliebigen entwickelten Function $y = fx$ ist also unter allen Umständen der Werth, den der Bruch $\frac{f(x+\Delta x) - fx}{\Delta x}$ annimmt, wenn Δx zu Null wird.

§. 6.

Fortsetzung.

Es ist $\lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ **abhängig** von dem **Werthe** von x und von der Form der Function f(x). Man schreibt deshalb gewöhnlich $f'x$, statt $\lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x).}{\Delta x.}$

Aus der Gleichung 5) folgt dann

6) $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

Die Function $f'x$ nennt man mit Rücksicht auf die **ursprüngliche** Function ($y = fx$) eine **abgeleitete** Function.

Bemerkungen.

1) Das Symbol $f'(x)$ ist sehr glücklich gewählt, es bezeichnet

a) dass $\frac{dy}{dx}$ ($= f'x$) eine Function von x ist und

b) dass diese Function aus der f-Function $y = fx$ (durch Differentiation) abgeleitet ist.

2) Wir werden später sehen, dass man in den meisten Fällen aus einer Function durch wiederholte Differentiation unzählig viele neue Functionen ableiten kann. Man nennt deshalb die Function $f'(x)$ die erste abgeleitete Function von f(x) oder kurzweg **die erste Abgeleitete.**

Hierdurch ist $f'(x)$ von allen übrigen Functionen unterschieden, welche sich durch Differentiation aus der Function f(x) ableiten lassen.

3) Analog der Bezeichnung

$$f' x \text{ für } \lim \frac{f(x+\triangle x) f(x)}{\triangle x}$$

setzt man $F' x$ für

$$\lim \frac{F(x+\triangle x) - F x}{\triangle x}$$

und $\varphi' x$ für

$$\lim \frac{\varphi(x+\triangle x) - \varphi x}{\triangle x}$$

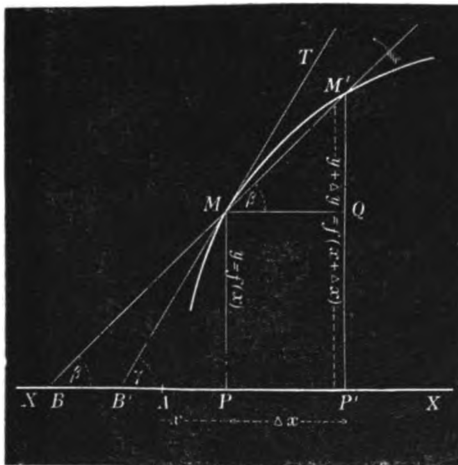
etc. etc.

§. 7.

Bedeutung des Differential-Quotienten in der analytischen Geometrie.

Ist $y = f(x)$ die Gleichung der Curve DMM'C Fig. 3, und legen wir durch einen beliebigen Punkt M eine Secante MM', so kann man aus der Lage der Punkte M und M', in welchen die Secante die Curve schneidet, den Winkel β bestimmen, den die Secante mit der Abscissenachse bildet. Nach den Bezeichnungen in unserer Figur ist

Fig. 3.



$MQ = \triangle x$; $M'Q = \triangle y$.

$$1) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

Dreht man nun die Secante MM' um den Punkt M, so dass sie sich der Lage der Tangente B'M nähert, so wird der zweite Durchschnittspunkt M' sich dem Punkte M immer mehr nähern. Bei dieser Annäherung des Punktes M' an den Punkt M werden die Werthe von $\triangle y$ und $\triangle x$ immer kleiner

werden, und zuletzt, wenn der Punkt M' mit dem Punkte M, also die Secante MM' mit der Tangente B'M zusammen fällt, werden die Werthe von $\triangle y$ und $\triangle x$ zu Null werden. In diesem Falle ist der Werth des Winkels β gleich dem Winkel γ d. i. gleich demjenigen Winkel, den die Berührende B'M für den Punkt M mit der Abscissenachse bildet. Wir erhalten demnach aus Gleichung 1)

$$2)\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\gamma.$$

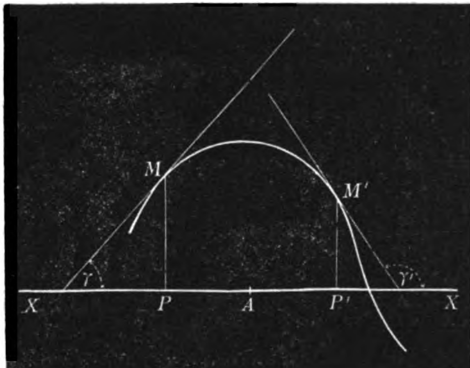
Der **Differential-Quotient** ist also gleich der **trigonometrischen Tangente** desjenigen Winkels (γ), den die Tangente, welche die Curve im Punkte M berührt, mit der Abscissenachse bildet.

§. 8.

Fortsetzung.

Wenn $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\gamma$ positiv ist, so ist γ bekanntlich ein spitzer Winkel; ist dagegen $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\gamma$ negativ, so ist γ ein stumpfer Winkel. Hieraus ergiebt sich, dass unsere Curve ($y = fx$) Fig. 4 in einem Punkte (M) **steigt**, wenn für diesen Punkt $\frac{dy}{dx}$ **positiv** ist; dass dagegen die Curve in einem Punkte (M') **fällt**, wenn für diesen Punkt $\frac{dy}{dx}$ **negativ** ist.

Fig. 4.



Bemerkungen.

1. Wenn wir diese Betrachtungen etwas weiter fortsetzten, so würden wir direct auf eine Theorie der Maxima und Minima kommen.

2. Aus der Figur 4 ersieht man ohne Weiteres, dass γ abhängig von der Abscisse (x) des Punktes M ist; demnach ist auch $\operatorname{tg}\gamma$ eine Function von x. Nun ist nach §. 7 Gleichung 2)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\gamma.$$

Man ersieht also aus der Figur recht deutlich, dass $f'x = \frac{dy}{dx}$ wieder eine Function von x ist (vergl. §. 6).

§. 9.

Von den Differentialen dy und dx.

In den vorigen §§. haben wir gesehen, dass dy und dx resp. Zähler und Nenner desjenigen Bruches sind, welcher entsteht, wenn in dem Bruche $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ Zähler und Nenner zu Null werden, dies heisst mit anderen Worten, dass dy und dx **dem Werthe nach** gleich Null sind. Trotzdem aber sind die Differentiale dy und dx nicht gleich dem **absoluten Nichts,** weil der Bruch $\frac{dy}{dx}$ im Allgemeinen einen ganz bestimmten endlichen Werth hat.

Es ist z. B.

$\frac{dy}{dx} = 3x^2$ wenn $y = x^3$ nach §. 4.

$\frac{dy}{dx} = f'x = \left(\lim \frac{f(x + \triangle x) - (x)}{\triangle x}\right)$, wenn $x = f(x)$ nach §. 6.

$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\gamma$, wenn x und y als Coordinaten einer Curve angesehen werden nach §. 7.

§. 10.

Fortsetzung.

Aus der Gleichung

$$1)\ \frac{dy}{dx} = fx$$

folgt weiter

$$2)\ dy = fx \,.\, dx.$$

Giebt man nun hierin $f'x$ irgend einen Zahlenwerth; setzt man z. B. $f'x = 19$ und in Folge dessen

$$3)\ dy = 19 \,.\, dx$$

so erkennt man ohne Weiteres, dass **dy mit dx gemessen werden kann,** und dass $f'x$ gleich der **Maasszahl** ist, welche angiebt, wie oft dx in dy enthalten ist.

Aus der der Gleichung 1) folgt ferner:

$$4)\ dx = \frac{1}{f'x}\, dy, \text{ d. h.}$$

es **ist auch dx durch dy messbar** und es ist $\frac{1}{f'x}$ gleich der **Maasszahl,** welche angiebt, wie oft dy in dx enthalten ist.

Bemerkungen.

1) Wenn es nicht einleuchten sollte, dass aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = f'x$ ohne Weiteres die Gleichung $dy = f'x.dx$ folgt, so gehe man aus von der Gleichung:

$$1)\ \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} \text{ hieraus folgt:}$$

$$2)\ \triangle y = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x.} \cdot \triangle x.$$

Diese Gleichung gilt für jeden Werth von $\triangle x$. Lässt man nun $\triangle x$ zu dx werden, so wird $\triangle y$ zu dy, und es wird $\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$ zu $\lim \frac{f(x + \triangle x) - fx}{\triangle x} = f'x$. Aus der Gleichung 2) entsteht dann

$$3)\ dy = f'x.dx.$$

2) In formeller Beziehung ist es durchaus in Uebereinstimmung mit der niederen Arithmetik, wenn man aus der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f'x \text{ die Gleichung}$$

$$dy = f'x\ dx \text{ ableitet.}$$

Aber auch das Resultat widerspricht der niederen Arithmetik nicht, denn setzt man für $f'x$ seinen Zahlenwerth, und ist z. B. $f'x = 19$, so erhält man $dx = 10 . dx$.

Setzt man in diese Gleichung ebenfalls für dy und dx ihre Werthe, so erhält man $0 = 19 . 0$.

Es ist dies ein Resultat, welches durchaus mit der niederen Arithmetik übereinstimmt.

§. 11.

Fortsetzung.

Von den unendlich kleinen Grössen.

Weil nun die Differentiale (dy und dx) **unter einander messbar** sind, so kommt ihnen die wesentliche Eigenschaft der Grössen zu. Hierbei ist jedoch stets zu berücksichtigen, dass sie durch endliche Grössen, **wenn diese auch noch so klein sind,** nicht gemessen werden können, oder dass sie im Vergleich zu endlichen Grössen gleich Null sind. Aus diesem Grunde müssen Grössen von der Art wie dy und dx von den endlichen Grössen unterschieden werden. Man nennt sie deshalb **unendlich kleine** Grössen.

§. 12.

Unendlich kleine Zahlen höherer Ordnungen.

Vergleichen wir das Product $dx . dx = (dx)^2$ mit der unendlich kleinen Zahl dx, so finden wir

$$1) \quad \frac{(dx)^2}{dx} = dx.$$

Es ist also $\frac{(dx)^2}{dx}$ selbst wieder eine unendlich kleine Zahl, d. h. die unendlich kleine Zahl $(dx)^2$ ist unendlich klein im Vergleich zu dx.

Ebenso wird man finden, dass $(dx)^3$ wieder unendlich klein ist gegen $(dx)^2$.

Endlich, dass $(dx)^{n+1}$ unendlich klein ist im Vergleich zu $(dx)^n$.

Durch diese Betrachtung werden wir darauf geführt, die unendlich kleinen Grössen in verschiedene Ordnungen einzutheilen. Wenn nun x die unabhängig veränderliche Grösse ist, so wollen wir d x als eine unendlich kleine Grösse der ersten Ordnung ansehen; dann ist

$(dx)^2$ eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung,

$(dx)^3$ eine unendlich kleine Grösse der dritten Ordnung,

$(dx)^n$ eine unendlich kleine Grösse der n^{ten} Ordnung.

Bemerkung.

Es ist Sache des **Beliebens,** d x als unendlich kleine Grösse der ersten Ordnung aufzufassen.

Wäre z. B. $\alpha = \sqrt{dx}$, so wäre α auch unendlich klein (dem Werthe nach $= 0$). Wir könnten deshalb auch α als eine unendlich kleine Zahl der ersten Ordnung auffassen, dann aber wäre $dx = (\alpha^2)$ eine unendlich kleine Zahl der 2ten Ordnung etc.

§. 13.

Fortsetzung.

Aus unserer Auffassung folgt weiter, dass zwei unendlich kleine Grössen, deren Quotient einen endlichen (von Null verschiedenen) Werth hat, zwei unendlich kleine Grössen von derselben Ordnung sind. Nun hat in der Regel $f'x$ einen endlichen (von Null verschiedenen) Werth; ebenso hat in der Regel auch $\left(\frac{dy}{dx}\right)^n = (f'x)^n$ einen endlichen (von Null verschiedenen) Werth. Demnach sind im Allgemeinen die Potenzen $(dy)^n$ und $(dy)^n$ unendlich kleine Grössen derselben Ordnung, d. h. es ist im Allgemeinen $(dy)^n$ eine unendlich kleine Grösse der n^{ten} Ordnung.

§. 14.

Unendlich grosse Zahlen verschiedener Ordnungen.

In ähnlicher Weise, wie wir die unendlich kleinen Zahlen in verschiedene Categorien getheilt haben, lassen sich auch

die unendlich grossen Zahlen eintheilen. Sind z. B. A_1, A_2, A_3 etc. endliche (von Null verschiedene) Grössen und setzt man

$$U_1 = A_1 \frac{1}{dx}, \quad U_2 = A_2 . \frac{1}{dx^2}, \quad U_n = A_n \frac{1}{dx^n},$$ so ist

U_1 eine unendlich grosse Zahl der ersten Ordnung,

U_n eine unendlich grosse Zahl der 2ten Ordnung,

. . .

. . .

. . .

U_3 eine unendlich grosse Zahl der nten Ordnung.

Bemerkungen.

1) Den Begriff der endlichen Grössen bilden wir uns unmittelbar aus der Anschauung. Zu dem Begriffe des unendlich Kleinen und des unendlich Grossen gelangen wir **nur** auf dem Wege der Speculation.

2) Es liegt in der Natur des menschlichen Geistes, dass wir uns das unendlich Grosse und das unendlich Kleine **an und für sich** nicht klar vorstellen können.

3) Daher rührt es auch, dass wir endliche Grössen **nur** mit endlichen Grössen, und ebenso, dass wir das unendlich Grosse oder das unendlich Kleine **nur** mit dem unendlich Grossen oder dem unendlich Kleinen **derselben Ordnung** messen können, so dass also die Rechnung mit unendlich grossen oder unendlich kleinen Grössen stets auf endliche Grössen zurückgeführt wird.

4) Hätten wir eine klare und unmittelbare Vorstellung von dem unendlich Grossen und dem unendlich Kleinen, so würden wir in der niederen Arithmetik nicht ohne Weiteres Null gleich Null setzen (vergl. §. 10, Bemerkung 2).

5) Es liegt ein scheinbarer Widerspruch darin, dass wir die Differentiale dy und dx als Grössen auffassen, und dass sie dennoch gleich Null sein sollen. Dies rührt daher, dass wir das unendlich Grosse und das unendlich Kleine **an sich** nicht denken können.

6) Ein Freund philosophischer Speculationen mag aus dem Vorstehenden entnehmen, dass dem menschlichen Geiste auf dem Gebiete der Speculation Schranken gesetzt sind, welche er ohne Gefahr grosser Verirrung nicht überschreiten darf. — Die Geschichte der Philosophie giebt hierfür viele Belege.

§. 15.

Lehrsatz.

Eine additive constante Grösse ist bei der Differentiation ohne Einfluss —

oder wenn $y = fx + A$, so ist

$$\frac{dy}{dx} = f'x.$$

Beweis. Wenn

1) $y = fx + A$, so ist
2) $y + \triangle y = f(x + \triangle x) + A$, also
3) $\triangle y = f(x + \triangle x) + A - f(x) - A$
$= f(x + \triangle x) - fx$
4) $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - fx}{\triangle x}$, also
5) $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{f(x + \triangle x) - fx}{\triangle x}$, d. h.
6) $\frac{dy}{dx} = f'x$, w. z. b. w.

§. 16.

Lehrsatz.

Wenn $y = Afx$ ist, so ist

$$\frac{dy}{dx} = Af'x,$$ d. h.

ein constanter Factor geht bei der Differentiation als constanter Factor in das Differentialverhältniss über.

Beweis. Wenn

1) $y = Afx$, so ist
2) $y + \triangle y = Af(x + \triangle x)$, also
3) $\triangle y = Af(x + \triangle x) - A.f(x)$
4) $\triangle y = A\}f(x + \triangle x) - f(x)\{$
5) $\frac{\triangle y}{\triangle x} = A\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$
6) $\frac{dy}{dx} = A \lim \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$
7) $\frac{dy}{dx} = Af'x$, w. z. b. w.

§. 17.

Lehrsatz.

Das Differentialverhältniss der Summe mehrerer Functionen ist gleich der Summe der Differentialverhältnisse dieser einzelnen Functionen,

oder wenn $y = fx + Fx + \varphi x + \text{etc.}$

so ist $\frac{dy}{dx} = f'x + F'x + \varphi' x + \text{etc.}$

Beweis. Wenn

1) $y = f(x) + F(x) + \varphi(x)$, so ist

2) $y + \Delta y = f(x + \Delta x) + F(x + \Delta x) + \varphi(x + \Delta x)$

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - fx + F(x + \Delta x) - F(x) + \text{etc.}$

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x} + \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \text{ etc.}$

also

5) $\frac{dy}{dx} = \lim \left\{ \frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x} + \frac{F(x + \Delta x) - F(x) +}{\Delta x} \right\}$

6) $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x} + \lim \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} +$

7) $\frac{dy}{dx} = f'x + F'x + \text{etc.}$ w. z. b. w.

II. Capitel.

Differentiation der einfachen Functionen.

§. 18.

Die algebraische Function $y = x^m$.

Aufgabe. Man soll die algebraische Function $y = x^m$ differentiiren.

Auflösung. Wenn

1) $y \qquad = x^m$ ist, so ist

2) $y + \triangle y = (x + \triangle x)^m$

Subtrahirt man Gleichung 1) von Gleichung 2), so folgt

3) $\triangle y = (x + \triangle x)^m - x^m$

4) $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(x + \triangle x)^m - x^m}{\triangle x}$

Hieraus folgt

5) $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{(x + \triangle x)^m - x^m}{\triangle x}$

Um den Werth von $\lim \frac{(x + \triangle x)^m - x^m}{\triangle x}$ zu berechnen, kehren wir zu Gleichung 4) zurück, und erhalten hieraus durch eine leichte Umformung

6) $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{x^m \left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)^m - x^m}{\triangle x}$

7) $\frac{\triangle y}{\triangle x} = x^m \frac{\left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)^m - 1}{\triangle x}$

8) $\frac{\triangle y}{\triangle x} = x^{m-1} \frac{\left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)^m - 1}{\frac{\triangle x}{x}}$

Nun sei 9) $\frac{\triangle x}{x} = \alpha$, so ist

10) $\frac{dy}{dx} = x^{m-1} \lim \frac{(1 + \alpha)^m - 1}{\alpha}$.

Es handelt sich also nur noch um

$\lim \frac{(1 + \alpha)^m - 1}{\alpha}$, deshalb setzen wir

11) $(1 + \alpha)^m = 1 + \beta$, dann ist

12) $\lim \frac{(1 + \alpha)^m - 1}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\alpha}$.

Aus Gleichung 11) folgt ausserdem

13) $m \,.\, \lg \,.\, (1 + \alpha) = \lg (1 + \beta)$

14) $\frac{\lg(1+\beta)}{\lg(1+\alpha)} = m.$

Nach No 12 der Hülfssätze aus der niedern Analysis ist

15) $\lim (1+\beta)^{1/\beta} = \lim (1+\alpha)^{1/\alpha} = e$, also

16) $\lim \left[\frac{1}{\beta}\lg(1+\beta)\right] = \lim \left[\frac{1}{\alpha}\lg(1+\alpha)\right]$ also

17) $\lim \frac{\lg(1+\beta)}{\lg(1+\alpha)} = \lim \frac{\beta}{\alpha}.$

Aus Gleichung 14) und 17) ergiebt sich demnach

18) $\lim \frac{\beta}{\alpha} = m.$

Verbinden wir nun dieses Resultat mit den Gleichungen 10) und 12), so erhalten wir

19) $\frac{dy}{dx} = x^{m-1} m$

20) $\frac{dy}{dx} = m x^{m-1}$

Resultat. Wenn

I. $y = x^m$, so ist

II. $\frac{dy}{dx} = m x^{m-1}$

III. $dy = m x^{m-1} dx$ oder

IV. $d(x^m) = m x^{m-1} dx.$

§. 19.

Fortsetzung.

Aufgabe 1. Man soll folgende Functionen differentiiren.

$$y = x^4,\ y = \frac{1}{x^4},\ y = \sqrt[4]{x},\ y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}.$$

Auflösung 1. Wenn

1) $y = x^4$, so setze man in Gleichung I) des vorigen Paragraphen $m = 4$, dann erhält man nach Gleichung II)

2) $\frac{dy}{dx} = 4x^{4-1} = 4x^3$

3) $dy = 4x^3 dx$

4) $dx^4 = 4x^3 dx$

Auflösung 2. Wenn

1) $y = \frac{1}{x^4}$ ist, so kann man auch setzen

2) $y = x^{-4}$.

Dies giebt mit Hülfe des vorigen Paragraphen, wenn man $m = -4$ setzt,

3) $\frac{dy}{dx} = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$

4) $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^5}$.

5) $dy = -\frac{4dx}{x^5}$

6) $d\frac{1}{x^5} = -\frac{4dx}{x^5}$

Auflösung 3. Wenn

1) $y = \sqrt[4]{x}$, so ist auch

2) $y = x^{\frac{1}{4}}$, also

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

5) $dy = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}dx$.

Auflösung 4.

1) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ ist gleichbedeutend mit

2) $y = x^{-\frac{1}{4}}$

3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}-1}$

4) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}} = -\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$

5) $dy = -\frac{dx}{4\sqrt[4]{x^5}}$

6) $d\frac{1}{\sqrt[4]{x}} = -\frac{dx}{4\sqrt[4]{x^5}}.$

Aufgabe 2. Man soll folgende Functionen differentiiren

1) $y = A + x^4$

2) $y = A + \frac{1}{x^4}$

3) $y = A + \sqrt[4]{x}$

4) $y = A + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

Auflösung. In §. 15 ist bewiesen:

wenn $y = A + fx$, so ist $\frac{dy}{dx} = f'x$. Hieraus folgt ohne Weiteres in Verbindung mit den Resultaten der vorigen Aufgabe

1) wenn $y = A + x^4$, so ist $\frac{dy}{dx} = 4x^3$

2) wenn $y = A + \frac{1}{x^4}$, so ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^5}$

3) wenn $y = A + \sqrt[4]{x}$, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

4) wenn $y = A + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, so ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$

Aufgabe 3. Man soll folgende Functionen differentiiren

$y = 7x^4$

$y = 7\frac{1}{x^4}$

$$y = 7\sqrt[4]{x}$$

$$y = \frac{1}{7\sqrt[4]{x}}$$

Auflösung. In §. 16 ist bewiesen:

wenn $y = A.f(x)$, so ist $\frac{dy}{dx} = A.f'(x)$. Hieraus folgt,

wenn $y = 7x^4$, so ist $\frac{dy}{dx} = 7.4.x^3 = 28x^3$

$$dy = d(7x^4) = 28x^3 dx.$$

wenn $y = 7.\frac{1}{x^4}$, so ist $\frac{dy}{dx} = -28x^{-5} = -\frac{28}{x^5}$

wenn $y = 7.\sqrt[4]{x}$, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{7}{4\sqrt[4]{x^3}}$

wenn $y = \frac{1}{7\sqrt[4]{x}}$, so ist $\frac{dy}{dy} = -\frac{1}{28\sqrt[4]{x^5}}$

Aufgabe 4. Man soll folgende Functionen differentiiren

$$y = x^4 + x^3 + x$$
$$y = 3x^4 + 11x^2 + 8$$
$$y = \frac{3}{x^4} + 5\sqrt[3]{x} - 7x^5$$

Auflösung. Aus §. 17 ergiebt sich ohne Weiteres

1) $d(x^4 + x^3 + x) = (4x^3 + 3x^2 + 1)dx.$

2) $d(3x^4 + 11x^2 + 8) = (3.4x^3 + 11.2.x)dx$

$$= 12x^3 dx + 22x dx.$$

3) $d\left(\frac{3}{x^4} + 5\sqrt[3]{x} - 7x^5\right) = \left(-3.4x^{-5} + \frac{5}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - 7.5x^4\right)dx$

$$= \left(-\frac{12}{x^5} + \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} - 35.x^4\right).dx.$$

§. 20.

Uebungsaufgaben mit Lösungen.

1) $y = 6x^5 + 4$; $\frac{dy}{dx} = 30x^4$

2) $y = 6x^5 - 4$; $\frac{dy}{dx} = 30x^4$

3) $y = \frac{2}{5}x^{10}$; $\frac{dy}{dx} = 4x^9$

4) $y = \frac{9}{13x^3}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{27}{13x^4}$

5) $y = 7\sqrt[3]{x^2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{14}{3\sqrt[3]{x}}$

6) $y = 5\sqrt[4]{x^7}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{35}{4}\sqrt[4]{x^3}$

7) $y = 9\sqrt[7]{x^3}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{27}{7\sqrt[7]{x^4}}$

8) $y = \frac{4}{5\sqrt[3]{x}}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{15\sqrt[3]{x^4}}$

9) $y = \frac{4x^2}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{4}{3}x^{\frac{2}{3}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{8}{9\sqrt[3]{x}}$

10) $y = a\sqrt{x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2\sqrt{x}}$

11) $y = \frac{a}{\sqrt{x}}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{2\sqrt{x^3}}$

12) $y = \frac{a}{b\sqrt[3]{x^2}}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{2a}{3b\sqrt[3]{x^5}}$

13) $y = \frac{m}{n}\sqrt[p]{x^q}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{mq}{np}\sqrt[p]{x^{q-p}}$

14) $y = \frac{m}{n\sqrt[p]{x^q}}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{mq}{np} \cdot \frac{1}{\sqrt[p]{x^{q+p}}}$

15) $y = \frac{m\sqrt[p]{x}}{n\sqrt[q]{x}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{mq - mp}{npq} \sqrt[pq]{x^{q-p-pq}}$

16) $y = x^4 + 12x^3 - 29x^2 - 61x - 134$; $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 36x^2 - 58x - 61$

17) $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$; $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 10x + 8$

18) $y = a + 6\sqrt{x} - \frac{c}{x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}$

19) $y = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x} - mx$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{2\sqrt{x^3}} + \frac{c}{2\sqrt{x}} - m$

20) $y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{m}{x^2}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2m}{x^3}$

§. 21.

Exponential-Function $y = a^x$.

Aufgabe. Man soll die Exponential-Function $y = a^x$ differentiiren.

Auflösung. Wenn

1) $y = a^x$, so ist

2) $y + \Delta y = a^{(x + \Delta x)}$, hieraus folgt

3) $\Delta y = a^{(x + \Delta x)} - a^x$

4) $\Delta y = a^x \{a^{\Delta x} - 1\}$.

5) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x . \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

6) $\frac{dy}{dx} = a^x . \lim \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

Um nun den Werth von $\lim \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ zu ermitteln, setzen wir

7) $\Delta x = \alpha$

8) $a^{\Delta x} = 1 + \beta$, so wird

$$9)\ \frac{dy}{dx} = a^x \, . \lim \frac{\beta}{\alpha}.$$

Da nun $(1 + \beta) = a^\alpha$, so ist

$$10)\ (1 + \beta)^{1/\beta} = a^{\alpha/\beta}, \text{ also nach Hülfssatz 12)}$$

$$11)\ e = \lim a^{\alpha/\beta}, \text{ also}$$

$$12)\ \lg e = \lg a . \lim \frac{\alpha}{\beta}$$

$$13)\ \lim \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\lg a}{\lg e}.$$

Das Logarithmensystem, das in Gleichung 13) zum Grunde gelegt ist, ist beliebig. Wir wollen annehmen, dass e die Basis des Systems ist, dass wir also natürliche Logarithmen gewählt hätten. Wir bezeichnen diese Logarithmen durch l oder lg nat (logarithmus naturalis), und haben dann, weil $l\,e = 1$

$$14)\ \lim \frac{\beta}{\alpha} = l\,a.$$

Substituiren wir diesen Werth von $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ in Gleichung 9), so ergiebt sich

$$15)\ \frac{dy}{dx} = a^x\, l\, a.$$

Resultat. Wenn

I. $y = a^x$, so ist

II. $\frac{dy}{dx} = a^x\, l\, a$

III. $dy = a^x\, l\, a\, dx$

IV. $d\,a^x = a^x\, l\, a . dx$

Zusatz. Setzt man in die letzten Formeln $a = e$, so erhält man

$$\frac{d\,e^x}{dx} = e^x\, l\, e = e^x$$

$$d\,e^x = e^x\, dx.$$

§. 22.

Die logarithmische Function $y = \lg x$.

Aufgabe. Man soll die logarithmische Function $y = \lg x$ differentiiren.

Auflösung. Wenn

1) $y = \lg x$, so ist

2) $y + \Delta y = \lg(x + \Delta x)$, also

3) $\Delta y = \lg(x + \Delta x) - \lg x$.

4) $\Delta y = \lg \frac{x + \Delta x}{x} = \lg\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$

5) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lg\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$

6) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{\lg\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$. Setzt man

7) $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$, so ist

8) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{\lg(1 + \alpha)}{\alpha}$

9) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lg(1 + \alpha)^{1/\alpha}$

10) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \lim \lg(1 + \alpha)^{1/\alpha}$

11) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \lg e$.

Resultat.

$$\frac{d \lg x}{dx} = \frac{1}{x} \lg e$$

$$d \lg x = \frac{dx}{x} \lg . e.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{d\,lx}{dx} = \frac{1}{x}\,le = \frac{1}{x}$$

$$d.lx = \frac{dx}{x}$$

vergl. §. 32.

§. 23.

Die trigonometrischen Functionen sin x und cos x.

Aufgabe. Man soll die Functionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ differentiiren.

Auflösung. Wenn

1) $y = \sin x$, so ist

2) $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$

3) $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$.

Nun aber ist bekanntlich

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2}, \text{ also}$$

4) $\Delta y = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$, also

5) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

6) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

7) $$\frac{dy}{dx} = \cos x \cdot \lim \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Um $\lim \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ zu ermitteln, beachte man, dass für endliche Werthe von α

8) $\sin \alpha < \widehat{\alpha} < \operatorname{tg} \alpha$, also

9) $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\widehat{\alpha}} > \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$ oder

10) $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\widehat{\alpha}} > \cos\alpha.$

11) $1 > \frac{\sin\alpha}{\widehat{\alpha}} > \cos\alpha.$

Setzt man in dieser Ungleichung $\alpha = 0$, so wird $\cos\alpha = 1$, mithin ist $1 > \lim \frac{\sin\alpha}{\widehat{\alpha}} > 1$ oder $\lim \frac{\sin\alpha}{\widehat{\alpha}} = 1.$ Demnach ist auch

12) $$\lim \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1.$$

Schaltet man nach Gleichung 12) den Werth von

$$\lim \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

in Gleichung 7) ein, so ergiebt sich

13) $$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Resultat.

I. $$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

II. $$d(\sin x) = \cos x \,.\, dx.$$

Hat man

14) $y = \cos x$, so ist

15) $y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$, also

16) $\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x.$

Nach der Formel $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ erhält man

17) $$\Delta y = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) . \sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$18)\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$19)\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$20)\ \frac{dy}{dx} = -\sin x \,.\, \lim \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Wir haben vorhin gesehen, dass

$$\lim \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \text{ ist, also}$$

$$21)\ \frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

Resultat.

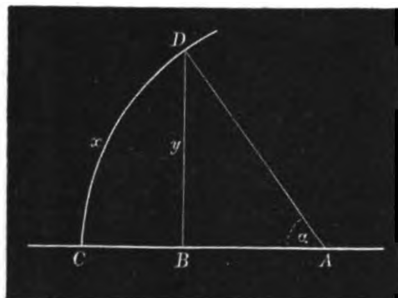
$$\text{III.}\ \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x.$$

$$\text{IV.}\ d(\cos x) = -\sin x \,.\, dx.$$

Bemerkung.

In der Differential-Rechnung bezieht man die trigonometrischen Functionen stets auf Kreisbögen, deren Radius gleich der Einheit ist. Ist z. B. Fig. 5

Fig. 5.



$AC = AD = 1$, so ist

$y = \sin x.$

Ist statt der Länge des Bogens $CD = x$, der zugehörige Centriwinkel α in Graden gegeben, so kann man leicht x berechnen nach der Gleichung

$$x = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi.$$

Es leuchtet ein, dass $\sin x = \sin \alpha$ ist.

III. Capitel.

Functionen von Functionen.

§. 24.

Entwickelung des Differentials von f (v).

Wenn y irgend eine Function von v ist, und v wieder eine Function von x, so lässt sich das Differential von y bestimmen, indem man zunächst von x ganz absieht, und v als unabhängig variable Grösse behandelt. Man wird auf diese Weise für dy einen Ausdruck bekommen, in welchem dv enthalten ist.

Drückt man nun dv durch x und dx aus, was immer geschehen kann, weil v eine Function von x ist, so hat man dy durch x und dx ausgedrückt. Es sei z. B.

$$y = v^m \text{ und } v = \sin x,$$

so ist

$$dy = m v^{m-1} dv$$

$$dv = \cos x \, dx, \text{ also}$$

$$dy = m . (\sin x)^{m-1} . \cos x \, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = m . (\sin x)^{m-1} . \cos x.$$

Allgemein kann man sagen:

Wenn $y = f(v)$ und v eine Function von x ist, so ist

$$dy = f'v . dv$$

$$\frac{dy}{dx} = f'v . \frac{dv}{dx}.$$

§. 25.

Fortsetzung.

Wenn ferner y irgend eine Function von v, v eine Function von u, und u wieder eine Function von x ist, so

werden wir auf einem ganz ähnlichen Wege das Differential von y finden, und ebenso in allen complicirteren Fällen.

Es sei z. B.

$$y = \sin v$$
$$v = u^m$$
$$u = (a^2 + x^3),$$

so ist

1) $dy = \cos v \,.\, dv$
2) $dv = m\,u^{m-1}\,du$
3) $du = 3\,x^2\,dx$, also
4) $dy = \cos v \,.\, m\,u^{m-1} \,.\, 3\,x^2\,dx$
5) $dy = \cos(u^m) \,.\, m\,(a^2 + x^3)^{m-1}\,3\,x^2\,dx$
6) $dy = 3\,m \cos\{(a^2 + x^3)^m\} \,.\, (a^2 + x^3)^{m-1} \,.\, x^2\,dx$

§. 26.

Uebungsaufgaben.

I. Wenn $y = \sin(m\,x)$, so setze man $m\,x = u$, so ist

1) $y = \sin u$
2) $dy = \cos u\;du$
3) $du = m\,dx$,

wenn man jetzt für u und du seinen Werth in Gleichung 2) einschaltet, so erhält man

4) $dy = m \cos(m\,x)\,dx$
5) $\dfrac{dy}{dx} = m \cos(m\,x)$

II. Wenn $y = (\sin x)^m$, so setze man $\sin x = u$, dann ist

1) $dy = m\,u^{m-1}\,du$
2) $du = \cos x\,dx$, also
3) $dy = m \,.\, (\sin x)^{m-1} \cos x\,dx$
4) $\dfrac{dy}{dx} = m \,.\, (\sin x)^{m-1} \cos x.$

III. Wenn $y = e^{\sin x}$, so setze man $\sin x = u$, dann ist

1) $dy = e^u\;du$

2) $du = \cos x \, dx$, also

3) $dy = e^{\sin x} . \cos x \, dx$

4) $\frac{dy}{dx} = e^{\sin x} . \cos x.$

IV. Wenn $y = \cos(ax^3 + bx^4)$, so setze man $ax^3 + bx^4 = u$, dann ist

1) $dy = - \sin u \, du$

2) $du = (3ax^2 + 4bx^3) \, dx$, also

3) $dy = - \sin(ax^3 + bx^4).(3ax^2 + 4bx^3) \, dx$

4) $\frac{dy}{dx} = - \sin(ax^3 + bx^4).(3ax^2 + 4bx^3)$

V. $y = a^{(\sin x + l x)}$; $dy = a^{(\sin x + l x)}.la.\left(\cos x + \frac{1}{x}\right).dx$

VI. $y = a^{lx}$; $dy = a^{lx} \, la \frac{dx}{x}$

VII. $y = l \cos x$; $dy = -\frac{\sin x}{\cos x} dx = - tg x \, dx$

VIII. $y = l(\cos x + a^x + x^m)$; $dy = \frac{-\sin x + a^x la + m x^{m-1}}{\cos x + a^x + x^m} dx$

IX. $y = lg(\cos x + \sin x)$; $dy = \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} lg e . dx$

X. $y = \sin(x^7 + \cos x - e^x)$;
$dy = \cos(x^7 + \cos x - e^x).(7x^6 - \sin x - e^x) \, dx$

XI. $y = \sqrt[5]{(\sin x + \cos x)^3}$; $dy = \frac{3}{5} \frac{(\cos x - \sin x)}{\sqrt[5]{(\sin x + \cos x)^2}} dx$

XII. $y = e^{\sqrt{\sin x}}$; $dy = \frac{e^{\sqrt{\sin x}} \cos x \, dx}{2\sqrt{\sin x}}$

§. 27.

Entwickelung des Differentials der Function f (u, v).

Aufgabe. Man soll die Functionen

$$y = u + v$$
$$y = u - v$$

$$y = u \cdot v$$

$$y = \frac{u}{v}$$

$$y = u^v$$

differentiiren, unter der Voraussetzung, dass u und v wieder Functionen von x sind.

Auflösung. Aus §. 17 folgt

$$d(u + v) = du + dv.$$

Ferner giebt die Gleichung $y = u - v$

die neue Gleichung $y = u + (-1)\,v$

und dies giebt $dy = du - dv$

Die Gleichung $y = u \cdot v$ giebt

1) $ly = lu + ly$, also

2) $\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$, also

3) $\frac{u.v.dy}{y} = v\,du + u\,dv$,

und weil $u \cdot v = y$, so ist

4) $dy = v\,du + u\,dv$.

Aus $y = \frac{u}{v}$ erhalten wir

5) $y = u \cdot v^{-1}$,

demnach mit Hülfe von Gleichung 4), indem man dort v^{-1} statt v setzt,

6) $dy = v^{-1}\,du + u\,d\,(v^{-1})$

7) $dy = \frac{du}{v} - \frac{u\,dv}{v^2}$, also

8) $dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$.

Aus der Gleichung $y = x^v$ folgt

9) $ly = v\,lu$, also

10) $d\,(ly) = v\,d\,(lu) + lu\,dv$

11) $\frac{dy}{y} = \frac{v\,du}{u} + lu\,dv$,

also wegen $y = u^v$

$$12)\quad dy = u^v . \frac{v\,du}{u} + u^v\, lu\, dv$$

$$13)\quad dy = v u^{v-1}\, du + u^v\, lu\, dv.$$

Resultat.

$$\text{I. } d(u + v) = du + dv$$
$$\text{II. } d(u - v) = du - dv$$
$$\text{III. } d(u\, .\, v) = v\,du + u\,dv$$
$$\text{IV. } d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du}{v} - \frac{u\,dv}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$
$$\text{V. } du^v = v u^{v-1}\, du + u^v . lu . dv.$$

§. 28.

Fortsetzung.

Aus den Gleichungen I bis V des vorigen §. ergiebt sich folgender Satz:

„Wenn u und v zwei Functionen von x sind, welche auf irgend eine Weise zu einer neuen Function verbunden sind, so erhält man das Differential dieser neuen Functionen, indem man sie zweimal differentiirt; einmal so, als ob u allein variabel sei, und das zweite Mal so, als ob v allein variabel sei; und darauf die beiden erhaltenen Resultate addirt."

In Formel wenn

$$1)\quad y = f(u, v), \text{ so ist}$$
$$2)\quad dy = \partial_u f(u, v) + \partial_v f(u, v) \text{ oder}$$
$$3)\quad dy = \frac{\partial y}{du} du + \frac{\partial y}{dv} dv \text{ oder}$$
$$4)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{du}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{du} . \frac{dv}{dx}.$$

In diesen Formeln bedeutet $\partial_u f(u, v)$ das Differential von f (u, v) so genommen, als ob allein nach u differentiirt sei.

$\frac{\partial y}{d u}$ ist ein Differentialquotient von y, den man unter der Voraussetzung erhält, dass ausser y, u **allein** variabel und zwar eine unabhängig veränderliche Grösse sei.

Analog ist die Bedeutung von ∂, f (u, v), und $\frac{d y}{d v}$.

Bemerkung.

Man kann die allgemeinen Formeln auch leicht allgemein beweisen. Es sei z. B.

$$1)\ y = f(u, v),$$

wo u und v beliebige Functionen von x sind, während das Symbol f(u, v) andeutet, das u und v auf irgend eine Weise zu einer neuen Function von x verbunden sind.

Lässt man nun die unabhängig Veränderliche x sich um $\triangle x$ ändern, so wird

$$u \text{ zu } u + \triangle u$$
$$v \text{ zu } v + \triangle v$$
$$y \text{ zu } y + \triangle y.$$

Aus Gleichung 1) folgt dann

$$2)\ y + \triangle y = f(u + \triangle u,\ v + \triangle v),$$

also nach Subtraction der Gleichung 1) von Gleichung 2)

$$3)\ \triangle y = f(u + \triangle u,\ v + \triangle v) - f(u, v).$$

Addirt man hierzu die Gleichung

$$0 = -f(u,\ v + \triangle v) + f(u,\ v + \triangle v),$$

so folgt

$$4)\ \triangle y = f(u + \triangle u,\ v + \triangle v) - f(u,\ v + \triangle v) + \\ + f(u,\ v + \triangle v) - f(u, v),$$

dies giebt

$$5)\ \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(u + \triangle u,\ v + \triangle v) - f(u,\ v + \triangle v)}{\triangle x} \\ + \frac{f(u,\ v + \triangle v) - f(u, v)}{\triangle x}$$

$$6)\ \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(u + \triangle u,\ v + \triangle v) - f(u,\ v + \triangle v)}{\triangle u} \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x} \\ + \frac{f(u,\ v + \triangle v) - f(u, v)}{\triangle v} \cdot \frac{\triangle v}{\triangle x}$$

Wird nun $\triangle x$ zu $d x$, so erhält man

$$7)\ \frac{d y}{d x} = \lim \left\{ \frac{f(u + \triangle u,\ v + \triangle v) - f(u, v + \triangle v)}{\triangle u} \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x} \right\} \\ + \lim \left\{ \frac{f(u,\ v + \triangle v) - f(u, v)}{\triangle v} \cdot \frac{\triangle v}{\triangle x} \right\}.$$

Nun ist aber

$$\lim \left\{ \frac{f(u + \triangle u,\ v + \triangle v) - f(u,\ v + \triangle v)}{\triangle u} \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x} \right\} = \frac{\partial y}{d u} \cdot \frac{d u}{d x}$$

$$\lim \left\{ \frac{f(u,\ v + \triangle v) - f(u,\ v)}{\triangle v} \cdot \frac{\triangle v}{\triangle x} \right\} = \frac{\partial y}{d v} \cdot \frac{d v}{d x}.$$

Demnach ist

$$8)\ \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

und hieraus folgt ohne Weiteres

$$9)\ dy = \frac{\partial y}{du} \cdot du + \frac{\partial y}{dv} \cdot dv = \partial_u y + \partial_v y$$

$$10)\ dy = \partial_u f(u,\ v) + \partial_v f(u,\ v).$$

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich nun leicht die Berechnung der folgenden Beispiele, wenn man $\sin x = u$ und $e^x = v$ in Aufgabe §. 27 setzt.

1) $d(\sin x + e^x) = \cos x\, dx + e^x\, dx = (\cos x + e^x)\, dx$

2) $d(\sin x - e^x) = (\cos x - e^x)\, dx.$

3) $d(\sin x \,.\, e^x) = e^x . \cos x\, dx + \sin x\, e^x\, dx = (\cos x + \sin x)\, e^x\, dx$

4) $d \frac{\sin x}{e^x} = \frac{\cos x\, dx}{e^x} - \frac{\sin x\, dx}{e^x} = \frac{\cos x - \sin x}{e^x} . dx$

5) $d\left(\sin x^{e^x}\right) = e^x . \sin x^{e^x - 1} \cos x\, dx + \sin x^{e^x}\, 1 \sin x \,.\, e^x\, dx$

$= (\cos x + \sin x \,.\, 1 \,.\, \sin x) \sin x^{e^x - 1}\, e^x\, dx.$

§. 29.

Differentiation von tg x und ctg x.

Aufgabe. Man soll die Function tg x und ctg x differentiiren.

Auflösung 1. Setzt man $\sin x = u$; $\cos x = v$, so ist

1) $\operatorname{tg} x = \frac{u}{v}$, also

2) $d \operatorname{tg} x = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}$

3) $d \operatorname{tg} x = \frac{\cos x\, d \sin x - \sin x\, d \cos x}{\cos^2 x}$

4) $d \operatorname{tg} x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$

Auflösung 2. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, also

$$5)\quad d \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x . d \cos x - \cos x d \sin x}{\sin^2 x}$$

$$6)\quad d \operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

Aufgabe. Man soll die Function sec x und cosec x differentiiren.

Auflösung 1. $\sec x = \frac{1}{\cos x} = (\cos x)^{-1}$, also

$$1)\quad d . \sec x = -(\cos x)^{-2} d . \cos x$$

$$2)\quad d \sec x = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x . \sec x . dx$$

Auflösung 2. $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1}$, also

$$3)\quad d \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x . \operatorname{cosec} dx$$

IV. Capitel.

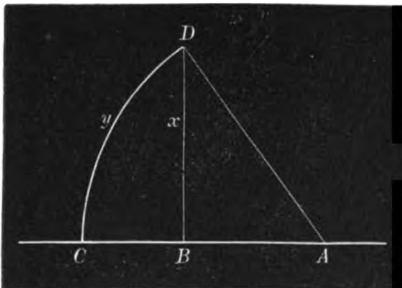
Umgekehrte Functionen.

§. 30.

Cyclometrische Functionen.

Wenn Fig. 6 der Radius gleich der Einheit ist, und man

Fig. 6.



BD = x, CD = y setzt, so ist x = sin y. Es ist demnach y der Bogen, dessen Sinus gleich x ist. Man schreibt dies:

$$y = \text{arc} \sin x.$$

Das Symbol arc sin x bezeichnet demnach denjenigen Bogen, dessen Sinus gleich x ist. In analoger Weise sind die Ausdrücke: arc cos x, arc tg x etc. zu deuten.

Die Functionen arc sin x, arc cos x, arc tg x, arc ctg x, arc sec x, arc cosec x werden unter dem gemeinschaftlichen Namen „cyclometrische Functionen“ zusammengefasst.

§. 31.

Fortsetzung.

Aufgabe 1. Man soll die Functionen arc sin x und arc cos x differentiiren.

Auflösung. Wenn y = arc sin x, so folgt hieraus:

1) $x = \sin y$, also

2) $dx = \cos y \,.\, dy$

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$, also auch Gl. 1)

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Resultat.

$$\text{I. } \frac{d\,(\text{arc sin } x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{II. } d.(\text{arc sin } x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

In ganz ähnlicher Weise ergiebt sich

$$\text{III. } \frac{d(\text{arc cos } x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{IV. } d.(\text{arc cos } x) = \frac{-dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Aufgabe 2. Man soll die Functionen arc tg x, arc ctg x, arc sec x, arc cosec x differentiiren.

Auflösung. y = arc tg x giebt die Gleichung

1) $x = \text{tg } y$, also

2) $dx = \frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} dy$

3) $dx = (1 + \text{tg}^2 y)\, dy$

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$

Resultat.

$$\text{I. } \frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{II. } d(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$\text{III. } d.\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\text{IV. } d \operatorname{arc} \sec x = \frac{dx}{x.\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{V. } d \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x = -\frac{dx}{x.\sqrt{x^2-1}}$$

§. 32.

$y = \lg x$ als Umkehrung von a^x.

Aufgabe. Man soll die logarithmische Function als Umkehrung der Exponential-Functionen differentiiren.

Auflösung. In der Gleichung $y = \lg x$, sei a die Basis des Logarithmensystemes; dann ist

1) $x = a^y$, also

2) $dx = a^y \, la \, dy$, also

3) $dy = \frac{dx}{a^y \, la}$

also nach Gleichung 1)

4) $dy = \frac{dx}{x} \cdot \frac{1}{la}$.

Wenn nun a die Basis des ursprünglichen Logarithmensystems ist, so ist $\frac{1}{la} = \lg_a e$, also

5) $dy = \frac{dx}{x} \lg_a e$.

Resultat.

$$\text{I. } d \lg_a x = \frac{dx}{x} \lg_a e.$$

Ferner folgt

$$\text{II. } d\,.\,lx = \frac{dx}{x} \text{ (vergl. §. 22).}$$

§. 33.

Zusammenstellung der Fundamental-Formeln.

Im Vorstehenden sind die wichtigsten Formeln der Differentialrechnung entwickelt. Wir rathen dem Anfänger, sie dem Gedächtnisse einzuprägen. Zu diesem Zwecke sind sie nachstehend noch einmal übersichtlich zusammengestellt.

1) $d\,(fx) = f'x\,dx$

2) $d\,(fx + A) = f'x\,dx$

3) $d\,(A\,fx) = A\,f'x\,dx$

4) $dx^m = mx^{m-1}\,dx$

5) $da^x = a^x\,.\,la\,dx$

$$de^x = e^x\,dx$$

6) $d\,lg\,x = \frac{dx}{x}\,lg\,e$

$$d\,lx = \frac{dx}{x}$$

7) $d\sin x = \cos x\,dx$

8) $d\cos x = -\sin x\,.\,dx$

9) $d\,tg\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}$

10) $d\,ctg\,x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$

11) $d\,arc\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

12) $d\,arc\cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $d\,arc\,tg\,x = \frac{dx}{1+x^2}$

14) $d\,arc\,ctg\,x = -\frac{dx}{1+x^2}$

$$15)\ d(u+v) = du + dv$$
$$16)\ d(u-v) = du - dv$$
$$17)\ d(u\,.\,v) = vdu + udv$$
$$18)\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$
$$19)\ d(u^v) = v\,u^{v-1}\,du + u^v\,lu\,.\,dv.$$

§. 34.

Uebungsbeispiele.

1) $d(ax^3 - bx^2 + c) = x(3ax - 2b)\,dx$

2) $d(ax^{2n} - bx^n + c)^m$
$= m.n(ax^{2n} - bx^n + c)^{m-1}(2ax^n - b)\,x^{n-1}\,dx$

3) $d\left(\frac{a+x}{b+x}\right) = -\frac{a-b}{(b+x)^2}\,.\,dx$

4) $d\left(\frac{x^3}{a^2} + \frac{a^2}{x}\right) = \left(3\frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2}{x^2}\right)dx$

5) $d(a+x)\,.\,\sqrt{a-x} = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$

6) $d(a^2+x^2)\,.\,\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x.(a^2-3x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$

7) $d(2a^2+3x^2)(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} = -15x^3\,.\,\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

8) $d\frac{x}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a-bx^2)^3}}$

9) $d\left(a^x - \frac{1}{a^x}\right) = \left(a^x + \frac{1}{a^x}\right)la\,.\,dx$

10) $d(x-1).a^x = a^x[1+(x-1)l.a]\,dx$

11) $de^x.x^m = e^x.x^{m-1}(x+m)\,dx$

12) $de^x.(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) = x^3.e^x.dx$

13) $de^x.\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{(2-x^2).e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$

14) $dl(x+a+\sqrt{2ax+x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$

15) $d\, l \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}} = -\frac{2a^2 x\, dx}{a^4 - x^4}$

16) $d\, l \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} = \frac{2\, dx}{3\,(1 - \sqrt[3]{x^2})\,\sqrt[3]{x^2}}$

17) $d \sin^2 x = 2 \sin x \cos x\, dx = \sin 2x\, dx$

18) $d \cos m x = -m \sin m x \,.\, dx$

19) $d \sin^3 x \,.\, \cos x = \sin^2 x \,.\, (3 - 4 \sin^2 x)\, dx$

20) $d\, e^x \,.\, \cos x = e^x (\cos x - \sin x)\, dx$

21) $d(x \,.\, e^{\cos x}) = e^{\cos x} (1 - x \,.\, \sin x) \,.\, dx$

22) $d \,.\, tg^m x = \frac{m \,.\, tg^{m-1} x}{\cos^2 x}\, dx$

23) $d\, e^{\sin x} = e^{\sin x} \,.\, \cos x\, dx$

24) $d\, l \sin x = ctg\, x \,.\, dx$

25) $d \sin(l x) = \frac{dx}{x} \cos(l x)$

26) $d\, l \frac{x}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{dx}{x} - \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$

27) $d \{ l \sqrt{\sin x} + l \sqrt{\cos x} \} = \cot g\, 2x \,.\, dx$

28) $d \{ (x)^x \} = x^x \,.\, (l x + 1)\, dx$

29) $d\, a^{lx} = \frac{a^{lx} \,.\, la}{x} \,.\, dx$

30) $d (x^x)^x = (x^x)^x \,.\, x^x \{ l x (l x + 1) + \frac{1}{x} \}\, dx$

31) $d\, x^{\sin x} = x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \,.\, l x \right) dx$

32) $d\, e^{ax} \cos m x = e^{ax} (a \,.\, \cos m x - m \sin m x)\, dx$

33) $d\, x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} \,.\, x^{\frac{1}{x}}\, l \frac{e}{x} \,.\, dx.$

V. Capitel.

Successive Differentiationen.

§. 35.

Ermittelung von $f^n x$.

Wir haben in §. 6 gesehen, dass der Differential-Quotient einer Function von x im Allgemeinen wieder eine Function von x ist. Wir setzten deshalb $\frac{dy}{dx} = f'x$.

Wenn wir nun $f'x$ wieder differentiiren, so ist der entstehende Differential-Quotient im Allgemeinen wieder eine Function von x u. s. w. Wir erhalten demnach durch fortgesetzte Differentiation

$$\frac{d\,f'x}{dx} = f''x$$

$$\frac{d\,f'x}{dx} = f'''x$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d\,f^n x}{dx} = f^{n+1}(x).$$

Die auf diese Weise erhaltenen neuen Functionen nennen wir die aus fx abgeleiteten Functionen; und zwar heisst

$f'x$ die erste abgeleitete Function,

$f''x$ die zweite abgeleitete Function,

. . .

. . .

. . .

$f^n x$ die n^{te} abgeleitete Function.

Ist z. B. $f(x) = \sin x$, so ist

$$f'x = \cos x$$
$$f''x = -\sin x$$
$$f'''x = -\cos x \text{ etc.}$$

§. 36.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^n x.$$

In der Gleichung

1) $dy = f'x\, dx$

sieht man dx als **constante** Grösse an, solange x die **unabhängig** veränderliche Grösse sein soll.

Da nun aber $f'x$ als Function von x variabel ist, so folgt aus Gleichung 1), dass dy ebenfalls variabel ist. Wir können demnach dy wieder differentiiren und erhalten dann

2) $d\,(dy) = d\,(f'x \,.\, dx)$.

Schreiben wir nun d^2y (spr. zweites Differential von y) statt $d\,(dy)$, und berücksichtigen wir, dass $d\,(f'x) = f''x \,.\, dx$ ist, so folgt

3) $d^2y = f''x \,.\, dx^2$.

Nun ist dx^2 wieder constant, während $f''x$ variabel ist, demnach ist auch d^2y variabel, wir erhalten also

4) $d\,(d^2y) = d f''x \,.\, dx^2$.

Schreiben wir d^3y (spr. drittes Differential von y) statt $d\,(d^2y)$, so erhalten wir aus Gleichung 4)

5) $d^3y = f'''x \,.\, dx^3$.

Gehen wir in dieser Weise fort, so gelangen wir zu der allgemeinen Gleichung

6) $d^n y = f^n x \,.\, dx^n$.

Aus den Gleichungen 1), 3), 5) und 6) folgt

7) $\frac{dy}{dx} = f'x$

8) $\frac{d^2y}{dx^2} = f''x$

9) $\frac{d^3y}{dx^3} = f'''x$

10) $\frac{d^n y}{dx^n} = f^n x.$

Bemerkungen.

1) Für den Anfänger bemerken wir noch, dass in den vorstehenden Formeln das Symbol „dx^n" die n^{te} Potenz von dx bezeichnen soll. Früher haben wir durch dasselbe Symbol das Differential von x^n bezeichnet. Es kann also möglicherweise ein Irrthum aus dem doppelten Sinne des Symbols „dx^n" entstehen. Will man denselben vermeiden, so kann man in den beiden verschiedenen Fällen sich resp. der Symbole $(dx)^n$ und $d(x^n)$ bedienen.

2) Man erkennt leicht, dass $\frac{d^n y}{dx^n}$ und $f^n x$ verschiedene Symbole für dieselbe Grösse sind. Die Verschiedenheit der Symbole entspricht einer Verschiedenheit in der Auffassung derselben Sache.

Beispiel. Wenn

$y = \sin x$, so ist

$dy = \cos x \, dx$, also $\frac{dy}{dx} = \cos x$

$d^2y = - \sin x \, dx^2$, also $\frac{d^2y}{dx^2} = - \sin x$

$d^3y = - \cos x \, dx^3$, also $\frac{d^3y}{dx^3} = - \cos x$

etc. etc.

Aufgabe. Man soll die n^{te} Abgeleitete von folgenden Functionen von x finden.

x^4, $x^{\frac{5}{2}}$ x^m, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $e^x . \sin x$.

Auflösung I.

$y = x^4$ giebt

$\frac{dy}{dx} = f'x = 4x^3$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 4 . 3 . x^2 = 12\ x^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = 4 . 3 . 2 . x = 24\ x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = f''''(x) = 4 . 3 . 2 . 1 = 24.$$

Alle folgenden Abgeleiteten sind in diesem Falle gleich 0.

Auflösung II.

$$y = f(x) = x^{\frac{5}{2}}, \text{ giebt}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{5}{2}\ x^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{5}{2} . \frac{3}{2}\ x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = \frac{5}{2} . \frac{3}{2} . \frac{1}{2}\ x^{-\frac{1}{2}}$$

. . .

. . .

. . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x) = \frac{5}{2} . \left(\frac{5}{2} - 1\right) . . \left(\frac{5}{2} - n + 1\right) x^{\frac{5}{2} - n}$$

Auflösung III.

$$y = f(x) = x^m, \text{ giebt}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = m\,x^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = m\ (m - 1)\ x^{m-2}$$

. . .

. . .

. . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = m\ (m - 1) \ldots (m - n + 1)\ x^{m-n}$$

Würde es einen wesentlichen Unterschied machen, ob in der letzten Aufgabe m gleich einer positiven ganzen Zahl ist oder nicht?

Auflösung IV.

$$y = f(x) = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = e^x$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x) = e^x.$$

Auflösung V.

$$y = f(x) = \sin x, \text{ giebt}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Auflösung VI.

$$y = f(x) = \cos x, \text{ giebt}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Auflösung VII.

$$y = f(x) = e^x \sin x, \text{ giebt}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$= e^x (\cos x + \sin x)$$

$$= e^x \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

. . .

. . .

. . .

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^n(x) = e^x (\sqrt{2})^n \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right).$$

§. 37.

Uebungsbeispiele.

1) $y = lx \quad ; \quad \frac{d^5y}{dx^5} = \frac{1.2.3.4}{x^5}$

2) $y = a^x \quad ; \quad \frac{d^5y}{dx^5} = (la)^5 a^x.$

3) $y = n \sin x; \quad \frac{d^my}{dx^m} = n \sin\left(x + m.\frac{\pi}{2}\right)$

4) $y = e^{ax} \quad ; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = a^4 e^{ax}$

5) $y = \frac{1+x}{1-x}; \quad \frac{d^5y}{dx^5} = \frac{240}{(1-x)^6}$

6) $y = fx = x.e^x; \quad f''''(x) = (x+4).e^x$

7) $F(x) = x^2 lx; \quad F'''''(x) = -1.2.x^{-3}$

8) $\varphi(x) = (1+x^2) \operatorname{arc tg} x; \quad \varphi'''(x) = \frac{4}{(1+x^2)^2}.$

VI. Capitel.

Mac Laurins oder Stirlings Reihe.

§. 38.

Entwickelung von Mac Laurins Reihe für zwei specielle Fälle.

Wenn irgend eine Function f(x) gegeben ist, die sich nach steigenden Potenzen von x entwickeln lässt, so kann man ganz allgemein schreiben:

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + ..$$

In dieser Gleichung nun sind A, B, C etc. constante Grössen, die einen bestimmten Werth haben; und unsere Aufgabe besteht darin, die Werthe dieser Coefficienten A, B, C etc. allgemein zu bestimmen.

Ehe wir indessen zu dieser allgemeinen Aufgabe übergehen, wollen wir zwei specielle Fälle voranschicken.

Aufgabe 1. Man soll den Ausdruck $(a + x)^4$ in eine Reihe entwickeln, welche nach steigenden Potenzen von x fortschreitet.

Auflösung. Wir setzen

1) $(a + x)^4 \quad = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + .$

Da nun diese Gleichung 1) für jeden Werth von x gelten soll, so erhalten wir durch Differentiation:

2) $4(a + x)^3 \quad = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + ..$

3) $3.4(a + x)^2 \quad = 1.2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + 4.5Fx^3 + ..$

4) $2.3.4(a + x) = 1.2.3.D + 2.3.4.Ex + 3.4.5Fx^2 + ..$

5) $1.2.3.4 \quad = 1.2.3.4.E + 2.3.4.5.Fx + ..$

6) $0 \quad = 1.2.3.4.5F + 2.3.4.5.6.Gx + ..$

Die folgenden Differentiationen geben auf der linken Seite 0, also wird die rechte Seite auch stets gleich 0 sein.

Da nun sämmtliche Gleichungen für jeden Werth von x gelten, so erhalten wir aus denselben., wenn wir $x = 0$ setzen:

$$7)\quad a^4 = A \qquad \text{oder } A = a^4$$
$$8)\quad 4a^3 = B \qquad \text{oder } B = 4a^3$$
$$9)\quad 3.4a^2 = 1.2.C \qquad \text{oder } C = 6a^2$$
$$10)\quad 2.3.4a = 1.2.3.D \qquad \text{oder } D = 4a$$
$$11)\quad 1.2.3.4 = 1.2.3.4.E \qquad \text{oder } E = 1.$$

Sämmtliche Coefficienten, welche auf E folgen, sind, wie man leicht erkennt, gleich Null.

Substituirt man nun die aus den Gleichungen 7) bis 11) gefundenen Werthe für A, B, C etc. in die Gleichung 1), so erhält man

$$12)\quad (a + x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4.$$

Bemerkung.

Bekanntlich gelangt man zu demselben Resultat, wenn man die wiederholte Multiplication, welche in dem Ausdrucke „$(x + a)^4$" angedeutet ist, ausführt.

Aufgabe 2. Man soll die Function

$$\sin (a + bx)$$

in eine Reihe verwandeln, die nach steigenden Potenzen von x fortschreitet.

Auflösung. Wir setzen

$$1)\quad \sin (a + bx) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + ..$$

Da nun diese Gleichung für jeden Werth von x gilt, so erhalten wir durch Differentiation:

$$2)\quad b \cos (a + bx) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + ..$$
$$3)\quad - b^2 \sin (a + bx) = 1.2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + ..$$
$$4)\quad - b^3 \cos (a + bx) = 1.2.3D + 2.3.4Ex + ..$$
$$5)\quad b^4 \sin (a + bx) = 1.2.3.4E + 2.3.4.5Fx + ..$$
$$6)\quad b^5 \cos (a + bx) = 1.2.3.4.5F + 2.3.4.5.6Gx + ..$$

Diese Gleichungen gelten wieder für jeden Werth von x. Setzen wir in dieselben $x = 0$, so ergiebt sich:

$$7)\ \sin a = A \qquad \text{oder } A = \sin a$$

$$8)\ b \cos a = B \qquad \text{oder } B = b \cos a$$

$$9)\ -b^2 \sin a = 1.2\,C \qquad \text{oder } C = -\frac{b^2 \sin a}{1.2}$$

$$10)\ -b^3 \cos a = 1.2.3\,D \qquad \text{oder } D = -\frac{b^3 \cos a}{3!}$$

$$11)\ b^4 \sin a = 1.2.3\,4\,E \qquad \text{oder } E = \frac{b^4 \sin a}{4!}$$

Wenn jetzt nach den Gleichungen 7) bis 11) die Werthe von A, B, C etc. in Gleichung 1) eingeschaltet werden, so erhält man

$$12)\ \sin(a + bx) = \sin a + b.\cos a.x - \frac{b^2 \sin a}{2!} x^2 - \frac{b^3 \cos a}{3!} x^3 +$$

§. 39.

Entwickelung von f(x) nach steigenden Potenzen von x.

Aufgabe. Man soll eine beliebige Function f(x) nach steigenden Potenzen von x entwickeln.

Auflösung. Aus der Gleichung

$$1)\ f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

folgt:

$$2)\ f'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 \ldots$$

$$3)\ f''(x) = 1.2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + 4.5Fx^3 \ldots$$

$$4)\ f'''(x) = 1.2.3D + 2.3.4Ex + 3.4.5Fx^2 \ldots$$

$$5)\ f''''(x) = 1.2.3.4E + 2.3.4.5Fx \ldots$$

Diese Gleichungen gelten für jeden Werth von x, deshalb folgt aus ihnen:

$$6)\ f(0) = A \qquad \text{oder } A = f(0)$$

$$7)\ f'(0) = B \qquad \text{oder } B = f'(0)$$

$$8)\ f''(0) = 1.2\,C \qquad \text{oder } C = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$9)\ f'''(0) = 1.2.3\,D \qquad \text{oder } D = \frac{f'''(0)}{3!}$$

$$10)\ f''''(0) = 1.2.3.4\,E \qquad \text{oder } E = \frac{f''''(0)}{4!}$$

Wenn man jetzt die Werthe von A, B, C etc. nach den Gleichungen 6) bis 10) in die Gleichung 1) einschaltet, so erhält man

$$11)\ f(x) = f(0) + x f'(0) + x^2 . \frac{f''(0)}{2!} + x^3 . \frac{f'''(0)}{3!} + ..$$

Diese Reihe ist bekannt unter dem Namen der Mac Laurinschen oder der Stirlingschen Reihe.

§. 40.

Reihe für e^x und a^x.

Aufgabe. Man soll die Function e^x und a^x in eine Reihe verwandeln, welche nach steigenden Potenzen von x fortschreitet.

Auflösung 1. Wenn in Gleichung 11) §. 39

1) $f(x) = e^x$, so ist $f(0) = 1$
2) $f'(x) = e^x$, „ $f'(0) = 1$
3) $f''(x) = e^x$, „ $f''(0) = 1$ etc.

Demnach erhalten wir mit Hülfe der Mac Laurinschen Reihe

$$\text{I. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ..$$

Auflösung 2. Wenn

1) $f(x) = a^x$, so ist $f(0) = 1$
2) $f'(x) = a^x . la$; $f'(0) = la$
3) $f''(x) = a^x (la)^2$; $f''(0) = la^2$ etc. etc.

Hieraus ergiebt sich nach Mac Laurins Reihe

$$\text{II. } a^x = 1 + x \frac{la}{1} + x^2 . \frac{(la)^2}{2!} + x^3 . \frac{(la)^3}{3!} + ..$$

§. 41.

Reihe für sin x und cos x.

Aufgabe. Man soll die Functionen sin x und cos x in Reihen verwandeln.

Auflösung 1. Setzen wir sin x = fx. so erhalten wir:

1) $f(x) = \sin x \quad ; \; f(0) = 0$

2) $f'(x) = \cos x \quad ; \; f'(0) = 1$

3) $f''(x) = -\sin x ; \; f''(0) = 0$

4) $f'''(x) = -\cos x ; \; f'''(0) = -1$

5) $f''''(x) = \sin x \quad ; \; f''''(0) = 0.$

Schalten wir nun die für f(0), f'(0), f''(0) etc. gefundenen Werthe in Mac Laurins Reihe ein, so erhalten wir

$$\text{III. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \text{ etc.}$$

Aufgabe. Man soll nach voriger Formel den sin 15° 25′ 20″ berechnen.

Auflösung. Die Bogenlänge eines Winkels von 15° 25′ 20′ für den Radius 1 ist gleich 0,2691686, demnach ist

$x = 0{,}2691686$, hieraus berechne man

$$\frac{x^3}{3!} = 0{,}0032503$$

$$\frac{x^5}{5!} = 0{,}00001177.$$

Daher ist

$$\sin 15^0\,25'\,20'' = 0{,}2691686 - 0{,}0032503 + 0{,}00001177$$
$$= 0{,}2659301.$$

Auflösung 2. Wenn f(x) = cos x, also f(0) = 1, so ist

1) $f'(x) = -\sin x ; \; f'(0) = 0$

2) $f''(x) = -\cos x ; \; f''(0) = -1$

3) $f'''(x) = \sin x \quad ; \; f'''(0) = 0$

5) $f''''(x) = \cos x \quad ; \; f''''(0) = 1$ etc.

Hieraus ergiebt sich weiter mit Hülfe der Stirlingschen Reihe

$$\text{IV. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \text{ etc.}$$

Aufgabe. Man soll nach der vorigen Formel den $\cos 15^0\ 25'\ 20''$ berechnen.

Auflösung. $x = 0{,}2691686$ und hieraus folgt

$$\frac{x^2}{2} = 0{,}0362259$$

$$\frac{x^4}{4!} = 0{,}0002187$$

$$\frac{x^6}{6!} = 0{,}0000005$$

Daher ist

$$\cos 15^0\ 25'\ 20'' = 1 - 0{,}0362259 + 0{,}0002187 - 0{,}0000005$$
$$= 0{,}9639923.$$

§. 42.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Wir haben gesehen in Gleichung I), §. 40, dass

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdot\cdot$$

Setzen wir nun ix statt x, so erhalten wir

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \text{ etc.}$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \text{ etc.}\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \text{etc.}\right)$$

Nun ist aber nach den Gleichungen III und IV, §. 41

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + = \cos x$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + = \sin x$$

deshalb ist

I. $e^{ix} = \cos x + i \sin x.$

Nun ist ferner

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$

deshalb folgt aus Gleichung I), wenn man $-x$ statt $+x$ setzt,

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x)$$

$$\text{II. } e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

§. 43.

Anwendung des vorigen Paragraphen.

Aufgabe. Man soll mit Hülfe der Formel für $e^{\pm ix}$ die bekannten goniometrischen Formeln für $\sin(x \pm y)$, $\cos(x \pm y)$ ableiten.

Auflösung. Aus Gleichung I) §. 42 folgt

$$1)\quad e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y),$$

ferner ist

$$2)\quad e^{i(x+y)} = e^{ix} . e^{iy}$$

weil nun $e^{ix} = (\cos x + i\sin x)$ und $e^{iy} = (\cos y + i\sin y)$,

so ist $\quad 3)\quad e^{i(x+y)} = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y).$

Hieraus ergiebt sich (Gleichung 1 und 3)

$$4)\quad \cos(x+y) + i\sin(x+y) = (\cos x + i\sin x).(\cos y + i\sin y),$$

oder durch Ausführung der Multiplication auf der rechten Seite dieser Gleichung

$$5)\quad \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$
$$= \cos x\cos y - \sin x\sin y + i\{\sin y\cos x + \sin x\cos y\}$$

Nun ist ferner bekannt (Hülfssatz 1), dass, wenn zwei complexe Grössen einander gleich sind, in ihnen die reellen Grössen und die imaginären Grössen unter sich gleich sind. Wenden wir dieses auf die Gleichung 5) an, so erhalten wir

$$6)\quad \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

$$7)\quad \sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x.$$

In ganz ähnlicher Weise erhalten wir

$$\sin(x-y) = \sin x . \cos y - \sin y . \cos x$$

$$\cos(x-y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y.$$

§. 44.

Fortsetzung.

Aufgabe. Man soll Formeln finden für den sinus und cosinus von 3 x, 4 x, m x.

Auflösung. $e^{imx} = (e^{ix})^m$. Nun ist aber

1) $e^{imx} = \cos mx + i \sin mx$

2) $(e^{ix})^m = (\cos x + i \sin x)^m$.

Hieraus folgt

3) $\cos mx + i \sin mx = (\cos x + i \sin x)^m$.

Die Gleichung 3) ist von Moivre.

Setzt man in diese Gleichung $m = 3$, so folgt

4) $\cos 3x + i \sin 3x = (\cos x + i \sin x)^3$, also

$$\cos 3x + i \sin 3x = \cos^3 x + 3 \cos^2 x \,.\, i \sin x + \\ + 3 \cos x \,.\, (i \sin x)^2 + (i \sin x)^3.$$

5) $\cos 3x + i \sin 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + \\ + i \{3 \cos^2 x \,.\, \sin x - \sin^3 x\}$

6) $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \,.\, \sin^2 x$

7) $\sin 3x = 3 \cos^2 x \,.\, \sin x - \sin^3 x$.

In ähnlicher Weise wendet man Gleichung 3) an, um sin 4 x, cos 4 x etc. zu finden.

§. 45.

Fortsetzung.

In §. 42 fanden wir

1) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

2) $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$.

Hieraus folgt

3) $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$

4) $e^{ix} + e^{-ix} = 2 i \sin x$.

Hieraus ergiebt sich wieder

5) $(2 \cos x)^m = (e^{ix} + e^{-ix})^m$

6) $(2 i \sin x)^m = (e^{ix} - e^{-ix})^m$.

Aufgabe 1. Man soll $\cos^4 x$ in eine Summe verwandeln, in der nur erste Potenzen von sinus und cosinus vorkommen.

Auflösung. Aus der Gleichung

1) $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$

folgt

2) $(2\cos x)^4 = (e^{ix} + e^{-ix})^4$, also

3) $16\cos^4 x = \begin{cases} e^{4ix} + 4e^{3ix}.e^{-ix} + 6e^{2ix}.e^{-2ix} \\ e^{-4ix} + 4e^{ix}.e^{-3ix}. \end{cases}$

Nun ist $e^{3ix}.e^{-ix} = e^{2ix}$ und $e^{2ix}.e^{-2ix} = 1$, also

4) $16\cos^4 x = (e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6.$

Nun haben wir aber gesehen, dass

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x,$$

demnach ist

5) $e^{4ix} + e^{-4ix} = 2\cos 4x$

6) $e^{2ix} + e^{-2ix} = 2\cos 2x.$

Hieraus erhalten wir mit Hülfe von Gleichung 4)

7) $16\cos^4 x = 2\cos 4x + 8\cos 2x + 6$

8) $\cos^4 x = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}.$

Aufgabe 2. Man soll in ähnlicher Weise

$$\sin^4 x,\ \sin^5 x,\ \sin^6 x,\ \cos^5 x \text{ und } \cos^6 x$$

umformen.

Bemerkung.

Ueber diesen sehr interessanten Gegenstand findet man mehr in den Lehrbüchern von Franke, Navier, Schlömilch, Meissel etc.

VII. Capitel.

Taylor's Reihe.

§. 46.

Entwickelung der Function F (a + x).

Aufgabe. Man soll eine beliebige Function von der Form $F(a + x)$ nach steigenden Potenzen von a oder x entwickeln.

Auflösung. Man setze

1) $F(a+x) = fx,$

so ist

2) $F'(a+x) = f'(x)$

3) $F''(a+x) = f''(x)$ etc.

Hieraus folgt, wenn man $x = 0$ setzt

4) $F(a) = f(0)$

5) $F'(a) = f'(0)$

6) $F''(a) = f''(0)$ etc.

Nun ist ferner nach §. 39

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \text{etc.}$$

Schalten wir hierin den Werth von

$$f(x),\ f(0),\ f'(0) \text{ etc.}$$

nach den vorigen Gleichungen ein, so erhalten wir

$$\text{I. } F(x+a) = F(a) + x\,F'(a) + \frac{x^2}{1.2} F''(a) = \text{etc.}$$

$$\text{II. } F(x+a) = F(x) + a\,F'(x) + \frac{a^2}{2!} F''(x) \text{ etc.}$$

Jede dieser beiden Reihen nennt man Taylor's Reihe

Bemerkung.

Setzt man in der vorstehenden Gleichung I) $a = 0$, so erhält man

$$\text{III. } F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \ldots$$

Diese Reihe ist aber nichts anderes als Mac Laurin's Reihe. Man erkennt hieraus, dass Mac Laurin's Reihe nur ein specieller Fall von Taylors Reihe ist (vergl. Hülfssatz 10, Bemerkung 2).

Der binomische Lehrsatz ist ebenfalls ein specieller Fall von Taylor's Lehrsatz. Setzt man nämlich:

$$F(a+x) = (a+x)^m$$

so erhält man

$$\text{IV. } (a+x)^m = a^m + m\,a^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}x^2 + \ldots$$

§. 47.

Reihe für l (a + x) und Anwendung derselben.

Aufgabe. Man soll mit Hülfe der Taylorschen Reihe die Function l(a + x) in eine Reihe verwandeln.

Auflösung. Wenn

$$f(x) = lx \qquad \text{so ist } f(a) = la$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{„} \quad f'(a) = \frac{1}{a}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{„} \quad f''(a) = -\frac{1}{a^2}$$

$$f'''(x) = +\frac{1 \,.\, 2}{x^3} \qquad \text{„} \quad f'''(a) = \frac{1 \,.\, 2}{a^3}$$

$$f''''(x) = -\frac{3!}{x^4} \qquad \text{„} \quad f''''(a) = -\frac{3!}{a^4} \text{ etc.}$$

Schalten wir nun die vorstehenden Werthe von (fa), f'(a) etc. in Gleichung I) §. 46 ein, so erhalten wir:

$$l(a + x) = la + x\frac{1}{a} + \frac{x^2}{2!}\left(-\frac{1}{a^2}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{1 \,.\, 2}{a^3}\right) - + \text{etc.}$$

$$\text{I. } l(a + x) = la + \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{a^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{a^4} \ldots$$

§. 48.

Fortsetzung.

Setzt man in Gleichung I) §. 47 a = 1, so erhält man

$$\text{I. } l(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \text{etc.}$$

Setzt man hierin — x statt x, so folgt

$$l(1 - x) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \frac{(-x)^4}{4} \text{ etc.}$$

$$\text{II } l(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \text{ etc.}$$

Aus den Gleichungen I und II folgt weiter

$$l(1+x) - l(1-x) = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right\}$$

also

$$\text{III. } l\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right\}$$

Setzt man nun

$$1)\ \frac{1+x}{1-x} = \frac{1+p}{p}$$

so folgt

$$2)\ p + px = 1 - x + p - px$$

$$3)\qquad x = \frac{1}{1+2p}.$$

Wenn jetzt die Werthe von $\frac{1+x}{1-x}$ und x aus den Gleichungen 1) und 3) in die Gleichung III eingesetzt werden, so erhält man

$$\text{IV. } l\frac{1+p}{p} = 2\left\{\frac{1}{1+2p} + \frac{1}{3(1+2p)^3} + \frac{1}{5(1+2p)^5} + \ldots\right\}$$

$$l(1+p) - lp = 2\left\{\frac{1}{1+2p} + \frac{1}{3(1+2p)^3} + \frac{1}{5(1+2p)^5} + \ldots\right\}$$

$$\text{V. } l(1+p) = lp + 2\left\{\frac{1}{1+2p} + \frac{1}{3(1+2p)^3} + \frac{1}{5(1+2p)^5} + \ldots\right\}$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit M, so erhält man

$$\text{VI. } M.l(1+p) = M.lp + 2M\left\{\frac{1}{1+2p} + \frac{1}{3(1+2p)^3} + \frac{1}{5(1+2p)^5} + \ldots\right\}$$

Erklärung. Unter M versteht man den Modulus des Logarithmus, nämlich den Factor, mit welchem der Logarithmus einer gegebenen Zahl für eine gegebene Basis multiplicirt werden muss, um den Logarithmus derselben Zahl für eine neue Basis zu bekommen.

Wenn die Basis der vorhandenen Log.-Tafel = b,
„ „ „ „ gesuchten „ = x
und die Zahl = a ist, so kann man hierfür den Modulus berechnen.

Nach der Erklärung des Modulus muss sein

$$1)\ M \,.\, \overset{b}{\log} a = \overset{x}{\log} a.$$

Man setze für $M . \overset{b}{\log} a = p$, so ist auch $\overset{x}{\log} a = p$

oder $a = b^{\frac{p}{M}}$ und ebenso $a = x^p$,

mithin ist $b^{\frac{p}{M}} = x^p$, d. h.

$b^{\frac{1}{M}} = x$ oder logarithmisch geschrieben

$\overset{b}{\log} x = \frac{1}{M}$ und daher

$$M = \frac{1}{\overset{b}{\log} x} \text{ (Modulus).}$$

Setzt man diesen Werth in Gleichung 1) ein, so erhält man

$$\overset{x}{\log} a = \frac{1}{\overset{b}{\log} x} . \overset{b}{\log} a.$$

Für das Briggische Logarithmensystem ist x = 10 und b = e, daher erhält man für dieses System die Reductionsformel $\lg a = \frac{1}{l.10} . l.a$ oder in Bezug auf Gleichung VI) ist $M . la = \lg a$, wenn $M = \frac{1}{l.10}$ bedeutet und daher ist auch

$$M . l(1 + p) = \lg(1 + p)$$
$$M . lp = \lg p$$

und wir erhalten aus Gleichung VI

$$\text{VII. } \lg(1 + p) = \lg p + 2M\left\{\frac{1}{1+2p} + \frac{1}{3(1+2p)^3} + \frac{1}{5(1+2p)^5} + \ldots\right\}$$

Bemerkung.

Die Formeln V und VII sind sehr geeignet, um mit ihnen resp. die natürlichen und gemeinen Logarithmen zu berechnen.

§. 49.

Berechnung der natürlichen Logarithmen.

Aufgabe. Man soll die natürlichen Logarithmen der Zahlen 1 bis 10 und den Modulus der gemeinen Logarithmen $M = \frac{1}{l\,10}$ bis auf 6 Decimalen genau berechnen.

Auflösung. Wegen der nothwendigen Additionen und wegen der Multiplication mit 2 müssen wir die Rechnung bis auf 7 Decimalstellen durchführen, um im Resultate eine Genauigkeit bis auf 6 Decimalstellen zu erzielen.

Wir haben zunächst

1) $l\,1 = 0.$

Ferner nach Gleichung V)

$$2)\ l\,2 = l\,1 + 2\left\{\frac{1}{(1+2)} + \frac{1}{3(1+2)^3} + \frac{1}{5(1+2)^5} + ..\right\}$$

oder

$$3)\ l\,2 = 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} + ..\right\}$$

Nun ist

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333333; \quad \frac{1}{3} = 0{,}3333333$$

$$\frac{1}{3^3} = 0{,}0370370; \quad \frac{1}{3\,.\,3^3} = 0{,}0123457$$

$$\frac{1}{3^5} = 0{,}0041152; \quad \frac{1}{5\,.\,3^5} = 0{,}0008230$$

$$\frac{1}{3^7} = 0{,}0004572; \quad \frac{1}{7\,.\,3^7} = 0{,}0000653$$

$$\frac{1}{3^9} = 0{,}0000508; \quad \frac{1}{9\,.\,3^9} = 0{,}0000056$$

$$\frac{1}{3^{11}} = 0{,}0000056; \quad \frac{1}{11\,.\,3^{11}} = 0{,}0000005$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} + ..\right) = 0{,}3465734$$

Hieraus folgt

$$2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+..\right\}=0{,}6931468$$

also nach Gleichung 3)

$$4)\ l2=0{,}6931468.$$

Wir finden ferner nach Gleichung V)

$$5)\ l3=l2+2\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}+..\right\}$$

Nun ist

$$\frac{1}{5}=0{,}2 \quad ; \quad \frac{1}{5}=0{,}2$$

$$\frac{1}{5^3}=0{,}008 \quad ; \quad \frac{1}{3.5^3}=0{,}0026667$$

$$\frac{1}{5^5}=0{,}00032 \quad ; \quad \frac{1}{5.5^5}=0{,}0000640$$

$$\frac{1}{5^7}=0.0000128; \quad \frac{1}{7.5^7}=0{,}0000018$$

$$\frac{1}{5^9}=0{,}0000005; \quad \frac{1}{9.5^9}=0{,}0000001$$

$$\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}+..\right\}=0{,}2027326$$

$$2\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}+..\right\}=0{,}4054652$$

$$l(2) \qquad = 0{,}6931468$$

$$6)\ l3 \qquad = 1{,}0986120$$

$$l4=2l2=2.0{,}6931468$$

$$7)\ l4=1{,}3862936$$

$$8)\ l5=l4+2\left\{\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+..\right\}$$

Nun ist

$$\frac{1}{9} = 0{,}1111111..; \frac{1}{9} \doteq 0{,}1111111$$

$$\frac{1}{9^3} = 0{,}0013717..; \frac{1}{3.9^3} = 0{,}0004572$$

$$\frac{1}{9^5} = 0{,}0000169..; \frac{1}{5.9^5} = 0{,}0000034$$

$$\frac{1}{9^7} = 0{,}0000002..; \frac{1}{7.9^7} = 0{,}0000000$$

$$\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + ..\right\} = 0{,}1115717$$

$$2\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + ..\right\} = 0{,}2231434$$

$$l4 = 1{,}3862936$$

also auch Gl. 8) $l5 = 1{,}6094370$

9) $l5 = 1{,}6094370$

10) $l6 = l2 + l3 = 0{,}6931468 + 1{,}0986120$

$l6 = 1{,}7917588$

11) $$l7 = l6 + 2\left\{\frac{1}{13} + \frac{1}{3.13^3} + \frac{1}{5.13^5} + ..\right\}$$

$$\frac{1}{13} = 0{,}0769231 \qquad \frac{1}{13} = 0{,}0769231$$

$$\frac{1}{13^3} = 0{,}0004552 \qquad \frac{1}{3.13^3} = 0{,}0001517$$

$$\frac{1}{13^5} + 0{,}0000027 \qquad \frac{1}{5.13^5} = 0{,}0000005$$

$$\left\{\frac{1}{13} + \frac{1}{3.13^3} + \frac{1}{5.13^5} + ..\right\} = 0{,}0770753$$

$$2\left\{\frac{1}{13} + \frac{1}{3.13^3} + \frac{1}{5.13^5}\right\} = 0{,}1541506$$

$$l6 = 1{,}7917588$$

$$l7 = 1{,}9459094$$

12) $l7 = 1{,}9459094$

$l8 = 3l2 = 3.0{,}6931468$

13) $l\,8 = 2{,}0794404$

$$l\,9 = 2\,l\,3 = 2 \,.\, 1{,}0986120$$

14) $l\,9 = 2{,}1972240$

$$\begin{aligned} l(10) &= l\,5 + l\,2 \\ l\,5 &= 1{,}6094370 \\ l\,2 &= 0{,}6931468 \\ \hline l\,2 + l\,5 &= 2{,}3025838 \end{aligned}$$

15) $l\,10 = 2{,}3025838.$

Jetzt ist

$$M = \frac{1}{l\,10} = \frac{1}{2{,}3025838}.$$

Das giebt

16) $M = 0{,}4342947.$

Berücksichtigen wir nun, dass die 7te Decimalstelle in den vorstehenden Rechnungen nicht mehr ganz zuverlässig ist, so ergiebt sich als Resultat unserer Rechnung

$$\begin{aligned} l\,1 &= 0 \\ l\,2 &= 0{,}693147 \\ l\,3 &= 1{,}098612 \\ l\,4 &= 1{,}386294 \\ l\,5 &= 1{,}609437 \\ l\,6 &= 1{,}791759 \\ l\,7 &= 1{,}945909 \\ l\,8 &= 2{,}079440 \\ l\,9 &= 2{,}197224 \\ l\,10 &= 2{,}302584 \\ M &= 0{,}434295 \end{aligned}$$

§. 50.

Berechnung der gemeinen Logarithmen.

Aufgabe. Man soll die gemeinen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100 auf 6 Decimalen genau berechnen.

Auflösung. In den vorigen Paragraphen haben wir die

natürlichen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 berechnet. Wenn wir dieselben mit M multipliciren, so finden wir aus ihnen die gemeinen Logarithmen der zugehörigen Zahlen.

Demnach ist

$$\begin{aligned}
\lg 2 &= Ml2 = 0{,}301030\\
\lg 3 &= Ml3 = 0{,}477121\\
\lg 4 &= Ml4 = 0{,}602060\\
\lg 5 &= Ml5 = 0{,}698970\\
\lg 6 &= Ml6 = 0{,}778151\\
\lg 7 &= Ml7 = 0{,}845098\\
\lg 8 &= Ml8 = 0{,}903090\\
\lg 9 &= Ml9 = 0{,}954243\\
\lg 10 &= 1{,}000000
\end{aligned}$$

Die Logarithmen der übrigen Zahlen finden wir nach §. 48 aus der Formel

$$\lg(1+p) = \lg p + 2M\left\{\frac{1}{1+2p} + \frac{1}{3(1+2p)^3} + \ldots\right\}$$

Hieraus folgt

$$\lg 11 = \lg 10 + 0{,}868589\left\{\frac{1}{21} + \frac{1}{3.21^3} + -\right\}$$

Nun ist

$$\frac{1}{21} = 0{,}0476190$$

$$\frac{1}{3.21^3} = 0{,}0000359$$

$$\frac{1}{5.21^5} = 0{,}0000000$$

$$\left\{\frac{1}{21} + \frac{1}{3.21^3} + \frac{1}{5.21^5} + \ldots\right\} = 0{,}047655$$

$$0{,}868589\left\{\frac{1}{21} + \frac{1}{3.21^3} + \ldots\right\} = 0{,}041393$$

also $\lg 11 = 1{,}041303$.

Wir finden ferner

$$\lg 12 = \lg 2 + \lg 6 = 1{,}079181$$

$$\lg 13 = \lg 12 + 0{,}868589 \left\{\frac{1}{25} + \frac{1}{3.25^3} + \ldots\right\}$$

$$\lg 13 = 1{,}113943$$

$$\lg 14 = \lg 7 + \lg 2 = 1{,}146128$$

$$\lg 15 = \lg 5 + \lg 3 = 1{,}176091$$

$$\lg 16 = 4 \lg 2 = 1{,}204120$$

$$\lg 17 = \lg 16 + 0{,}868589 \left\{\frac{1}{33} + \frac{1}{3.33^3} + \ldots\right\}$$

$$= 1{,}230449.$$

Wenn wir weiter gehen, so finden wir

$$\lg 50 = \lg 5 + \lg 10 = 1{,}698970$$

$$\lg 51 = \lg 3 + \lg 17 = 1{,}707570$$

$$\lg 52 = \lg 4 + \lg 13 = 1{,}716003$$

$$\lg 53 = \lg 52 + 0{,}868589 \left\{\frac{1}{105} + \frac{1}{3.105^3} + \ldots\right\}$$

$$\frac{1}{105} = 0{,}0095238$$

$$\frac{1}{3.105^3} = 0{,}0000003$$

$$\lg 53 = \lg 52 + 0{,}009524 . 0{,}868589$$

$$\lg 53 = 1{,}724276.$$

In ähnlicher Weise kann man nun die Logarithmen aller übrigen Zahlen bemerken.

Man wird leicht bemerken, dass unsere Formel

$$\lg(1+p) = \lg p + 2M \left\{\frac{1}{1+2p} + \frac{1}{3.(1+2p)^3} + \ldots\right\}$$

zur Berechnung der Logarithmen sehr geeignet ist, und dass sie um so stärker convergirt, je grösser die Zahlen sind, deren Logarithmen man berechnen soll; so z. B. ersieht man aus unserer Rechnung, dass bei einer Genauigkeit von 6 Decimalstellen man von der Zahl 53 an, in unserer Reihe alle Glieder, welche auf das Glied $\frac{1}{1+2p}$ folgen, vernachlässigen kann.

Bemerkung.

Wir empfehlen dem Anfänger sehr, die vorstehende Rechnung durchzuführen, um durch eigne Praxis zu erkennen, wie wichtig es ist, bei Anwendung von Reihen dieselben so **convergent** zu machen, wie **möglich.**

§. 51.

Berechnung der Tafeln für Sinus und Cosinus.

Aufgabe. Man soll Tafeln berechnen, welche die Sinus und Cosinus aller Winkel von 10′ zu 10′ bis auf 6 Decimalen enthalten.

Auflösung. Nach dem Taylorschen Lehrsatze ist

$$1)\ \sin(a+x) = \sin x + a \cdot \cos x - \frac{a^2}{1.2}\sin x - \frac{a^3}{3!}\cos x + ..$$

$$2)\ \cos(a+x) = \cos x - a \cdot \sin x - \frac{a^2}{1.2}\cos x + \frac{a^3}{3!}\sin x + ..$$

In diesen Formeln bedeuten a und x Bogenlängen (vergl. §. 23).

Nun sei a die Länge eines Bogens (beschrieben mit einem Radius = 1), dessen Centriwinkel = 10′ ist; x dagegen ein Multiplum von a. Demnach ist

$$3)\ a = \frac{10 \cdot \pi}{180 \cdot 60} = 0{,}0029089.$$

Hieraus ergiebt sich nach den Formeln 1) und 2), wenn x = 0 gesetzt wird

$$\sin a = a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \ldots.$$

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \ldots.$$

Setzt man in diese Reihen für a = 10′, so erhält man

$$4)\ \sin 10' = 0{,}0029089 - \frac{0{,}0029089^3}{3!} + ..$$

5) $\cos 10' = 1 - \frac{0{,}0029089^2}{2} = \ldots$, also

6) $\sin 10' = 0{,}0029089.$

7) $\cos 10' = 0{,}9999958$

Jetzt kann man zur Berechnung von sin 20′ und cos 20′ übergehen, indem man $x = 10'$ und $a = 10'$ setzt etc. etc.

Angenommen, wir wären in dieser Weise bis zum Sinus und Cosinus von 30° gekommen, so wären zunächst sin und cos von 30° 10′ zu berechnen. Zu dem Ende setzen wir in Gleichung 1) und 2)

$$x = \text{arc } 30^0 = \frac{30 \cdot \pi}{180} = 0{,}5235988$$

$$a = \text{arc } 10' = 0{,}0029089$$

$$\sin x = \sin 30^0 = 0{,}5$$

$$\cos x = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Hiernach erhalten wir

8) $\sin (30^0\, 10') = \sin 30^0 + \cos 30^0 \,.\, 0{,}0029089 - \sin 30^0 \,.\, \frac{0{,}029089^2}{2} - \ldots$

9) $\cos (30^0\, 10') = \cos 30^0 - \sin 30^0 \,.\, 0{,}0029089 - \cos 30^0 \,.\, \frac{0{,}029089^2}{2!} + - \ldots$

Führt man die Rechnung aus, so ergiebt sich

10) $\sin 30^0 10' = 0{,}502517$

11) $\cos 30^0 10' = 0{,}864567.$

In der hier angegebenen Weise kann man die Sinus und Cosinus aller übrigen Winkel berechnen.

§. 52.

Entwickelung von arc tg x in eine Reihe.

Es giebt Functionen, deren höhere Abgeleiteten sich nicht ohne Mühe berechnen lassen. Diese Functionen lassen sich deshalb auch nicht bequem durch directe Anwendung der

Taylorschen oder Mac Laurinschen Reihe in eine Reihe entwickeln. Aus diesem Grunde ist es oft ganz zweckmässig, das Verfahren zur Entwickelung in eine Reihe etwas zu modificiren.

Aufgabe. Man soll die Function arc tg x in eine Reihe entwickeln.

Auflösung. Nach der Methode der unbestimmten Coefficienten setzen wir zunächst

1) $\operatorname{arc\,tg} x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + ..$

Hier sind die Coefficienten A, B, C etc. constante (von x unabhängige) Grössen, deren Werth erst noch bestimmt werden soll.

Durch Differentiation finden wir aus Gleichung 1)

2) $\frac{1}{1+x^2} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + ..$

Ferner ist nach §. 46 Gleichung IV), wenn man $m = -1$ setzt

3) $\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + -$ etc.

Durch Combination der Gleichungen 2) und 3) findet man ferner

4) $B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ..$

Setzt man nun in Gleichung 1) $x = 0$, so folgt

5) $A = 0$.

Ferner folgt aus Gleichung 4) mit Anwendung von No. 8 der Hülfssätze aus der niederen Analysis

6) $B = 1$

7) $2C = 0$; $C = 0$

8) $3D = -1$; $D = -\frac{1}{3}$

9) $4E = 0$; $E = 0$

10) $5F = 1$; $F = \frac{1}{5}$ etc. etc.

Schalten wir nun die für A, B, C etc. gefundenen Werthe in die Gleichung 1) ein, so ergiebt sich

$$11)\ \text{arc tg}\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

§. 53.

Entwickelung des Werthes von π mit Hülfe der Reihe von arc tg x.

Man kann die letzte Gleichung des vorigen Paragraphen benutzen, um den Werth von π zu ermitteln.

Setzt man nämlich $x = 1$, so ist

$$\text{arc tg}\,x = \frac{\pi}{4}\ (= \text{arc}\ 45^0)$$

und wir erhalten

$$1)\ \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots$$

Diese Reihe ist Leibnitzens Reihe.

Aus Gleichung 1) folgt weiter

$$2)\ \frac{\pi}{4} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{2}{15} - \frac{2}{63} - \frac{2}{143} - \dots$$

$$3)\ \frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \dots$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99} + \dots$$

Die Reihen in den Gleichungen 1) bis 3) sind offenbar convergent, indem aus ihnen hervorgeht, dass $\frac{\pi}{4}$ zwischen $\frac{2}{3}$ und 1 liegt, und man durch sie den Werth von $\frac{\pi}{4}$ in Grenzen einschliessen kann, die einander so nahe liegen als man nur will. Man erkennt jedoch auch sehr leicht, dass die Rechnung sehr langwierig werden würde, wenn man nach

einer dieser Reihen den Werth von $\frac{\pi}{4}$ nur auf 6 Decimalen genau berechnen wollte. Man hat sich deshalb bemüht, für π $\left(\text{oder } \frac{\pi}{4}\right)$ Reihen aufzustellen, die stärker convergiren als die Reihen in den Gleichungen 1) bis 3).

Setzt man z. B.

$$4)\ \operatorname{tg} u = \tfrac{1}{2};\ u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}$$

$$5)\ \operatorname{tg} v = \tfrac{1}{3};\ v = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tfrac{1}{3},$$

so ist

$$6)\ \operatorname{tg}(u+v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \,.\, \operatorname{tg} v} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{3}}.$$

Weil nun $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{3}} = 1$, so folgt aus Gleichung 6)

$$7)\ \operatorname{tg}(u+v) = 1$$

$$8)\ u + v = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1$$

oder

$$9)\ u + v = \frac{\pi}{4}$$

Setzt man in Gleichung 9) für u und v ihre Werthe nach den Gleichungen 4) und 5), so folgt

$$10)\ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tfrac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

oder

$$11)\ \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tfrac{1}{3}.$$

Setzt man in diese Gleichung den Werth von arc tg $\frac{1}{2}$ und arc tg $\frac{1}{3}$ nach §. 52 Gleichung 11), so erhält man

$$12)\ \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\,.\,2^3} + \frac{1}{5\,.\,2^5} - \ldots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} - \ldots\right)$$

$$14)\ \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} \ldots\right)$$

Diese Reihe ist bekannt unter dem Namen Eulers Reihe. Man erkennt, dass sie schon viel stärker convergirt als Leibnitzens Reihe .

Machin hat eine Reihe für $\frac{\pi}{4}$ aufgestellt, die noch stärker convergirt. Er setzte zunächst

10) $\operatorname{tg} u = \frac{1}{5}$.

Hieraus folgt nach der Formel $\operatorname{tg} 2u = \frac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u}$

11) $\operatorname{tg} 2u = \frac{2 . \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$

12) $\operatorname{tg} 4u = \frac{2 . \frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$.

Es ist demnach $\operatorname{tg} 4u > 1$, also $4u > \frac{\pi}{4}$.

Nun setzte Machin weiter

13) $4u = \frac{\pi}{4} + v$ oder

$$4u - v = \frac{\pi}{4} \text{ und auch}$$

$$v = 4u - \frac{\pi}{4}$$

Hieraus folgt 14) $\operatorname{tg} v = \operatorname{tg}\left(4u - \frac{\pi}{4}\right)$

$$= \frac{\operatorname{tg} 4u - 1}{\operatorname{tg} 4u + 1}$$

und weil $\operatorname{tg} 4u = \frac{120}{119}$, so ist

$$\operatorname{tg} v = \frac{\frac{120}{119} - 1}{\frac{120}{119} + 1} = \frac{1}{239}$$

also $v = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}$, und weil

$$4\,u = 4 \text{ arc tg } \frac{1}{5}$$

---

so ist 15) $4\,u - v = 4 \text{ arc tg } \frac{1}{5} - \text{arc tg } \frac{1}{239}$

und daher ist

$$16)\quad \frac{\pi}{4} = 4\,u - v = 4 \text{ arc tg} \frac{1}{5} - \text{arc tg } \frac{1}{239}$$

$$17)\quad \frac{\pi}{4} = 4\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} \cdots\right\} - \left\{\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} \cdots\right\}$$

Aufgabe. Man soll den Werth der Zahl π bis auf 6 Decimalen genau ermitteln.

Auflösung. Wir wenden Machins Formel in Gleichung 17) an, und führen die Rechnung bis auf 7 Decimalen durch. Wir erhalten dann

$$\frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$\frac{1}{3.5^3} = 0{,}0026667$$

$$\frac{1}{5.5^5} = 0{,}000064$$

$$\frac{1}{7.5^7} = 0{,}0000018$$

$$\frac{1}{239} = 0{,}0041841$$

Hieraus ergiebt sich

$$4\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7}\right\} = 0{,}7895824$$

$$\frac{1}{239} = 0{,}0041841.$$

Subtrahiren wir diese beiden Gleichungen von einander so folgt nach Gleichung 7)

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}7853983,$$

also

$$18)\quad \pi = 3{,}1415932$$

bis auf 6 Decimalstellen genau.

§. 54.
Entwickelung der Reihe für arc sin x.

Aufgabe. Man soll die Function arc sin x in eine Reihe verwandeln, die nach steigenden Potenzen von x fortschreitet.

Auflösung. Wir setzen

1) $\arcsin x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots$

dann erhalten wir durch Differentiation

2) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots$

Nun ist nach §. 46 Gleichung IV

3) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + .$

Hieraus folgt

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots$$

also nach Hülfsatz 8

4) $B = 1 \quad ; \quad B = 1$

5) $2C = 0 \quad ; \quad C = 0$

6) $3D = \frac{1}{2} \quad ; \quad D = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}$

7) $4E = 0 \quad ; \quad E = 0$

8) $5F = \frac{1.3}{2.4}; \quad F = \frac{1}{5}.\frac{1.3}{2.4}$

etc. etc.

Setzen wir weiter in Gleichung 1) $x = 0$, so erhalten wir

9) $A = 0$.

Wenn nun die Werthe von A, B, C etc. in die Gleichung 1) eingeschaltet werden, so erhält man

10) $\arcsin x = x + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} + \ldots$

Man kann diese Reihe ebenfalls benutzen, um den Werth von π zu berechnen. Setzen wir nämlich

$$x = \frac{1}{2}, \text{ so ist } \arcsin x = \text{arc}\,(30^0) = \frac{\pi}{6}.$$

Demnach ist

$$11)\ \frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.2^3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5.2^5}+\frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7}+\ldots.$$

§. 55.

Bemerkungen zu den vorhergehenden Sätzen.

Bei den vorhergehenden Entwickelungen drängen sich einige sehr wichtige Sätze auf, welche wir noch besonders hervorheben wollen.

1) Die Entwickelung der Functionen nach dem Taylorschen und Mac Laurinschen Lehrsatze giebt im Allgemeinen unendliche Reihen.

Die einzige Ausnahme bietet die Function $(a+x)^m$ und resp. x^m, wenn m eine **positive ganze** Zahl ist.

2) Der Taylorsche und Mac Laurinsche Lehrsatz können nur dann angewendet werden, wenn die Reihen, die sie liefern, convergent sind, da durch eine divergente Reihe ein bestimmter Werth nicht ausgedrückt werden kann.

3) Demnach wird die Taylorsche und Mac Laurinsche Reihe besonders in den Fällen unbrauchbar, in denen die Differentialquotienten **unendlich gross** werden.

4) Aus dem Hülfssatze 7) folgt, dass man in der convergent vorausgesetzten Reihe $f(a+x)=fx+a.f'x+\frac{a^2}{1.2}.f''x+\ldots$ die Grösse a stets **so klein** annehmen kann, dass der absolute Werth jedes Gliedes, welches **nicht gleich** Null ist, grösser ist als die Summe aller folgenden Glieder.

§. 56.

Fortsetzung.

Bei den Anwendungen, welche wir in §. 49 bis §. 54 von der Taylorschen Reihe gemacht haben, war es leicht in **jedem speciellen** Falle anzugeben, bis auf wie viele Decimalen unsere Rechnung richtig war. Wir wussten also jedes Mal, wie gross der Fehler **höchstens** sein konnte, der **dadurch**

entstand, dass wir nur eine **beschränkte** Anzahl von Gliedern berücksichtigten.

Das sogenannte **Restglied** der Taylorschen und Mac Laurinschen Reihe giebt nun ganz **allgemein** an, wie gross **höchstens** der Fehler sein kann, der dadurch entsteht, dass man bei Anwendung der Taylorschen Reihe nur eine beschränkte Anzahl von Gliedern berücksichtigt. Wir wollen deshalb in den folgenden Paragraphen das Restglied der Taylorschen Reihe zu ermitteln suchen.

Für den Anfänger bemerken wir indessen, dass er — ohne den Zusammenhang zu stören — die Paragraphen, welche von dem Restgliede handeln, überschlagen darf.

§. 57.

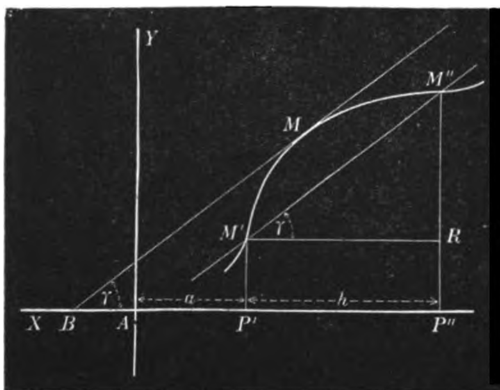
Das Restglied von Taylors und Mac Laurins Reihe.

Lehrsatz. Wenn eine Function $y = f(x)$ und ihre erste Abgeleitete für alle Werthe von x, welche zwischen $x = a$ und $x = a + h$ liegen, **continuirlich** bleibt, so ist

$$f(a+h) = fa + h f'(a + \theta h),$$

wo θ eine Zahl bedeutet, welche einen ganz bestimmten Werth hat, von der man aber nur weiss, dass ihr Werth **zwischen 0 und + 1 liegt.**

Fig. 7.



für M ist $x = a + \theta h$

Beweis. Wir nehmen an, dass Fig. 7 der geometrische Ausdruck unserer Function $y = f(x)$ sei, und ferner, dass die Punkte M' und M'' resp. den Abscissen $x = a$ und $x = a + h$ entsprechen.

Dann ist

1) $f(a+h) = M''P'' = P''R + RM''$.

Wenn nun fx und $f'(x)$ zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = a + h$ **continuirlich** ist, so giebt es zwischen den Punkten M' und M'' **wenigstens** einen Punkt, dessen Tangente BM parallel der Sehne $M'\,M''$ ist. Setzen wir dann für den Punkt M die Abscisse $x = a + \theta h$, so ist

$$2)\quad \operatorname{tg}\gamma = f'(a + \theta h).$$

$$\text{Nun ist}\ \begin{cases} P''R = M'P' = f(a) \\ M''R = h \operatorname{tg}\gamma = h f'(a + \theta h), \end{cases}$$

also nach Gleichung 1)

$$3)\quad f(a + h) = f(a) + h f'(a + \theta h) \quad \text{w. z. b. w.}$$

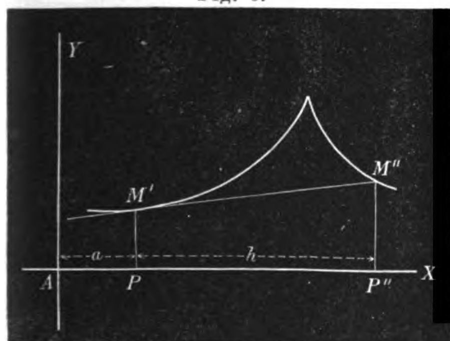
Bemerkungen.

1) Wäre $f(x)$ oder $f'x$ zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = a + h$ nicht continuirlich, so wäre nicht **nothwendig**

$$f(a + h) = fa + h f'(a + \theta h).$$

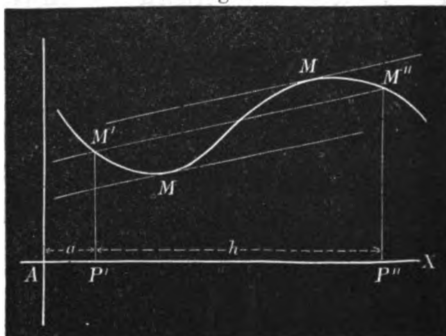
Um dies zu erkennen, nehme man an, dass Fig. 8 die geometrische Darstellung von $y = f(x)$ sei. Man sieht dann sofort, dass es zwischen den Punkten M' und M'' keinen Punkt (M) auf der Curve giebt, dessen Tangente parallel der Sehne $M'\,M''$ ist etc.

Fig. 8.



2) Aus Fig. 9 ersieht man, dass es unter Umständen mehrere Punkte (M) zwischen den Punkten M' und M'' geben kann, für welche die Berührende parallel der Sehne $M'\,M''$ ist, und dass also auch mehrere Werthe von θ zwischen 0 und + 1 existiren können, für welche $f(a + h) = fa + hf'(a + \theta h)$ ist.

Fig. 9.



3) Analoge Bemerkungen lassen sich zu den §§. 58 bis 60 machen.

4) Der aufmerksame Leser wird finden, dass §. 57 ein **specieller** Fall von §. 60 ist.

§. 58.
Fortsetzung.

In dem vorigen Paragraphen haben wir gesehen, dass

$$1)\ f(a+h)-fa = hf'(a+\theta h),$$

wenn $f'(x)$ und $f'x$ zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = a+h$ **continuirlich** bleiben. Setzen wir nun in Gleich. 1) $a = 0$, so folgt

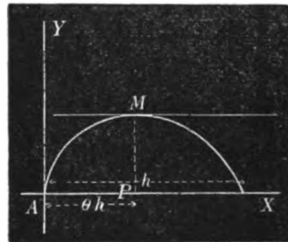
$$2)\ fh - f0 = hf'(\theta h).$$

Setzen wir ferner $fh = 0$ und $f0 = 0$, so ist

$$3)\ 0 = hf'(\theta h),$$

d. h. wenn fx zu Null wird, sowohl wenn man x = 0 setzt, als auch wenn man x = h setzt; und wenn ausserdem fx und f'x zwischen den Grenzen x = 0 und x = h continuirlich bleiben, so ist für einen Werth von θ zwischen 0 und + 1, $f'(\theta h) = 0$ (siehe Fig. 10).

Fig. 10.



§. 59.
Fortsetzung.

Lehrsatz. Wenn eine Function von x, z. B. fx, nebst ihren n ersten Abgeleiteten zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = h$ **continuirlich** bleibt, und wenn ausserdem fx und ihre $n-1$ ersten Abgeleiteten **verschwinden**, wenn $x = 0$ wird, so ist $fh = \frac{h^n}{n!} f^n(\theta h)$.

Beweis. Setzen wir zunächst

$$1)\ Fx = h^n fx - x^n fh, \text{ so ist}$$
$$2)\ F'x = h^n f'x - n.x^{n-1} fh$$
$$3)\ F''x = h^n f''x - n.(n-1)x^{n-2} fh$$
$$4)\ F'''x = h^n f'''x - n.(n-1).(n-2)x^{n-3} fh$$

. . .

. . .

$$5)\ F^n x = h^n f^n x - n!f(h).$$

Nun erkennt man sehr leicht, dass in Gleichung 1) Fx verschwindet, wenn man resp. $x = h$ und 0 setzt, also ist (§. 58) $F'x = 0$ für einen Werth von x, welcher zwischen $x = 0$ und $x = h$ liegt. Nennen wir diesen Werth h', und berücksichtigen wir, dass nach der Voraussetzung $f'(x)$ gleich Null ist, wenn $x = 0$, so ergiebt sich, dass in Gleichung 2) $F'x$ zu Null wird, wenn man x resp. gleich h' und 0 setzt. Hieraus folgt wieder nach §. 58, dass $F''x$ gleich Null ist für einen Werth von x, welcher zwischen 0 und h' liegt. Diesen Werth nennen wir h_2 etc. etc.

Wenn wir in dieser Weise fortschliessen, so gelangen wir zuletzt zu dem Resultat, dass $F^n x$ **gleich Null** ist, für einen Werth von x, der zwischen 0 und h_{n-1} liegt, der also zwischen 0 und h liegen muss. Bezeichnen wir diesen Werth von x durch θh, so folgt aus Gleichung 5)

$$6)\quad 0 = h^n f^n(\theta h) - n!\, fh$$

$$7)\quad n!\, fh = h^n f^n(\theta h)$$

$$8)\quad fh = \frac{h^n}{n!} f^n(\theta h).$$

Bemerkung.

Wir wiederholen, dass in der vorstehenden Entwickelung fx nebst ihren Abgeleiteten bis zur n^{ten} Ordnung inclusive als **continuirlich** zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = h$ vorausgesetzt ist.

§. 60.
Fortsetzung.

In §. 58 fanden wir

$$1)\quad f(x+h) = fx + hf'(x + \theta h).$$

Setzen wir $\theta h = h'$, so folgt

$$2)\quad f(x+h) - fx = hf'(x+h')$$

$$3)\quad f(x+h) - fx - hf'x = h\{f(x+h') - f'(x)\}$$

Setzen wir nun

$$4)\quad h\{f'(x+h') - f'x\} = \varphi h,$$

so folgt aus Gleichung 3)

$$5)\quad f(x+h) - fx - hf'x = \varphi h.$$

Differentiiren wir diese Gleichung zweimal nach h, so finden wir

$$6)\ f'(x+h) - f'x = \varphi' h$$

$$7)\ f''(x+h) = \varphi'' h.$$

Aus den Gleichungen 5) und 6) sehen wir nun, dass φh und $\varphi' h$ zu Null werden, wenn h zu Null wird, und ausserdem sehen wir, dass diese Functionen (φh und $\varphi' h$) zwischen den Grenzen 0 und h continuirlich bleiben, unter der Voraussetzung, dass f(x) und f'(x) zwischen den Grenzen x und x + h continuirlich bleiben. Bezeichnet jetzt h_2 eine Zahl, die zwischen 0 und h liegt, so folgt aus §. 59, Gleichung 8)

$$8)\ \varphi h = \frac{h^2}{1.2} \varphi'' h_2,$$

also nach Gleichung 7)

$$9)\ \varphi h = \frac{h^2}{1.2} f''(x+h_2).$$

Schalten wir diesen Werth von φh in Gleichung 5) ein, so ergiebt sich

$$10)\ f(x+h) - fx - h f'x = \frac{h^2}{1.2} f''(x+h_2).$$

Hieraus folgt weiter

$$11)\ f(x+h) - fx - h f'x - \frac{h^2}{1.2} f''x = \frac{h^2}{1.2} f''(x+h_2) - \frac{h_2}{1.2} f''x$$

$$12)\ f(x+h) - fx - h f'x - \frac{h^2}{1.2} f''x = \frac{h^2}{1.2} \{f''(x+h_2) - f''x\}$$

Setzen wir

$$13)\ \frac{h^2}{1.2} \{f''(x+h^2) - f''x\} = \psi h,$$

so folgt aus Gleichung 12)

$$14)\ f(x+h) - fx - h f'x - \frac{h^2}{1.2} f''x = \psi h.$$

Differentiiren wir nach h, so erhalten wir

$$15)\ f'(x+h) - f'x - h f''x = \psi' h$$

$$16)\ f''(x+h) - f''x = \psi'' h$$

$$17)\ f'''(x+h) = \psi''' h.$$

Nun ist wieder nach §. 59 Gleichung 8)

18) $\psi h = \frac{h^3}{3!} \psi''' h_3$, also

19) $\psi h = \frac{h^3}{3!} f'''(x + h_3)$.

Setzen wir den Werth von ψh in Gleichung 14) ein, so folgt

20) $f(x+h) - fx - hf'x - \frac{h^2}{1.2} f''x = \frac{h^3}{3!} f'''(x + h_3)$

21) $f(x+h) = fx + hf'x + \frac{h^2}{1.2} f''x + \frac{h^3}{3!} f'''(x + h_3)$

Wenn man in ähnlicher Weise wie oben fortschliesst, so gelangt man zu der Gleichung

22) $f(x+h) = fx + hf'x + \frac{h^2}{1.2} f''x + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(x + h_n)$.

Weil h_n zwischen 0 und h liegt, so kann man h_n durch θh bezeichnen. Wir erhalten dann

23) $$f(x+h) = fx + hf'x + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}x + \frac{h^n}{n!} f^n(x + \theta h).$$

Der Ausdruck $\frac{h^n}{n!} f(x + \theta h)$ heisst das **Restglied** der Taylorschen Reihe.

Setzt man in Gleichung 23) $x = 0$, so folgt

24) $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{1.2} f''(0) + \ldots \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0) + h^n f^n(\theta h)$

Der Ausdruck $\frac{h^n}{n!} f^n(\theta h)$ heisst das **Restglied** von Mac Laurius Reihe.

Bemerkungen.

1) Mit Hülfe des Restgliedes ist die Reihe für $f(x + h)$ oder $f(h)$ in eine geschlossene Reihe verwandelt.

2) Es leuchtet ein, dass sich die Convergenz der Reihe sehr bequem

nach dem Restgliede beurtheilen lässt. Die Reihe ist nämlich convergent, wenn der Werth des Restgliedes $\frac{h^n}{n!} . f^n(x+\theta h)$ resp. $\frac{h^n}{n!} . f^n(\theta h)$ für hinreichend grosse Werthe von n kleiner gemacht werden kann, wie jede beliebige Zahl.

3) Wenn G der grösste Werth und K der kleinste Werth ist, den der Ausdruck $\frac{h^n}{n!} f^n(x+\theta h)$ resp. $\frac{h^n}{n!} f^n(\theta h)$ einnimmt, wenn θ den Werth von 0 bis + 1 durchläuft, so liegt der Werth des Restgliedes zwischen K und G.

4) Will man den Werth von $f(x+h)$ nach der Taylorschen Reihe

$$f(x+h) = fx + hf'x + \frac{h^2}{1.2}f''x + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)}f^{n-1}(x) + \frac{h^n}{n!}f^n(x+\theta h)$$

annähernd berechnen, und dabei alle Glieder vernachlässigen, die auf das Glied $\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)$ folgen, so muss nach Bemerkung 3) der hierdurch entstandene Fehler zwischen K und G liegen.

5) Addirt man nun aber noch zu der Summe aller ersten Glieder bis zum Gliede $\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x)$ inclusive die Grösse $\frac{G+K}{2}$, so kann der Fehler höchstens $\frac{G-K}{2}$ sein.

6) Den Anfänger machen wir noch darauf aufmerksam, dass unseren Untersuchungen über das Restglied der Taylorschen und Mac Laurinschen Reihe **die Voraussetzung zum Grunde liegt**, dass $f(x)$ nebst allen in Frage kommenden abgeleiteten Functionen von $f(x)$ resp. zwischen den Grenzen x und $(x+h)$ continuirlich sind.

8) Aus diesem Grunde erklärt es sich, dass einige Functionen, obgleich sie einen ganz bestimmten Werth haben, sich für gewisse Fälle nicht nach der Taylorschen Reihe entwickeln lassen.

Ist z. B. $f(x) = \frac{1}{(x-a)^m}$ und ist m eine positive ganze Zahl, so lässt sich der Werth von $f(x+h) = \frac{1}{(x-a+h)^m}$ nicht mit Hülfe der Taylorschen Reihe nach steigenden Potenzen von h entwickeln, wenn man $x = a$ setzt. Wir erhalten nämlich aus der allgemeinen Reihe

$$f(x+h) = fx + hf'x + \frac{h^2}{1.2}f''x + \ldots$$

in unserem Falle die Reihe

$$f(x+h) = \frac{1}{(x-a)^m} - h . \frac{m}{(x-a)^{m+1}} + \frac{h^2}{1.2} . \frac{m.(m+1)}{(x-a)^{m+2}} - + \ldots$$

Setzt man hierin $x = a$, so werden sämmtliche Summenden auf der rechten

Seite ∞ mit abwechselnden Zeichen $+ -$. Der auf diese Weise gefundene Ausdruck für $f(x+h)$ ist also unbestimmt, während der Werth desselben in diesem Falle ein ganz bestimmter ist, nämlich $\frac{1}{(a-a+h)^m} = \frac{1}{h^m}$.

8) Es giebt noch mehrere Fälle, in denen eine Function für einen bestimmten Werth von x sich nicht nach Taylors Reihe entwickeln lässt, so z. B. lässt sich $\lg(x+h)$ nicht entwickeln, wenn $x=0$ wird.

VIII. Capitel.

Unbestimmte Formen.

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

§. 61.

Die Form $\frac{0}{0}$.

Wenn in dem Bruche $\frac{Fx}{fx}$ Zähler und Nenner dadurch zu Null werden, dass man $x = a$ setzt, so wird $\frac{Fa}{fa} = \frac{0}{0}$. Um nun den Werth von $\frac{Fa}{fa} = \frac{0}{0}$ zu ermitteln, betrachten wir zunächst den Bruch $\frac{F(a+h)}{f(a+h)}$.

Unter der Voraussetzung, dass in diesem Bruche sich Zähler und Nenner nach Taylors Satz entwickeln lassen schreiben wir dann

$$1)\ \frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{Fa + hF'a + \frac{h^2}{1.2}F''(a) + \ldots\ldots}{fa + h\,f'a + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \ldots\ldots}$$

Da nun

$$Fa = 0 \text{ und}$$
$$fa = 0,$$

so folgt aus Gleichung 1)

$$2)\ \frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{h.F'a + \frac{h^2}{1.2}F''(a)}{h.f'a + \frac{h^2}{1.2}\ f''(a)} + \dots$$

Dividirt man auf der rechten Seite unserer Gleichung Zähler und Nenner durch h, so ergiebt sich

$$3)\ \frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{F'a + \frac{h}{1.2}F''(a) + \dots}{f'(a) + \frac{h}{1.2}f''(a) + \dots}$$

Wenn nun $F'a$ und $f'a$ nicht beide gleich Null sind, so setze man $h = 0$: und es ergiebt sich

$$4)\ \frac{F(a)}{f(a)} = \frac{F'a}{f'(a)}.$$

Wenn dagegen $f'a$ und $F'a$ beide gleich Null sind, so erhalten wir aus Gleichung 1)

$$5)\ \frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{\frac{h^2}{1.2}F''(a) + \frac{h^3}{3!}F'''(a) + \dots}{\frac{h^2}{1.2}\ f''(a) + \frac{h^3}{3!}\ f'''(a) + \dots}$$

Dies giebt

$$6)\ \frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{F''a + \frac{h}{3}F'''a + \dots}{f''a + \frac{h}{3}\ f'''a + \dots}$$

Wenn nun auf der rechten Seite der Gleichung $F''a$ und $f''a$ nicht beide Null, so setzen wir $h = 0$, und erhalten dann einen **bestimmten** Ausdruck für $\frac{F(a)}{f(a)}$, nämlich

$$7)\ \frac{Fa}{f(a)} = \frac{F''(a)}{f''(a)}.$$

In ähnlicher Weise kann man weiter gehen, wenn $F''(a)$ und $f''(a)$ beide zu Null werden.

§. 62.

Fortsetzung.

Aufgabe 1. Wie gross ist der Bruch $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$, wenn $x = a$ wird?

Auflösung. Wenn $x = a$ wird, so erhält der Bruch $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ die Form $\frac{0}{0}$.

Nun setzen wir

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{F(x)}{f(x)},$$

so ist

$$\frac{F'x}{f'x} = \frac{2x}{1},$$

also wird

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a, \text{ wenn } x = a \text{ ist.}$$

Aufgabe 2. Wie gross ist der Bruch $\frac{x - \sin x}{x^3}$, wenn $x = 0$ wird.

Auflösung. Wir setzen $\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{Fx}{fx}$, dann ist

$$\frac{F'x}{f'x} = \frac{1 - \cos x}{3x^2}, \text{ dies giebt } \frac{0}{0}, \text{ wenn } x = 0$$

$$\frac{F''(x)}{f''(x)} = \frac{\sin x}{6x}, \text{ dies giebt } \frac{0}{0}, \text{ wenn } x = 0$$

$$\frac{F'''(x)}{f'''(x)} = \frac{\cos x}{6}, \text{ dies giebt } \frac{1}{6} \text{ für } x = 0.$$

Wir haben also

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}, \text{ wenn } x = 0.$$

§. 63.

Die Form $\frac{\infty}{\infty}$.

Ein Bruch von der Form $\frac{\infty}{\infty}$ lässt sich leicht auf die Form $\frac{0}{0}$ zurückführen.

Ist z. B. $\frac{Fa}{fa} = \frac{\infty}{\infty}$, so setzen wir

$$1)\quad \frac{Fa}{fa} = \frac{(fa)^{-1}}{(F\,a)^{-1}} = \frac{0}{0}$$

und hieraus finden wir nach §. 61, 4)

$$2)\quad \frac{Fa}{fa} = \frac{(fa)^{-1}}{(F\,a)^{-1}} = \frac{0}{0} = \frac{-f'a.\ (fa)^{-2}}{-F'a.\ (Fa)^{-2}}$$

$$3)\quad \frac{Fa}{fa} = \frac{f'a\ (fa)^{-2}}{F'a\,(F\,a)^{-2}}.$$

Multipliciren wir beide Seiten mit $\frac{(fa)^2}{(Fa)^2}$, so ergiebt sich

$$4)\quad \frac{F(a)\,(fa)^2}{f(a)(F\,a)^2} = \frac{f'a}{F'(a)}$$

$$5)\quad \frac{F(a)}{f(a)} = \frac{F'(a)}{f'(a)}.$$

In dem Falle, dass $F'a$ und $f'a$ beide zu Null oder ∞ würden, erhielte man $\frac{Fa}{fa} = \frac{F''(a)}{f''(a)}$ etc. etc.

Aufgabe. Wie gross ist $\frac{tg\,5\,x}{tg\,x}$, wenn $x = \frac{\pi}{2} = 90^0$ wird.

Auflösung. $$\frac{tg\,5\,x}{tg\,x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{5}{\cos^2 5\,x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{5\cos^2 x}{\cos^2 5\,x} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{-10\cos x\ \ \sin x}{-10\cos 5\,x \sin 5\,x} = \frac{\sin 2\,x}{\sin 10\,x} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{2\cos 2\,x}{10\cos 10\,x} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}$$

Aufgabe. Wie gross ist $\frac{l \sin x}{l \sin 2x}$, wenn $x = 0$.

Auflösung. $$\frac{l \sin x}{l \sin 2x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}} = \frac{\sin 2x . \cos x}{2 \sin x \cos 2x}$$

$$= \frac{2 \sin x \cos^2 x}{2 \sin x . \cos 2x} = \frac{\cos^2 x}{\cos 2x}$$

Weil $x = 0$, so erhält man $\frac{1}{1} = 1$.

§. 64.

Uebungsaufgaben.

1) Wenn $x = 0$, so ist $\frac{a^x - b^x}{x} = l\frac{a}{b}$

2) Wenn $x = 1$, so ist $\frac{1 - x^m}{1 - x^n} = \frac{m}{n}$

3) Wenn $x = a$, so ist $\frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a$

4) Wenn $x = 0$, so ist $\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = 2$

5) Wenn $x = 0$, so ist $\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2.3}$

6) Wenn $x = 0$, so ist $\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x} = 3$

7) Wenn $x = 0$, so ist $\frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{\cos ax - \cos bx} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{a^2 - b^2}$

8) Wenn $x = \frac{\pi}{2}$, so ist $\frac{\operatorname{tg}(2m - 1)x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2m - 1}$

§. 65.

Die Form $0 . \infty$.

Führt ein Product $fx . Fx$ für einen bestimmten Werth von x auf die Form $0 . \infty$, so schreibe man

$$fx.Fx = \frac{f(x)}{(Fx)^{-1}} = \frac{0}{0} \text{ oder}$$

$$fx.Fx = \frac{Fx}{(fx)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

In beiden Fällen lässt sich der Werth von fx.Fx nach den vorhergehenden Paragraphen ermitteln.

Aufgabe. Wie gross ist x.ctg.x, wenn x = 0.

Auflösung. $x.\text{ctg}\,x = \frac{x}{\text{tg}\,x} = \frac{0}{0} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1.$

§. 66.

Die Form $\infty - \infty$.

Führt eine Differenz Fx — fx für einen bestimmten Werth von x auf die Form $\infty - \infty$, so schreibe man

$$Fx - fx = \frac{1}{(Fx)^{-1}} - \frac{1}{(fx)^{-1}} = \frac{(fx)^{-1} - (Fx)^{-1}}{(Fx)^{-1}.(fx)^{-1}} = \frac{0}{0}.$$

Aufgabe. Wie gross ist $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{xl}$, wenn x = 1 ist.

Auflösung. $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{lx} = \frac{x\,lx - x + 1}{x\,lx - lx} = \frac{0}{0}$

1. Diff. Quot. $= \frac{lx + 1 - 1}{lx + 1 - \frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$; 2. Diff. Quot. $= \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$

§. 67.

Die Formen 0^0, ∞^0 und 1^∞.

Führt eine Potenz $(Fx)^{fx}$ auf die Formen 0^0, ∞^0, 1^∞, so setze man

1) $u = (Fx)^{fx}$,

so ist

2) $l\,u = fx.lFx = \frac{l(Fx)}{(fx)^{-1}}$,

3) $u = (Fx)^{fx} = e^{fx.lFx} = e^{\frac{lFx}{(fx)-1}}$.

Nun hat der Ausdruck $\frac{l(Fx)}{(fx)^{-1}}$ entweder die Form $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$. Der Werth von $u = (Fx)^{fx}$ lässt sich also nach §. 61 bis 63 bestimmen.

Aufgabe 1. Wie gross ist $x^{\sin x}$, wenn $x = 0$?

Auflösung. Wenn $x = 0$, so ist $x^{\sin x} = 0^0$.

Nun setzen wir

1) $u = x^{\sin x}$,

2) $lu = \sin x . lx = \frac{lx}{(\sin x)^{-1}}$,

3) $u = e^{\frac{lx}{(\sin x)-1}}$.

Nun ist aber für $x = 0$

$$4)\quad \frac{lx}{(\sin x)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{x}}{-(\sin x)^{-2}.\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{x.\cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{lx}{(\sin x)^{-1}} = \frac{-2\sin x.\cos x}{\cos x - x.\sin x} = 0.$$

Schalten wir diesen Werth von $\frac{lx}{(\sin x)^{-1}}$ in Gleichung 3) ein, so erhalten wir für $x = 0$

$$x^{\sin x} = e^0 = 1.$$

Aufgabe 2. Wie gross ist $(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$, wenn $x = 0$?

Auflösung. Für $x = 0$ wird

1) $(\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = \infty^0$.

Wir setzen demnach

2) $u = (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$,

3) $lu = \sin x . l(\operatorname{ctg} x) = \frac{l\operatorname{ctg} x}{(\sin x)^{-1}}$

4) $u = e^{\frac{l.\operatorname{ctg}.x}{(\sin x)-1}}$.

Nun ist

$$5)\ \frac{l\,\mathrm{ctg}\,x}{(\sin x)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{-\frac{1}{\mathrm{ctg}\,x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{-(\sin x)^{-2}.\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0.$$

Setzen wir den Werth $\frac{l\,\mathrm{ctg}\,x}{(\sin x)^{-1}}$ in Gleichung 4) ein, so ergiebt sich

$$6)\ (\mathrm{ctg}\,x)^{\sin x} = u = e^0 = 1.$$

Aufgabe 3. Wie gross ist $(1+x)^{1/x}$, wenn $x = 0$?

Auflösung. Wenn $x = 0$, so ist $(1+x)^{1/x} = 1^{\infty}$. Wir setzen deshalb

$$1)\quad u = (1+x)^{1/x}, \text{ dann ist}$$

$$2)\ l\,u = \frac{1}{x}l(1+x) = \frac{l(1+x)}{x} = \frac{0}{0},$$

$$3)\quad u = e^{\frac{l(1+x)}{x}}.$$

Nun ist

$$4)\ f'\left(\frac{l(1+x)}{x}\right).dx = \frac{\left(\frac{1}{1+x}\right)}{1} = 1,$$

also für $x = 0$ ist $(1+x)^{1/x} = 1^{\infty} = e^1 = e$.

Vergl. Hülfssatz 12.

Uebungsaufgaben.

Wenn $x = 0$, so ist $x^x = 1$.

Wenn $x = \infty$, so ist $x^{1/x} = 1$.

Wenn $x = \infty$, so ist $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Wenn $x = 0$, so ist $(1+mx)^{1/x} = e^m$.

Wenn $x = a$, so ist $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

Bemerkung.

In Fällen, wo Differentiation zum Ziele führen würde, kann man sehr oft mit Vortheil ein anderes Verfahren anwenden. Wollen wir

z. B. bestimmen, wie gross $\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ ist, wenn $x=0$ wird so setze man

$$1)\quad \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\frac{2\sin^2 x/_2}{4\sin^2 x/_2 . \cos^2 x/_2}=\frac{1}{2\cos^2 x/_2}.$$

Setzt man hierin nun $x=0$, so erhält man

$$2)\quad \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\frac{0}{0}=\frac{1}{2}.$$

IX. Capitel.

Differentiation der unentwickelten Functionen.

§. 68.

Entwickelung der allgemeinen Regel.

Die unentwickelten (impliciten) Functionen sind schon §. 8 und 9 erklärt. Liegt nun eine unentwickelte Function vor, z. B. in Gleichung 1)

$$1)\quad y^3 x^2+\cos x=\sin x . \operatorname{tg} y+\sin y$$

und setzen wir

$$x=u$$

$$y=v,$$

so erhalten wir

$$2)\quad v^3 u^2+\cos u=\sin u . \operatorname{tg} v+\sin v.$$

In dieser Gleichung ist u eine Function von x, weil $u=x$ ist; v ist eine Function von x, weil $v=y$, und weil nach Gleichung 1) y von x abhängt. Da nun u und v in Gleichung 2) Functionen von x sind, und u und v resp. mit x und y in Gleichung 1) identisch sind, so lässt sich Gleichung 1) nach §. 27 und 28 dadurch differentiiren, dass man auf jeder Seite ein Mal so differentiirt, als ob x **allein** variabel sei, und ein Mal so differentiirt, als ob y **allein** variabel sei, und darauf auf jeder Seite dieser Gleichung die Resultate addirt.

Was wir hier an einem speciellen Beispiele gezeigt haben, lässt sich ohne Weiteres auf alle unentwickelten Functionen übertragen.

Wir haben also die allgemeine Regel

„Wenn eine Gleichung zwischen den Grössen x und y nicht entwickelt ist, so wird dieselbe dadurch differentiirt, dass man auf jeder Seite dieser Gleichung ein Mal nach x und einmal nach y differentiirt, und die Resultate addirt."

Hiernach erhalten wir aus der Gleichung 1)

1) $y^3 x^2 + \cos x = \sin x \operatorname{tg} y + \sin y$,

2) $2y^3 x\, dx - \sin x\, dx + 3y^2 x^2 dy$

$$= \cos x \operatorname{tg} y\, dx + \frac{\sin x}{\cos^2 y} dy + \cos y\, dy$$

oder wenn man beide Seiten durch dx dividirt

3) $2y^3 x - \sin x + 3y^2 x^2 \frac{dy}{dx}$

$$= \cos x \operatorname{tg} y + \frac{\sin x}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} + \cos y \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Bemerkungen.

1) Gewöhnlich reducirt man die unentwickelten Gleichungen auf Null. Unsere Gleichung

$$y^3 x^2 + \cos x = \sin x \operatorname{tg} y + \sin y$$

wird sich dann verwandeln in

$$y^3 x^2 + \cos x - \sin x \operatorname{tg} y - \sin y = 0.$$

2) Der einfachen Bezeichnung wegen setzt man häufig

$$\frac{dy}{dx} = p$$

$$\frac{dp}{dx} = q$$

$$\frac{dq}{dx} = r.$$

Ist nun x die unabhängig Veränderliche, so ist demnach

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = q; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = r \text{ etc.}$$

Ist z. B. $y = x^3$, so ist

$$p = \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$ etc. (vergl. §. 71 ff.).

§. 69.

Anwendungen des vorigen Paragraphen.

Aufgabe. Man soll den Werth von p bestimmen, wenn gegeben ist

1) $x^2 y^4 + \sin y = 0$,
2) $\sin x . \sin y + \sin x . \cos y - y = 0$,
3) $y^3 - 3axy + x^3 = 0$,
4) $e^y - e^x + xy = 0$,
5) $\sin(x.y) - e^{xy} - x^2y = 0$,
6) $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

Auflösung I. Wenn wir die Gleichung

1) $x^3 y^4 + x . \sin y = 0$

erst nach x, dann nach y differentiiren, so erhalten wir

2) $3x^2 y^4 dx + \sin y\, dx \quad + 4x^3 y^3 dy + x \cos y\, dy = 0$,
3) $(3x^2 y^4 + \sin y\, dx \quad + \quad (4x^3 y^3 + x \cos y)\, dy = 0$,

dividiren wir durch dx, so folgt

4) $3x^2y^4 + \sin y + (4x^3y^3 + x . \cos y)\, p = 0$,
5) $p\,(4x^3y^3 + x \cos y) = -(3x^2y^4 + \sin y)$,
6) $p = -\frac{3x^2y^4 + \sin y}{4x^3y^3 + x . \cos y} = -\frac{2xy^4}{4x^2y^3 + \cos y}$.

Auflösung II. Differentiiren wir die Gleichung

1) $\sin x \sin y + \sin x \cos y - y = 0$, so folgt
2) $\sin x \cos y\, dy - \sin x \sin y\, dy - dy + \sin y \cos x\, dx$
$+ \cos y \cos x\, dx = 0$,
3) $(\sin x \cos y - \sin x \sin y - 1)\, dy$
$+ (\sin y \cos x + \cos y \cos x)\, dx = 0$,
4) $(1 + \sin x \sin y - \sin x \cos y)\, dy$
$= (\sin y \cos x + \cos y \cos x)\, dx$,

5) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y \cos x + \cos y \cos x}{1 + \sin x \sin y - \sin x \cos y}$

6) $p = \frac{\sin y \cos x + \cos y \cos x}{1 + \sin x \sin y - \sin x \cos y} = \frac{\cos x . \cos (y - 45)}{\sin x . \sin (y - 45) + \sqrt{\frac{1}{2}}}$

Auflösung III. Aus der Gleichung

1) $y^3 - 3axy + x^3 = 0$ folgt

2) $3y^2 dy - 3ax\,dy - 3ay\,dx + 3x^2 dx = 0$

3) $3(y^2 - ax)\,dy = 3(ay - x^2)\,dx$

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{3(ay - x^2)}{3(y^2 - ax)}$

5) $p = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$

In ähnlicher Weise ergiebt sich

Auflösung IV. $p = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$

Auflösung V. $p = \frac{y}{x} . \frac{\cos xy - e^{xy} - 2x}{x + e^{xy} - \cos xy}$

Auflösung VI. $p = -\frac{x}{y}.$

§. 70.

Wiederholte Differentiationen.

Um die höheren Differentiale oder Differentialquotienten zu erhalten, muss man wiederholt differentiiren. Hierbei ist zu bedenken, dass dx constant und dy variabel ist, wenn x die unabhängig Veränderliche ist (vergl. §. 36).

Aufgabe 1. Man soll p und q bestimmen, wenn gegeben ist

$$y^2 - xy + x^2 = 0.$$

Auflösung. Aus der Gleichung

1) $y^2 - xy + x^2 = 0$, folgt

2) $(2y - x)\,dy + (-y + 2x)\,dx = 0.$

Differentiiren wir diese Gleichung erst nach y, dann nach dy, und zuletzt nach x, so erhalten wir

3) $2dy^2 - dy\,dx + (2y - x)\,d^2y - dx\,dy + 2dx^2 = 0.$

Dividiren wir jetzt die Gleichung 2) durch dx, so erhalten wir

4) $(2y - x)\frac{dy}{dx} + (-y + 2x) = 0$

5) $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$

6) $p = \frac{y - 2x}{2y - x}.$

Um q zu erhalten, dividiren wir Gleichung 3) durch $(dx)^2$. Wir finden dann

7) $2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} + (2y - x)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2 = 0.$

8) $2p^2 - p + (2y - x).q - p + 2 = 0$

9) $(2y - x)q = -2(p^2 - p + 1)$

10) $q = 2\,\frac{p^2 - p + 1}{x - 2y}.$

Wir sehen, dass in Gleichung 10) q durch x, y und p ausgedrückt ist. Will man q durch x und y **allein** ausdrücken, so setze man in Gleichung 10) für p seinen Werth nach Gleichung 6). Wir finden dann

11) $q = 2\,\frac{\left(\frac{y - 2x}{2y - x}\right)^2 - \frac{y - 2x}{2y - x} + 1}{x - 2y}.$

Multipliciren wir nun Zähler und Nenner mit $(2y - x)^2$, so folgt

12) $q = 2\,\frac{(y - 2x)^2 - (y - 2x).(2y - x) + (2y - x)^2}{(x - 2y)^3}$

13) $q = 2\,\frac{y^2 - 4xy + 4x^2 - 2y^2 + 5xy - 2x^2 + 4y^2 - 4xy + x^2}{(x - 2y)^3}$

$= 2\,\frac{3y^2 - 3xy + 3x^2}{(x - 2y)^3}$

14) $q = 6\,\frac{y^2 - xy + x^2}{(x - 2y)^3}$

Aufgabe 2. Es ist gegeben

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2.$$

Man soll die Werthe von p und q ermitteln

Auflösung 1. Aus der Gleichung

1) $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ folgt

2) $2(x-\alpha)\,dx+2(y-\beta)\,dy=0$

3) $(x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy=0.$

Differentiiren wir diese Gleichung erst nach x, dann nach y, und zuletzt nach dy, so folgt

4) $dx^2+dy^2+(y-\beta)\,d^2y=0.$

Dividiren wir Gleichung 3) durch dx, so erhalten wir

5) $(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0$

6) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x-\alpha}{y-\beta}$ oder

7) $p=-\frac{x-\alpha}{y-\beta}$ (vergl. §. 70, Auflösung VI).

Dividiren wir Gleichung 4) durch dx^2, so folgt

8) $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0$

9) $1+p^2+(y-\beta)\,q=0$

10) $(y-\beta)\,q=-(1+p^2)$

11) $q=-\frac{1+p^2}{y-\beta}.$

Setzen wir hierin für p seinen Werth nach Gleichung 7), so folgt

12) $q=-\frac{1+\left(\frac{x-\alpha}{y-\beta}\right)^2}{y-\beta}=-\frac{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}{(y-\beta)^3}.$

Setzen wir hierin für $(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2$ seinen Werth nach Gleichung 1), so folgt

13) $q=-\frac{r^2}{(y-\beta)^3}.$

Auflösung 2. Man erkennt leicht, dass es möglich ist, unsere Gleichung

1) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ für y aufzulösen.

Wir können deshalb die Werthe von p und q auch dadurch ermitteln, dass wir die Gleichung für y wirklich auflösen, und dann nach unsern Regeln für die Differentiation entwickelter Functionen verfahren. Führen wir dies aus, so erhalten wir aus Gleichung 1)

$$2)\quad y=\beta \pm\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}$$

$$3)\quad p=\frac{dy}{dx}=\pm\frac{-d(x-\alpha)^2}{2\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}$$

$$4)\quad p=\mp\frac{x-\alpha}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}.$$

Wenn wir nun weiter differentiiren, so erhalten wir

$$5)\quad dp=\mp\frac{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}.d(x-\alpha)-(x-\alpha)d\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}{\left\{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}\right\}^2}$$

$$6)\quad dp=\mp\frac{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}.dx-(x-\alpha).\dfrac{-(x-\alpha).dx}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}}{r^2-(x-\alpha)^2}$$

$$7)\quad \frac{dp}{dx}=\mp\frac{r^2-(x-\alpha)^2+(x-\alpha)^2}{\left\{r^2-(x-\alpha)^2\right\}^{3/2}}$$

$$8)\quad q=\mp\frac{r^2}{\left\{r^2-(x-\alpha)^2\right\}^{3/2}}.$$

Bemerkungen.

1) Die Werthe, welche wir für p und q nach beiden Auflösungen gefunden haben, müssen natürlich übereinstimmen; und in der That lässt sich diese Uebereinstimmung auch sehr leicht nachweisen. Es ist nämlich nach Gleichung 1)

$$9)\quad y-\beta=\pm\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}.$$

Setzen wir nach dieser Gleichung für $\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}$ seinen Werth in die Gleichung 4) und 8) der Auflösung 2) ein, so ergiebt sich

$$10)\quad p=\mp\frac{x-\alpha}{\pm(y-\beta)}=-\frac{x-\alpha}{y-\beta}$$

$$11)\quad q=\mp\frac{r^2}{[r^2-(x-\alpha)^2]^{3/2}}=\mp\frac{r^2}{\pm(y-\beta)^3}=-\frac{r^2}{(y-\beta)^3}.$$

Diese Werthe von p und q sind identisch mit den Werthen von p und q, die wir in Gleichung 7) und 13) der Auflösung 1) gefunden haben.

2) Die Gleichung

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

ist bekanntlich die Gleichung des Kreises. — Die ermittelten Werthe von p und q werden uns noch bei der Bestimmung des Krümmungskreises für eine beliebige Curve von Wichtigkeit werden.

Aufgabe 3. Man soll p und q bestimmen, wenn gegeben ist

1) $y^3+x^2y-x^3=0$
2) $\sin x+\cos y-\sin x.e^y+e^x.\cos y=0$
3) $y\,lx-x\,ly-xy=0$
4) $x^2+y^2=r^2$.

Aufgabe 4. Man soll p, q und r bestimmen, wenn gegeben ist

1) $x^2+y^2=0$
2) $x\cos y-y.\cos x=0$
3) $e^x+x.\sin y+e^y=0$.

X. Capitel.

Vertauschung der unabhängig veränderlichen Grössen.

§. 71.

Allgemeine Formeln für p und q, wenn x und y Functionen von t sind.

Bezeichnet in irgend einer Gleichung zwischen y und x die letztere die unabhängig veränderliche Grösse, so ist nach §. 36 dx **constant,** während dy **variabel ist.** Nun aber kann es bei einer analytischen Untersuchung nothwendig werden, x und y beide als Functionen einer dritten unabhängig veränderlichen Grösse t anzusehen. In diesem Falle ist dx nicht

mehr constant. Es wäre dann die Frage, was man an die Stelle von p, q etc. zu setzen hätte. Nehmen wir an, es sei

1) $y = ft$

2) $x = Ft$, so erhalten wir

3) $dy = f't.dt$

4) $dx = F't.dt$, also

5) $p = \frac{dy}{dx} = \frac{f't}{F't}$.

Ferner ist

6) $q = \frac{dp}{dx}$.

Hieraus folgt

7) $q = \frac{d\frac{f't}{F't}}{dx} = \frac{F'tf''tdt - f'tF''tdt}{(F't)^2.dx}$

$q = \frac{F'tf''t - f'tF''t}{(F't)^2} \cdot \frac{dt}{dx}$.

Nun ist aber nach der Gleichung 4)

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{F't}$, also

8) $q = \frac{F'tf''t - f'tF''t}{(F't)^3}$.

Bemerkungen.

1) Man kann den Werth von q noch auf andere Weise ermitteln. Gehen wir nämlich aus von der Gleichung

9) $q = \frac{dp}{dx}$

so folgt, weil dx jetzt variabel ist

10) $q = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{\frac{dx.d^2y - dy.d^2x}{dx^2}}{dx}$

11) $q = \frac{dx.d^2y - dy.d^2x}{dx^3}$

2) Die Werthe für q aus den Gleichungen 8) und 11) sind natürlich gleich. Man kann sich hiervon leicht überzeugen, wenn man in Gleichung 8) für F't, F''t, f't, f''t ihre Werthe setzt. Wir finden nämlich nach den Gleichungen 1) und 2)

12) $F't = \frac{dx}{dt}$

13) $F''t = \frac{d^2x}{dt^2}$

14) $f't = \frac{dy}{dt}$

15) $f''t = \frac{d^2y}{dt^2}$

Schalten wir diese Werthe für $F't$, $F''t$ etc. in Gleichung 8) ein, so folgt

16) $$q = \frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$ oder

17) $$q = \frac{dx.d^2y - dy.d^2x}{(dx)^3}$$

Ein Resulat, welches mit Gleichung 11) genau übereinstimmt.

§. 72.

Anwendungen.

Aufgabe 1. Es ist gegeben

$$x = 7 + t^2$$

$$y = 3 + t^2 - 3t^4$$

Wie gross ist p und q?

Auflösung.

1) $dx = 2t\,dt$

2) $dy = 2t\,dt - 12t^3\,dt.$

Hieraus folgt

3) $$q = \frac{dy}{dx} = \frac{(2t - 12t^3)\,dt}{2t\,dt}$$

4) $p = 1 - 6t^2.$

Hieraus folgt weiter

5) $$q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = -12t.\frac{dt}{dx}.$$

Nach Gleichung 1) ist $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2t}$

also 6) $$q = -12t.\frac{1}{2t} = -6.$$

Aufgabe 2. Gegeben ist

$$y = r.(1 - \cos t)$$
$$x = r.(t - \sin t).$$

Man soll p und q durch t ausdrücken.

Auflösung. Durch Differentiation der Gleichungen

1) $y = r.(1 - \cos t)$

2) $x = r.(t - \sin t)$

erhalten wir

3) $dy = r.\sin t.dt$

4) $dx = r.(1 - \cos t)\,dt.$

Hieraus folgt

5) $p = \frac{dy}{dx} = \frac{r.\sin t.dt}{r.(1 - \cos t)\,dt} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$

Nun ist $\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} . \cos \frac{t}{2}$

$$1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}, \text{ also}$$

6) $p = \frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} . \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$

7) $p = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$

Hieraus ergiebt sich weiter

8) $q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt} . \frac{dt}{dx} = \frac{d \operatorname{ctg} \frac{t}{2}}{dt} . \frac{dt}{dx}.$

Nun ist

9) $\frac{d \operatorname{ctg} \frac{t}{2}}{dt} = - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}$

und nach Gleichung 4)

10) $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{r.(1 - \cos t)} = \frac{1}{2 r \sin^2 \frac{t}{2}}.$

Schalten wir die für $\frac{d \operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{dt}$, und $\frac{dt}{dx}$ gefundenen Werthe in Gleichung 8) ein, so folgt

$$11)\ q = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2r.\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4r.\sin^4\frac{t}{2}}$$

Aufgabe 3. Man soll p und q als Functionen von t darstellen, wenn gegeben ist

$$1.\ \begin{cases} y = t + \sin^2 t \\ x = t + e t \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} y = \sin^3 t \\ x = \operatorname{ctg} t \end{cases}$$

Aufgabe 4. In der Gleichung

$$1)\ x\frac{dy}{dx} - ay = 0$$

ist x die unabhängig veränderliche Grösse. Im Laufe einer analytischen Untersuchung wird es nothwendig, x als Function von t darzustellen und zwar nach der Gleichung

$$2)\ x = e^t.$$

Wie verändert sich demnach unsere Gleichung 1)?

Auflösung. Zunächst ist

$$3)\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}.$$

Ferner ist nach Gleichung 2)

$$4)\ dx = e^t\, dt, \text{ also}$$

$$5)\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t}.$$

Schalten wir nun den Werth von $\frac{dt}{dx}$ nach Gleichung 8) in Gleichung 3) ein, so ergiebt sich

$$6)\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{e^t}.$$

Dieser Werth von $\frac{dy}{dx}$ in Gleichung 1) geschaltet, giebt

$$7) \quad \frac{x}{e^t} \cdot \frac{dy}{dt} - ay = 0.$$

Nach Gleichung 2) ist $x = e^t$, also

$$8) \quad \frac{dy}{dt} - ay = 0.$$

Aufgabe 5. In der Gleichung

$$1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + xy \frac{dy}{dx} + \sec^2 x = 0$$

wird x abhängig von der neuen unabhängig veränderlichen Grösse t nach der Gleichung

$$2) \quad x = \text{arc tg } t.$$

Wie verändert sich dadurch unsere Gleichung 1)?

Auflösung. Nach Gleichung 2) erhalten wir

$$3) \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2}, \text{ also}$$

$$4) \quad \frac{dt}{dx} = 1 + t^2, \text{ mithin}$$

$$5) \quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}(1 + t^2).$$

Nun ist ferner

$$6) \quad q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}, \text{ also}$$

$$q = \left\{ \frac{d^2y}{dt^2}(1 + t^2) + \frac{dy}{dt} \cdot 2t \right\} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$q = \left\{ \frac{d^2y}{dt^2}(1 + t^2) + \frac{dy}{dt} \cdot 2t \right\} \cdot (1 + t^2)$$

$$7) \quad q = \frac{d^2y}{dt^2}(1 + t^2)^2 + 2t(1 + t^2)\frac{dy}{dt}.$$

Berücksichtigen wir nun, dass in Gleichung 1) die Ausdrücke $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleichbedeutend sind resp. mit p und q, und schalten wir dann die Werthe von x. p und q nach den Gleichungen 2, 5 und 7 in Gleichung 1 ein, so folgt

$$8)\ \frac{d^2y}{dt^2}(1+t^2)^2+2t(1+t^2)\frac{dy}{dt}$$

$$+(\operatorname{arc}\operatorname{tg} t).y.(1+t^2)\frac{dy}{dt}+\sec^2(\operatorname{arc}\operatorname{tg} t)=0$$

$$9)\ \frac{d^2y}{dt^2}(1+t^2)^2+2t(1+t^2)\frac{dy}{dt}$$

$$+(\operatorname{arc}\operatorname{tg} t).y.(1+t^2)\frac{dy}{dt}+(1+t^2)=0.$$

Dividiren wir durch $1+t^2$, so folgt

$$10)\ \frac{d^2y}{dt^2}(1+t^2)+2t\frac{dy}{dt}+y.\operatorname{arc}\operatorname{tg} t\frac{dy}{dt}+1=0$$

$$11)\ \frac{d^2y}{dt^2}(1+t^2)+(2t+y.\operatorname{arc}\operatorname{tg} t)\frac{dy}{dt}+1=0.$$

§. 73.

y wird zur unabhängig veränderlichen Grösse.

Ein specieller Fall der Vertauschung der unabhängig veränderlichen Grösse ist der Fall, dass man y den Charakter der unabhängig veränderlichen Grösse giebt.

Dieser Fall kommt z. B. vor, wenn man bei Curven die Ordinaten als unabhängig veränderliche Grössen ansehen will. In diesem Falle hat man

$$1)\ p=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

$$2)\ q=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx}.$$

Nun ist $dp=d\frac{dy}{dx}=-\frac{dy.d^2x}{dx^2}$, also

$$3)\ q=\frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx}=-\frac{dy\,d^2x}{dy\,dx^2}.\frac{dy}{dx}$$

$$4)\ q=-\frac{d^2x\,dy}{(dx)^3}.$$

Bemerkung.

In §. 70 Gleichung 6) erhielten wir $q = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$. Wird nun y die unabhängig veränderliche Grösse, so wird dy constant, also fällt d^2y weg. Wir erhalten demnach $q = -\frac{dy\,d^2x}{dx^3}$. Ein Resultat, welches mit unserer Gleichung 4) genau übereinstimmt, wie dies auch nicht anders zu erwarten war.

Aufgabe 1. In der Gleichung

$$1)\quad (x+a)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x}{b}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dx}{dy} = 0$$

ist x die unabhängig veränderliche Grösse. Was hat man statt derselben zu setzen, wenn y die unabhängig veränderliche Grösse wird?

Auflösung. Wenn x die unabhängig veränderliche Grösse ist, so ist $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = q$. Wenn aber y die unabhängig veränderliche Grösse wird, so ist nach Gleichung 4) $q = -\frac{d^2x\,dy}{dx^3}$, also erhalten wir statt der gegebenen Gleichung 1)

$$2)\quad -(x+a)\frac{d^2x\,.\,dy}{dx^3} + \frac{x}{b}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dx}{dy} = 0$$

oder wenn wir diese Gleichung mit $\left(\frac{dx}{dy}\right)^3$ multipliciren, so folgt

$$3)\quad -(x+a)\frac{d^2x}{dy^2} + \frac{x}{b}\cdot\frac{dx}{dy} - \left(\frac{dx}{dy}\right)^4 = 0.$$

Aufgabe 2. In der Gleichung

$$1)\quad x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y = 0$$

ist x die unabhängig veränderliche Grösse. Wie schreibt man dieselbe, wenn y zur unabhängig veränderlichen Grösse wird?

Auflösung. Wenn x die unabhängig veränderliche Grösse

ist, so ist $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = p$. Wenn aber y die unabhängig veränderliche Grösse ist, so ist $q = -\frac{d^2x\,dy}{dx^3}$. Demnach erhalten wir statt unserer Gleichung 1) die Gleichung

$$2)\quad -x.\frac{d^2x\,dy}{dx^3} + 2\frac{dy^2}{dx^2} - y = 0.$$

Wenn wir dieselbe mit $\left(\frac{dx}{dy}\right)^3$ multipliciren, so erhalten wir

$$3)\quad -x.\frac{d^2x}{dy^2} + 2\frac{dx}{dy} - y.\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$$

oder

$$4)\quad x.\frac{d^2x}{dy^2} - 2\frac{dx}{dy} + y.\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$$

XI. Capitel.

Tangenten an Curven.

§. 74.

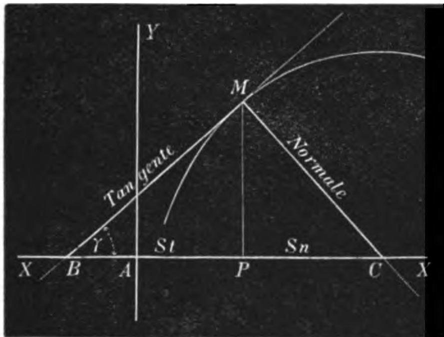
Die Curven sind bezogen auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem.

Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve (Fig. 11), in welcher wir einen beliebigen Punkt M annehmen wollen, dessen Coordinaten resp. x' und y' sein mögen. Denken wir nun in diesem Punkte an die Curve eine Tangente gelegt, und bezeichnen wir den Neigungswinkel desselben gegen die Abscissenachse durch γ, so folgt aus §. 6 Gleichung 2), dass

$$1)\quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{dy'}{dx'} = f'(x').$$

Die Gleichung der Berührenden ist demnach nach einem bekannten Satze aus der analytischen Geometrie

Fig. 11.



2) $y - y' = (x - x') \operatorname{tg}\gamma$ oder

3) $y - y' = (x - x') \frac{dy'}{dx'}$ oder

4) $y - y' = (x - x') f'(x')$.

Hieraus folgt die Gleichung der Normalen für den Punkt M.

5) $y - y' = -\frac{1}{f'(x')}(x - x')$ oder

6) $y - y' = -\frac{dx'}{dy'}(x - x')$.

Die Stücke der Berührenden und der Normalen, welche zwischen der Abscissenachse und dem Punkte M der Curve liegen, nennt man auch kurzweg resp. Tangente und Normale. Man bezeichnet sie durch T und N. Die Projectionen dieser Stücke auf der Abscissenachse nennt man Subtangente und Subnormale (St und Sn).

Wir haben demnach in unserer Figur

$$T = MB;\; N = MC.$$
$$St = BP;\; Sn = CP.$$

Hieraus ergiebt sich ganz allgemein

7) $Sn = y \cdot \operatorname{tg}\gamma = y \cdot \frac{dy}{dx}$

8) $St = y \cdot \operatorname{ctg}\gamma = y \cdot \frac{dx}{dy}$

9) $T = y \cdot \frac{1}{\sin\gamma} = y \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\gamma} = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$

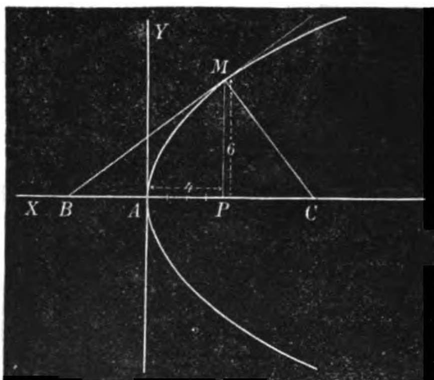
10) $N = y \cdot \frac{1}{\cos\gamma} = y \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\gamma} = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

§. 75.

Fortsetzung. Aufgaben.

Aufgabe 1. Die Gleichung einer Parabel ist $y^2 = 9x$. Man soll für den Punkt (M), dessen Abscisse $x = 4$ ist, die Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente berechnen.

Fig. 12.



Auflösung. Aus unserer Gleichung folgt

$$1)\quad y = \pm 3\sqrt{x}.$$

Weil nun der Punkt M oberhalb der Abscissenachse liegt, so berücksichtigen wir in der Gleichung 1) nur das Zeichen +; hieraus folgt

$$2)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

Setzen wir in Gleichung 1) und 2) $x = 4$, so erhalten wir für den Punkt M

$$3)\quad y = 3.\sqrt{4} = 6$$

$$4)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}.$$

Schalten wir die in Gleichung 3) und 4) gefundenen Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$ in die allgemeinen Formeln 7) bis 10) des §. 74 ein, so folgt

$$5)\quad Sn = y.\frac{dy}{dx} = 6.\frac{3}{4} = 4\tfrac{1}{2} = PC$$

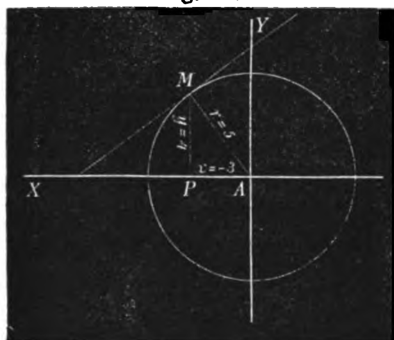
$$6)\quad St = y.\frac{dx}{dy} = 6.\frac{4}{3} = 8 = BP$$

$$7)\ N = y.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 6.\sqrt{1+\frac{9}{16}} = 7\tfrac{1}{2} = CM$$

$$8)\ T = y.\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = 6.\sqrt{1+\frac{16}{9}} = 10 = BM.$$

Aufgabe 2. Ein Kreis ist durch die Gleichung $y^2 + x^2 = 25$ gegeben. Auf demselben liegt ein Punkt M, dessen Abscisse $x = -3$ ist. Man soll für diesen Punkt Sn, St, N und T bestimmen.

Fig. 13.



Auflösung. Aus unserer Gleichung erhalten wir zunächst

$$1)\ y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

$$2)\ \frac{dy}{dx} = \pm\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Setzen wir in diese beiden Gleichungen $x = -3$ und berücksichtigen wir, dass M oberhalb der Abscissenachse liegt, dass also das zugehörige y positiv ist, so folgt

$$3)\ y = +\sqrt{25 - 9} = +4$$

$$4)\ \frac{dy}{dx} = \frac{-(-3)}{4} = \frac{3}{4}.$$

Wir finden hieraus nach den Formeln 7 bis 10 von §. 74.

$$5)\ Sn = y.\frac{dy}{dx} = 4.\frac{3}{4} = 3$$

$$6)\ St = y.\frac{dx}{dy} = 4.\frac{4}{3} = 5\tfrac{1}{3}$$

$$7)\ N = y.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 4.\sqrt{1+\frac{9}{16}} = 5$$

$$8)\ T = y.\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = 4.\sqrt{1+\frac{16}{9}} = 6\tfrac{2}{3}.$$

Bemerkung.

Dem Anfänger rathen wir, die beiden vorigen Aufgaben durch Construction zu lösen, und sich zu überzeugen, dass das Resultat unserer Rechnung mit dem Resultate der Construction übereinstimmt.

Aufgabe 3. Man soll die Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für folgende Curven berechnen.

für die Parabel $y^2 = px$

für die Ellipse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$

für die Hyperbel $a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$

für die Sinuslinie $y = \sin x$

für die Exponentiallinie $y = e^x$

für die Kettenlinie $y = m \cdot \frac{e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}}{2}$

Auflösung. Wir wollen in jeder der Curven die Coordinaten des Punktes, für welche wir die Sn, St, N, T finden wollen, resp. x und y nennen.

Für die **Parabel** ist nun

1) $y = \sqrt{px}$

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}.$

Schalten wir diese Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$ in unsere allgemeinen Formeln des §. 74 ein, so erhalten wir

3) $Sn = y \cdot \frac{dy}{dx} \qquad = \sqrt{px} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}} \qquad = \frac{1}{2} p$

4) $St = y \cdot \frac{dx}{dy} \qquad = \sqrt{px} \cdot 2\sqrt{\frac{x}{p}} \qquad = 2x$

5) $N = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{px} \cdot \sqrt{1 + \frac{p}{4x}} = \sqrt{px + \frac{p^2}{4}}$

6) $T = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{px} \cdot \sqrt{1 + \frac{4x}{p}} = \sqrt{px + 4x^2}$

Für die **Ellipse** erhalten wir aus der Gleichung

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

7) $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

8) $\frac{dy}{dx} = \frac{-bx}{a \,.\, \sqrt{a^2 - x^2}}$

also nach §. 74 Gleichung 7 bis 10

9) $Sn = y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \,.\, \frac{-bx}{a \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2}{a^2}x$

10) $St = y \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \,.\, \frac{-a\sqrt{a^2 - x^2}}{bx} = -\frac{a^2 - x^2}{x}$

11) $N = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \,.\, \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}}$

$= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2}}$

Ist nun e die Excentricität der Ellipse, so ist $a^2 - b^2 = e^2$, also

12) $N = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2}} = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - e^2 x^2}$

13) $T = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \,.\, \sqrt{1 + \frac{a^2(a^2 - x^2)}{b^2 x^2}}$

$= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{b^2 x^2 + a^4 - a^2 x^2}{b^2 x^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \,.\, \frac{\sqrt{a^4 - x^2 (a^2 - b^2)}}{bx}$

$= \frac{1}{ax} \,.\, \sqrt{(a^2 - x^2) \,.\, (a^4 - e^2 x^2)} = \frac{\sqrt{(a^2 - x^2) \,.\, (a^4 - e^2 x^2)}}{ax}$

Für die **Hyperbel** ist die Rechnung ganz ähnlich der Rechnung, wie sie vorstehend für die Ellipse durchgeführt ist. Für die **Sinuslinie** ist

14) $y = \sin x$, also

15) $\frac{dy}{dx} = \cos x$, demnach ist

16) $Sn = y \cdot \frac{dy}{dx} = \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$

17) $St = y \cdot \frac{dx}{dy} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x$

18) $N = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sin x \cdot \sqrt{1 + \cos^2 x}$

19) $T = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \operatorname{tg} x \cdot \sqrt{1 + \cos^2 x}$

Für die **Exponentiallinie** ist

20) $y = e^x$, also

21) $\frac{dy}{dx} = e^x$, hieraus folgt

22) $Sn = y \cdot \frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^x = e^{2x}$

23) $St = y \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right) = e^x \cdot \frac{1}{e^x} = 1.$

Die Subtangente der Exponentiallinie ist demnach constant

24) $N = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = e^x \cdot \sqrt{1 + e^{2x}}$

25) $T = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = e^x \cdot \sqrt{1 + e^{-2x}} = \sqrt{1 + e^{2x}}$

Für die **gemeine Kettenlinie** ist

26) $y = m \cdot \frac{e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}}{2}$

27) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}}{2}$, hieraus folgt

28) $Sn = m \cdot \frac{dy}{dx} = m \cdot \frac{e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}}{2}$

$Sn = m \cdot \frac{e^{\frac{2x}{m}} - e^{-\frac{2x}{m}}}{4}.$

29) $St = y \cdot \frac{dx}{dy} = m \cdot \frac{e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}}{2} \cdot \frac{2}{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}}$

$= m \cdot \frac{e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}}{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}} = m \cdot \frac{e^{\frac{2x}{m}} + 1}{e^{\frac{2x}{m}} - 1}$

$$30)\quad N = y.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = m.\frac{e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}}{2}.\sqrt{1+\left(\frac{e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}}}{2}\right)^2}$$

$$= m.\frac{e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}}{2}.\sqrt{1+\frac{e^{\frac{2x}{m}}-2+e^{-\frac{2x}{m}}}{4}}$$

$$= m.\frac{e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}}{2}.\sqrt{\frac{4+e^{\frac{2x}{m}}-2+e^{-\frac{2x}{m}}}{4}}$$

$$= m.\frac{e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}}{2}.\sqrt{\frac{e^{\frac{2x}{m}}+2+e^{-\frac{2x}{m}}}{4}} = m\left(\frac{e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}}{2}\right)^2$$

$$31)\quad T = y.\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = m.\frac{e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}}{2}.\sqrt{1+\left(\frac{2}{e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}}}\right)^2}$$

$$= m.\frac{e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}}{2}.\sqrt{\frac{e^{\frac{2x}{m}}+2+e^{-\frac{2x}{m}}}{\left(e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}}\right)^2}}$$

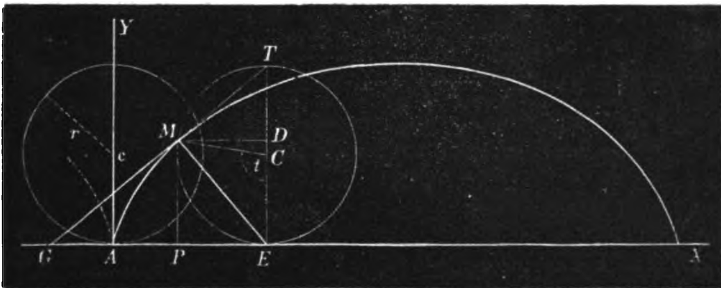
$$= m.\frac{e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}}{2}.\frac{e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}}{e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}}} = m.\frac{\left(e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}\right)^2}{2\left(e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}}\right)}$$

§. 76.

Fortsetzung. Die Cycloide.

Aufgabe 1. Man soll die Gleichung der gemeinen Cycloide aufstellen.

Fig. 14.



Auflösung. Wenn ein Kreis auf einer geraden Linie

fortrollt, so beschreibt jeder Punkt der Peripherie dieses Kreises bekanntlich eine Cycloide.

Wenn nun in Fig. 14 ein Kreis die gerade Linie AX im Punkte A berührt, und dieser Kreis so weit auf AX fortrollt, bis der Mittelpunkt desselben von dem Punkte c nach dem Punkte C gelangt, so wird der Punkt A mit dem Kreise auch seinen Ort geändert haben. Angenommen, es sei der Punkt A nach dem Punkte M gelangt, so ist M ein Punkt der Cycloide, welche der Punkt A beschreibt.

Wir brauchen also nur die Beziehungen zwischen den Coordinaten des Punktes M aufzusuchen, um zu der Gleichung der Cycloide zu gelangen. Zu dem Ende nehmen wir AX als Abscissenachse und A als Anfangspunkt des Coordinatensystems an, auf welches wir unsere Cycloide beziehen wollen. Dann ist nach den Bezeichnungen von Fig. 14

1) $AP = x, \quad MP = y.$

Ist ferner das Maass des Centriwinkels MCE, gemessen in Bogenlängen, gleich t, so ist

2) $AE = \breve{ME} = r.t$

3) $PE = MD = r.\sin t$

4) $CD = \quad -r.\cos t.$

Aus den Gleichungen 1) bis 4) ergiebt sich ohne Weiteres

5) $x = AP = rt - r.\sin t = r(t - \sin t)$

6) $y = MP = r - r.\cos t = r(1 - \cos t).$

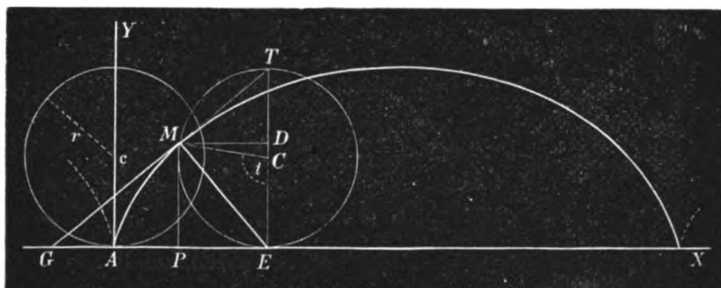
Man erkennt nun sehr leicht, dass es nicht möglich ist, die Gleichung 5) für t aufzulösen; man kann deshalb y nicht direct als entwickelte Funktion von x darstellen. Es leuchtet aber auch ein, dass dieses nicht nothwendig ist; dass vielmehr die Cycloide durch die Gleichungen 5) und 6) vollkommen bestimmt ist.

Bemerkung.

In den Gleichungen 5) und 6) sind die Grössen x und y Functionen von t. Es ist demnach t die unabhängig veränderliche Grösse. Wir haben hier also einen Fall, wo weder x noch y unabhängig veränderliche Grössen sind (vergl. §. 71 ff.).

Aufgabe 2. Man soll für einen Punkt (M) einer Cycloide (Fig. 14) die Werthe von Sn, St, N und T ermitteln.

Fig. 14.



Auflösung. Nach den Resultaten der vorigen Aufgabe ist

$$1)\ \begin{cases} x = r.(t - \sin t) \\ y = r.(1 - \cos t). \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$2)\ dx = r.(1 - \cos t)\,dt$$

$$3)\ dy = r.\sin t\,dt.$$

Dies giebt

$$4)\ \frac{dy}{dx} = \frac{r.\sin t}{r.(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

Ferner ist

$$5)\ \sin t = 2 \sin \frac{t}{2} . \cos \frac{t}{2}$$

$$6)\ 1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Schalten wir die Werthe von sin t und cos t nach den Gleichungen 5) und 6) in Gleichung 4) ein, so folgt

$$7)\ \frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} . \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Wird dieser Werth von $\frac{dy}{dx}$ in die Gleichungen 7 bis 10 von §. 74 eingeschaltet, so erhält man

8) $Sn = y \cdot \frac{dy}{dx} = r \cdot (1 - \cos t)\ \mathrm{ctg}\,\frac{t}{2}$

$$= 2\,r \cdot \sin^2\frac{t}{2} \cdot \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = 2r \cdot \sin\frac{t}{2} \cdot \cos\frac{t}{2}$$

9) $Sn = r \cdot \sin t$

10) $St = y \cdot \frac{dx}{dy} = r \cdot (1 - \cos t)\ \mathrm{tg}\,\frac{t}{2}$

11) $N = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = r \cdot (1 - \cos t) \cdot \sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2\,\frac{t}{2}}$

$$= 2r \cdot \sin^2\frac{t}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}} = 2r.\,\sin^2\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}$$

12) $N = 2r\,.\,\sin\frac{t}{2}$

13) $T = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = r \cdot (1 - \cos t) \cdot \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{t}{2}}$

$$= 2r \cdot \sin^2\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\cos\frac{t}{2}}$$

14) $T = 2r \cdot \sin\frac{t}{2} \cdot \mathrm{tg}\,\frac{t}{2}.$

Bemerkung.

Nach Fig. 14 ist PE = MD = r . sin t. Vergleichen wir diesen Werth von PE mit dem Werthe der Subnormale in Gleichung 9), so finden wir, dass PE gleich der Subnormale ist. Hieraus folgt

1) Dass die Normale des Punktes M der Cycloide durch den **tiefsten** Punkt (E) des erzeugenden Kreises EMt geht.

2) Weil die Tangente MT ⊥ zu ME steht, so muss die Tangente des Punktes M durch den **höchsten** Punkt des erzeugenden Kreises EMT gehen.

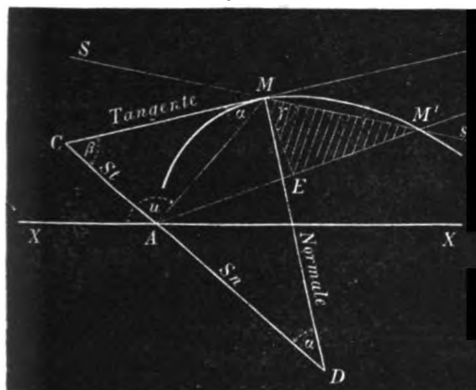
3) Aufgabe. Man soll in einem Punkte an eine Cycloide die Tangente und Normale construiren.

§. 77.

Die Curven sind bezogen auf ein Polar-Coordinaten-System.

Es sei $r = f(u)$ die Polargleichung irgend einer Curve (Fig. 15), an welche wir in dem Punkte M eine Tangente

Fig. 15.



angelegt haben. Ist nun CD normal zum Radius vector des Punktes M, also $\sphericalangle$ DAM $= 1$ R, so nennt man MC die **Polartangente**, AC die **Polar-Subtangente**, MD die **Polarnormale**, AD die **Polar-Subnormale**.

Der Winkel, den die Berührende mit dem Radius vector bildet, sei $= \alpha$; sein Complement $= \beta$; nach der Figur ist also
$$\alpha = \text{CMA}; \ \beta = \text{MCA}.$$

Um nun für T, N, St und Sn **allgemeine Formeln** aufstellen zu können, ist es nöthig, α oder β ganz allgemein als Functionen von u auszudrücken.

Zu dem Ende lassen wir den Polarwinkel u um Δu ($= \sphericalangle$ MAM') zunehmen, und setzen den neuen Radius vector
$$\text{M'A} = r + \Delta r.$$

Fällt man nun von M aus eine Normale ME auf M'A, und setzen wir $\sphericalangle$ M'ME $= \gamma$, so ist

$$1)\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{\text{M'E}}{\text{ME}} = \frac{\text{M'A}-\text{AE}}{\text{ME}} = \frac{r + \Delta r - r \cdot \cos \Delta u}{r \cdot \sin \Delta u}$$

$$2)\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{r \cdot \{1 - \cos(\Delta u)\}}{r \cdot \sin(\Delta u)} + \frac{\Delta r}{r \cdot \sin(\Delta u)}$$

$$3)\quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{2\sin^2\frac{\triangle u}{2}}{2\sin\frac{\triangle u}{2}\cos\frac{\triangle u}{2}} + \frac{\triangle r}{r\,.\,\sin(\triangle u)}$$

$$4)\quad \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\frac{\triangle u}{2} + \frac{\triangle r}{r\,.\,\triangle u}\cdot\frac{\triangle u}{\sin(\triangle u)}$$

Dieser Ausdruck für $\operatorname{tg}\gamma$ gilt für **jeden Werth** von $\triangle u$, also auch dann noch, wenn $\triangle u$ zu du wird.

In diesem Falle aber wird M'A mit MA zusammenfallen. Da nun ME **unter allen Umständen normal zu AM ist,** so wird ME parallel zu CD, wenn AM' mit AM zusammenfällt. Dies findet statt, wenn man $\triangle u$ gleich du setzt. Wenn aber ME $\|$ CD, so ist $\gamma = \beta$. Es ist also

$$5)\quad \lim\gamma = \beta.$$

Schalten wir diesen Werth von $\lim\gamma$ in Gleichung 4) ein, so folgt

$$6)\quad \operatorname{tg}\beta = \lim\left(\operatorname{tg}\frac{\triangle u}{2} + \frac{\triangle r}{r.\triangle u}\cdot\frac{\triangle u}{\sin(\triangle u)}\right)$$

Nun ist aber $\left\{\begin{array}{l}\lim\operatorname{tg}\frac{\triangle u}{2} = 0\\ \lim\frac{\triangle u}{\sin(\triangle u)} = 1\end{array}\right\}$ also

$$7)\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{dr}{r.du}, \text{ und deshalb}$$

$$8)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{r.du}{dr} = r\,.\,\frac{du}{dr}.$$

Jetzt ergiebt sich aus der Figur

$$9)\quad St = r.\operatorname{tg}\alpha = r.r\frac{du}{dr} = r^2\frac{du}{dr}$$

$$10)\quad Sn = r.\operatorname{tg}\beta = r\frac{dr}{r.du} = \frac{dr}{du}$$

$$11)\quad T = r.\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = r\,.\sqrt{1+r^2\left(\frac{du}{dr}\right)^2}$$

$$12)\quad N = r.\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta} = r\,.\sqrt{1+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{du}\right)^2} = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{du}\right)^2}.$$

§. 78.
Fortsetzung.

Man soll für einen beliebigen Punkt der Exponentialspirale ($r = e^u$) die Werthe von St, Sn, T und N ermitteln.

Auflösung. Es kommt nur darauf an, in die allgemeinen Formeln für St, Sn, T und N des vorigen §. die Werthe von $\frac{du}{dr}$ zu setzen, welche der Gleichung ($r = e^u$) unserer Curve entsprechen. Nun ergiebt sich aus der Gleichung $r = e^u$

1) $\frac{dr}{du} = e^u$, mithin ist

2) $St = r^2 . \frac{du}{dr} = r^2 . \frac{1}{e^u} = e^{2u} . \frac{1}{e^u} = e^u = r$

3) $Sn = \frac{dr}{du} = e^u = r$

d. h. die **Subtangente** und die **Subnormale** für irgend einen Punkt der Exponentialspirale sind **unter sich gleich,** nämlich **gleich dem radius vector,** der zu dem betreffenden Punkte der Curve gehört.

Wir finden weiter

4) $T = r . \sqrt{1 + r^2 . \left(\frac{du}{dr}\right)^2} = r . \sqrt{1 + r^2 . \frac{1}{e^{2u}}}$

$= r . \sqrt{1 + \frac{r^2}{r^2}} \qquad = r . \sqrt{2} = e^u . \sqrt{2}$

5) $N = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{du}\right)^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = r . \sqrt{2} = e^u . \sqrt{2}.$

Die **Tangente** und **Normale** für jeden Punkt der Exponentialspirale sind demnach auch **unter sich gleich.**

Bemerkung. Nach Gleichung 8) §. 78 ist

$\operatorname{tg} \alpha = r . \frac{du}{dr}$, also ist in unserem Falle

$\operatorname{tg} \alpha = r . \frac{1}{r} = 1$, d. h.

$\alpha = 45^0.$

Hieraus folgt, dass die Tangente für jeden Punkt der Exponentialspirale mit dem radius vector einen ∢ von 45^0 einschliesst.

Wir empfehlen dem Anfänger, sich durch Construction die Richtigkeit unserer Resultate zu veranschaulichen.

Aufgabe. Man soll Sn, St, N und T der Parabel bestimmen, wenn sie auf Polar-Coordinaten bezogen ist.

Auflösung. Die Polargleichung der Parabel ist

1) $r = \frac{\frac{1}{2}p}{1+\cos u}$, hieraus folgt 2) $\frac{dr}{du} = \frac{p \sin u}{2(1+\cos u)^2}$.

Setzen wir den Werth von $\frac{dr}{du}$ in die allgemeinen Formeln des §. 79 ein, so ergiebt sich

3) $St = r^2 . \frac{du}{dr} = \frac{p^2}{4(1+\cos u)^2} . \frac{2(1+\cos u)^2}{p \sin u} = \frac{p}{2 \sin u}$

4) $Sn = \frac{dr}{du} = \frac{p \sin u}{2(1+\cos u)^2}$

5) $T = r . \sqrt{1+r^2\left(\frac{du}{dr}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}p}{1+\cos u} . \sqrt{1+\frac{p^2}{4(1+\cos u)^2} . \frac{4(1+\cos u)^4}{p^2 . \sin^2 u}}$

$$= \frac{p}{2(1+\cos u)} . \sqrt{1+\frac{(1+\cos u)^2}{\sin^2 u}}$$

$$= \frac{p}{2(1+\cos u)} . \sqrt{\frac{\sin^2 u}{\sin^2 u}+\frac{1+2\cos u+\cos^2 u}{\sin^2 u}}$$

$$= \frac{p}{2(1+\cos u)} . \sqrt{\frac{2(1+\cos u)}{\sin^2 u}} = \frac{p}{2 \sin u} . \sqrt{\frac{2}{1+\cos u}}$$

$$= \frac{p}{2 \sin u} . \sqrt{\frac{2}{2\cos^2\frac{u}{2}}} = \frac{p}{2 \sin u} . \frac{1}{\cos\frac{u}{2}}$$

6) $N = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{du}\right)^2} = \sqrt{r^2+\frac{p^2 \sin^2 u}{4(1+\cos u)^4}}$

$$= \sqrt{\frac{p^2}{4(1+\cos u)^2}+\frac{p^2 \sin^2 u}{4(1+\cos u)^4}}$$

$$= \frac{p}{2(1+\cos u)} . \sqrt{1+\frac{\sin^2 u}{(1+\cos u)^2}}$$

$$N = \frac{p}{2(1+\cos u)} \cdot \sqrt{\frac{1+2\cos u+\cos^2 u+\sin^2 u}{(1+\cos u)^2}}$$

$$= \frac{p}{2(1+\cos u)} \cdot \sqrt{\frac{2(1+\cos u)}{(1+\cos u)^2}} = \frac{p}{2(1+\cos u)} \cdot \sqrt{\frac{2}{1+\cos u}}$$

$$= \frac{p}{4\cos^2\frac{u}{2}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{u}{2}} = \frac{p}{4\cos^3\frac{u}{2}}.$$

XII. Capitel.

Maxima und Minima.

§. 79.

Bedingungen, unter denen ein Maximum oder Minimum stattfinden kann.

Wenn die unabhängig veränderliche Grösse x, welche irgend einer Functoin $y = f(x)$ zu Grunde liegt, sich ändert, so wird sich auch $f(x)$ ändern, $f(x)$ wird entweder wachsen oder abnehmen, wenn x sich ändert. Nehmen wir nun an, dass unsere Function abwechselnd wächst und abnimmt, so wird sie für bestimmte Werthe von x aus dem Wachsen in das Abnehmen, oder aus dem Abnehmen in das Wachsen übergehen. Die Werthe der Functionen, in denen dies geschieht, nennt man resp. Maxima und Minima.

Demnach ist derjenige Werth einer Function, in welchem sie aus dem Wachsen in das Abnehmen übergeht, ein Maximum, und derjenige Werth einer Function, in welchem sie aus dem Abnehmen in das Wachsen übergeht, ist ein Minimum der Function.

Wenn z. B. die Curve in Fig. 16 der Gleichung $y = f(x)$ entspricht, so hat die Function (fx) ein **Maximum** für $x = AP'$ und $x = AP'''$, dagegen hat sie ein **Minimum** für $x = AP''$ und $x = AP''''$. Nun folgt aus §. 7, dass eine Function im

Steigen ist, wenn $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ positiv ist; dass sie dagegen fällt, wenn f'x negativ ist.

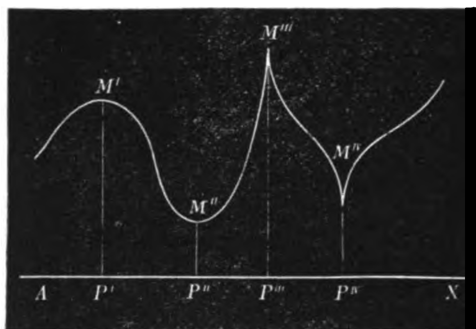


Fig. 16.

Wenn also ein **Maximum** stattfinden soll, so muss der Werth von f'x aus **plus** in **minus** übergehen; wenn dagegen ein **Minimum** stattfinden soll, so muss der Werth von f'x aus **minus** in **plus** übergehen. Hieraus folgt, dass fx **nur für diejenigen Werthe von x** ein Maximum oder Minimum geben kann, für welche die erste Abgeleitete $f'x = \frac{dy}{dx}$ einen **Zeichenwechsel** giebt. Dieser Zeichenwechsel **kann** aber nur dann stattfinden, wenn der Werth von f'x Null oder ∞ gross wird d. h. **nur für diejenigen Werthe von x, für welche f'x gleich Null oder gleich unendlich gross ist, ist ein Maximum oder Minimum möglich.**

Bemerkungen.

1) In dem Vorstehenden haben wir, ausser dem Falle, dass $f'x = \infty$ ist, alle übrigen Fälle der Discontinuität von f'x stillschweigend ausgeschlossen.

2) Wenn f'x gleich Null oder ∞ gross ist, ist ein Maximum oder Minimum **möglich**, aber nicht **nothwendig**; so ist z. B. mit Bezug auf Fig. 17

$f'x = 0$, wenn $x = AP'$

$f'x = \infty$, wenn $x = AP''$.

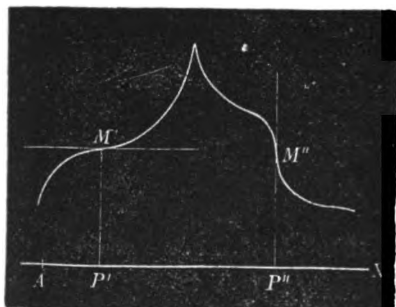


Fig. 17.

Trotzdem aber findet in beiden Fällen weder Maximum noch Minimum statt.

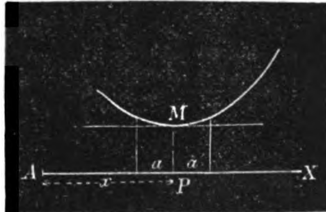
3) Die Punkte M' und M'' sind vielmehr Wendepunkte der Concavität und Convexität, wie wir später sehen werden (vergl. §. 92 ff.).

§. 80.

Fortsetzung.

Aus dem vorigen Paragraphen ergiebt sich nun folgende Regel zur Ermittelung der etwaigen **Maxima** und **Minima** einer Function $y = f(x)$.

Fig. 18.



1) **Man** ermittele diejenigen Werthe von x, für welche $f'(x)$ zu 0 oder unendlich gross wird, und

2) **untersuche** dann für diese Werthe von x die $f'(x \pm a)$. Diejenigen Werthe von x, für welche bei **hinreichend** kleinem Werthe von a, $f'(x-a)$ **negativ**

$f'(x+a)$ **positiv**

ist, geben ein **Minimum** (siehe Figur 18 und 19). Diejenigen Werthe von x dagegen, für welche bei **hinreichend** kleinem Werthe von a $f'(x - a)$ **positiv** und $f'(x+a)$ **negativ** ist, geben ein Maximum (siehe Fig. 20 und 21).

Fig. 19.

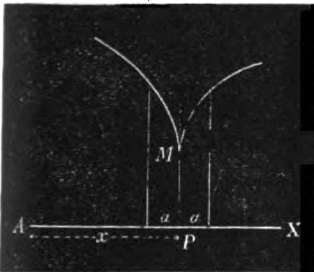


Fig. 20.

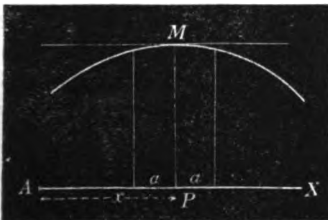
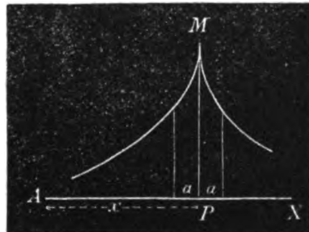


Fig. 21.



Bemerkungen.

1) **Diejenigen Werthe von x dagegen, für welche $f'(x-a)$ und $f'(x+a)$ für hinreichend kleinen Werth von a beide positiv (Fig. 22 und 23) oder beide negativ (Fig. 24 und 25) sind, geben weder Maximum noch Minimum, selbst dann nicht, wenn $f'x$ gleich 0 der ∞ ist.**

Fig. 22.

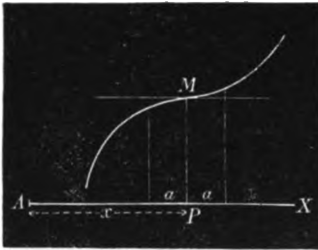


Fig. 23.

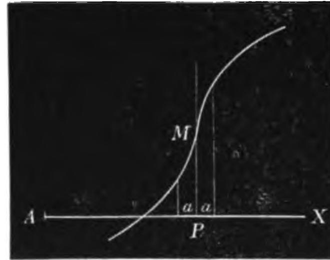


Fig. 24.

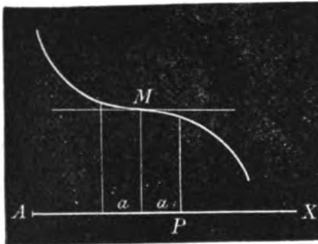
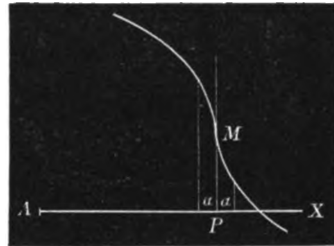


Fig. 25.



Sie geben, wenn man die Function graphisch darstellt, die Wendepunkte der Concavität und Convexität der betreffenden Curve (siehe §. 92 ff.).

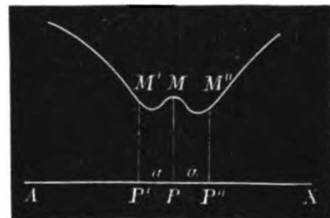
2) Wenn man für einen gewissen Werth von x aus den Zeichen von $f'(x-a)$ und $f'(x+a)$ erkennen will, ob für diesen Werth von x die $f(x)$ ein Maximum oder Minimum giebt, so ist es **nothwendig**, dass a **hinreichend klein** genommen wird.

Dies wird aus folgendem Beispiel einleuchten. Es sei (Fig. 26) die graphische Darstellung einer Function $f(x)$, so wird, wenn $x = AP$ ist, $f(x)$ ein Maximnm sein. Setzt man jetzt aber $P'P = a = PP''$, so ist

1) $f'(x-a)$ **negativ**,

2) $f'(x+a)$ **positiv**.

Fig. 26.



Würde man nun übersehen, dass in den Ausdrücken 1 und 2 der Werth von a noch nicht **hinreichend klein** ist, so würde man nach dem Vorstehenden aus den Gleichungen 1 und 2 schliessen, dass die Abscisse $x = AP$ unsere Function zu einem **Minimum** macht, während die Function in der That für diesen Werth von x ein **Maximum** giebt.

§. 81.

Aufgaben.

Aufgabe. Man soll untersuchen, für welche Werthe von x die Function $\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$ Maxima oder Minima giebt.

Auflösung. Aus der Gleichung

1) $fx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$ folgt

2) $f'x = x^2 - 6x + 5.$

Setzen wir nun $f'x = 0$, so folgt

3) $0 = x^2 - 6x + 5$

4) $(x - 5)(x - 1) = 0$

5) $x = 5$ oder $x = 1.$

Für $x = 5$ und $x = 1$ kann also **möglicherweise** ein Maximum oder Minimum stattfinden.

Nach §. 80 untersuchen wir jetzt für $x = 5$ und $x = 1$ die Werthe von $f'(x \pm a)$. Zunächst erhalten wir aus Gleichung 2)

6) $f'(5-a) = (5-a)^2 - 6(5-a) + 5 = 25 - 10a + a^2 - 30 + 6a + 5$

7) $f'(5-a) = a^2 - 4a = a(a-4).$

Ferner erhalten wir aus Gleichung 2)

8) $f'(5+a) = (5+a)^2 - 6(5+a) + 5 = 25 + 10a + a^2 - 30 - 6a + 5$

9) $f'(5+a) = 4a + a^2 = a(a+4).$

Aus den Gleichungen 7) und 9) folgt nun, dass für einen **hinreichend kleinen Werth** von a

10) $f'(5-a)$ **negativ** und

11) $f'(5+a)$ **positiv** ist.

Demnach geht unsere Function $\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$ aus dem Fallen ins Steigen über, wenn $x = 5$ ist, d. h, **die Function hat ein Minimum** für $x = 5$. Der Werth des Minimum ist also

$$y_{min} = \frac{5^3}{3} - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + 10$$

$$y_{min} = 1,66 \ldots$$

Nach Gleichung 5) wird f'x auch dann gleich Null, wenn $x = 1$. Wir haben also auch $f'(1 \pm a)$ nach Gleichung 2) zu untersuchen. Zunächst finden wir

12) $f'(1-a) = (1-a)^2 - 6(1-a) + 5 = 1 - 2a + a^2 - 6 - 6a + 5$

13) $f'(1-a) = a^2 + 4a = a(a+4)$.

Ferner ist

14) $f'(1+a) = (1+a)^2 - 6(1+a) + 5 = 1 + 2a + a^2 - 6 - 6a + 5$

15) $f'(1+a) = a^2 - 4a = a(a-4)$.

Aus den Gleichungen 13) und 15) folgt, dass für einen **hinreichend kleinen** Werth von a

$f'(1 - a)$ **positiv** und
$f'(1 + a)$ **negativ** ist,

d. h. unsere Function $\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$ giebt für $x = 1$ **ein Maximum**; also der Werth des Maximum ist

$$y_{max} = \frac{1}{3} - 3 + 5 + 10$$

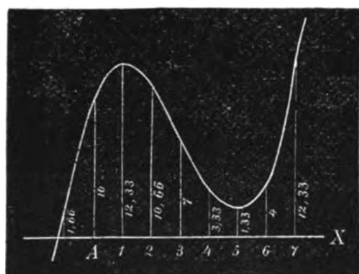
$$y_{max} = 12,33 \ldots$$

Man könnte jetzt noch fragen, für welche Werthe von x die erste Abgeleitete (f'x) unendlich gross wird. Diese Frage beantwortet sich aber nach Gleichung 2) dahin, dass es keinen endlichen Werth von x giebt, für welchen f'x unendlich gross wird. Demnach sind die Werthe $x = 5$ und $x = 1$ die **einzigen** Werthe von x, welche unsere Function $\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$ zu einem Maximum oder Minimum machen.

Bemerkung.

Man kann sich die Richtigkeit unseres Resultates auf graphischem Wege veranschaulichen. Unsere Function

Fig. 27.



$y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$ giebt

für $x = -2$; $y = -14, 66..$
„ $x = -1$; $y = +1, 66..$
„ $x = 0$; $y = +10$
„ $x = +1$; $y = +12, 33..$
„ $x = +2$; $y = +10, 66..$
„ $x = +3$; $y = +7$
„ $x = +4$; $y = +3, 33..$
„ $x = +5$; $y = +1, 66..$
„ $x = +6$; $y = +4$
„ $x = +7$; $y = +12, 33..$

Wenn wir nach diesen Angaben die Curve zeichnen, die der Gleichung

$$y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$$

entspricht, so finden wir in der That, dass sie für $x = 1$ ein **Maximum** und für $x = 5$ ein **Minimum** hat, und dass **nur für diese beiden Werthe von x** ein Maximum oder Minimum existirt.

Der Anblick der Figur lehrt ferner, dass die **Maximal-Werthe** durchaus nicht die **grössten** Functionswerthe zu sein brauchen, und dass die **Minimal-Werthe** nicht nothwendig die **kleinsten** Functionswerthe sind; sondern dass sie resp. nur grösser oder kleiner sind als ihre Nachbarwerthe.

Aufgabe. Man soll untersuchen, für welchen Werth von x die Function $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 6$ ein Maximum oder Minimum giebt.

Auflösung. Wir erhalten durch Differentiation der gegebenen Functionen

1) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 3.$

Um zu erkennen, für welche Werthe von x möglicherweise ein Maximum oder Minimum stattfinden kann, bestimmen wir denjenigen Werth von x, für welchen $\frac{dy}{dx}$ zu Null, oder unendlich gross wird.

Wir sehen nun sehr leicht, dass es keinen Werth von x giebt, für welchen $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird. Um aber diejenigen Werthe von x zu ermitteln, für welche $\frac{dy}{dx} = 0$ wird, setzen wir nach Gleichung 1)

2) $3x^2 - 6x + 3 = 0$; hieraus folgt

3) $x^2 = 2x + 1 = 0$, d. h.

4) $x = 1$.

Nun ist aber für $x = 1 - a$

5) $\frac{dy}{dx} = 3(1-a)^2 - 6 \, . \, (1-a) + 3 = 3 - 6a + 3a^2 - 6 + 6a + 3 = 3a^2$,

also für **jeden** Werth von a ist

6) $\frac{dy}{dx}$ **positiv**, wenn $x = 1 - a$.

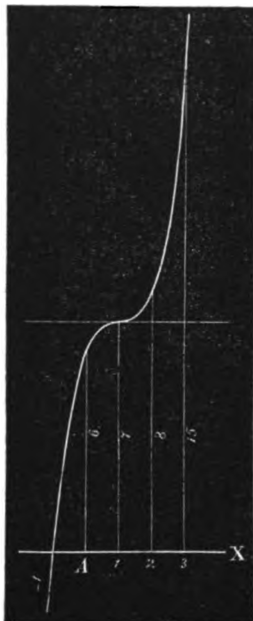
Ist aber $x = 1 + a$, so ist

7) $\frac{dy}{dx} = 3(1+a)^2 - 6 \, . \, (1+a) + 3 = 3 + 6a + 3a^2 - 6 - 6a + 3 = 3a^2$,

also ist ebenfalls für jeden Werth von a

8) $\frac{dy}{dx}$ **positiv**, wenn $x = 1 + a$.

Fig. 28.



Weil nun nach Gleichung 6) und 8), $\frac{dy}{dx}$ sowohl für $x = 1 - a$ als auch für $x = 1 + a$ positiv ist, so kann die Function nach Anmerkung 1 §. 80 für $x = 1$ **weder ein Maximum noch ein Minimum** geben (vergl. Capitel XIII).

Unsere Function hat also **überhaupt** weder Maximum noch Minimum.

Bemerkung.

Die Gleichung $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 6$ giebt

für $x = -1$, $y = -1$

„ $x = 0$, $y = 6$

„ $x = 1$, $y = 7$

„ $x = 2$, $y = 8$

„ $x = 3$, $y = 15$.

Construiren wir hiernach die Curve, welche der Gleichung

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 6$$

genügt, so finden wir bestätigt, dass unsere Function für keinen Werth von x weder Maximum noch Minimum

haben kann. Wir sehen vielmehr, dass die Curve für $x = 1$ einen Wendepunkt der Concavität und Convexität hat.

Aufgabe. Für welche Werthe von x giebt die Function $y = m - b\sqrt[5]{(x-c)^2}$ ein Maximum oder Minimum?

Auflösung. Nach einer leichten Umformung erhalten wir

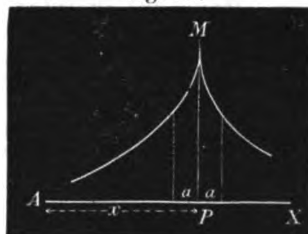


Fig. 29.

1) $y = m - b(x-c)^{\frac{2}{5}}$,

hieraus folgt

2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{5}b(x-c)^{-\frac{3}{5}}$

3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{5}\frac{b}{\sqrt[5]{(x-c)^3}}$

Es leuchtet ein, dass $\frac{dy}{dx}$ für keinen endlichen Werth von x zu Null werden kann, dagegen wird für $x = c$

4) $\frac{dy}{dx} = \infty$.

Der **einzige** Werth von x, für welchen unsere Function vielleicht ein Maximum oder Minimum haben kann, ist demnach $x = c$. Setzen wir nun in Gleichung 3) $x = c \mp a$, so erhalten wir

5) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{5}\frac{b}{\sqrt[5]{\{(c \mp a) - c\}^3}} = -\frac{2}{5}\frac{b}{\sqrt[5]{(\mp a)^3}}$.

Es ist demnach

6) $\frac{dy}{dx}$ positiv für $x = c - a$

7) $\frac{dy}{dx}$ negativ für $x = c + a$,

d. h. unsere Function

$$y = m - b\sqrt[5]{(x-c)^2}$$

giebt ein **Maximum** für $x = c$, und zwar ist

8) $y_{max} = m$.

§. 82.

Ermittelung der etwaigen Maxima und Minima mit Hülfe von $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc.

Wenn für **beliebig kleine** Werthe von a, sich $f(x \pm a)$ nach Taylors Lehrsatz in eine **convergente** Reihe verwandeln lässt, so kann man auch nach einer andern Methode die Werthe von x ermitteln, für welche fx ein Maximum oder Minimum giebt. Um diese Methode zu entwickeln, beachten wir zunächst

1) dass ein Maximum stattfindet, wenn $f(x \pm a) < f(x)$ und
2) dass ein Minimum stattfindet, wenn $f(x \pm a) > f(x)$.

Entwickeln wir nun $f(x \pm a)$ nach dem Taylorschen Lehrsatze, so ergiebt sich

3) $f(x \pm a) = fx \pm a f' x + \frac{a^2}{1.2} f'' x \pm \frac{a^3}{3!} f'''(x) + \text{etc.}$

Soll nun ein Maximum oder Minimum stattfinden, so muss nach §. 79 $f' x = 0$ sein. Wir erhalten dann aus Gleichung 3)

4) $f(x \pm a) = fx + \frac{a^2}{1.2} f''(x) \pm \frac{a^3}{3!} f'''(x) + \text{etc.}$

Wenn jetzt $f''(x)$ nicht gleich Null ist, so ergiebt sich aus No. 4 §. 55, dass a stets **so klein** genommen werden kann, dass in der vorstehenden Reihe das Glied $\frac{a^2}{1.2} f''(x)$ dem **absoluten Werthe nach grösser** ist, als die Summe aller folgenden Glieder; mithin ist

$$f(x \pm a) > f(x), \text{ wenn } f''(x) \textbf{ positiv} \text{ ist,}$$

d. h. unser Werth von x giebt ein **Minimum**, wenn $f''(x)$ **positiv** (nach Gleich. 2); dagegen ist für ein **hinreichend** kleines a

$$f(x \pm a) < f(x), \text{ wenn } f''(x) \textbf{ negativ} \text{ ist,}$$

d. h. unser Werth von x giebt ein **Maximum**, wenn $f''(x)$ **negativ** ist (nach Gleich. 1).

Resultat: Wenn für einen Werth von x) $f'x = 0$ ist, so ist fx ein Maximum, wenn $f''x$ negativ ist, dagegen ist für diesen Werth von x) fx ein Minimum, wenn $f''x$ positiv ist.

§. 83.

Fortsetzung.

Wenn ausser $f'(x)$ auch $f''(x) = 0$ wäre, so bliebe noch unentschieden, ob für unsern Werth von x ein Maximum oder Minimum oder keins von beiden stattfindet.

In diesem Falle erhalten wir aus Gleichung 4) §. 82

$$1)\quad f(x \pm a) = f(x) \pm \frac{a^3}{3!} f'''(x) + \frac{a^4}{4!} f''''(x) \pm \ldots$$

Ist nun $f'''(x)$ nicht gleich Null, so lässt sich a stets so klein machen, dass das Glied $\frac{a^3}{3!} f'''(x)$ dem absoluten Werthe nach grösser ist, als die Summe aller folgenden Glieder in unserer Reihe.

Mithin ist für einen **hinreichend kleinen** Werth von a

$$\left.\begin{array}{l} f(x+a) > f(x) \\ f(x-a) < f(x) \end{array}\right\} \text{ wenn } f'''(x) \text{ positiv ist,}$$

d. h. unser Werth von x giebt weder **Maximum** noch **Minimum**, wenn $f'''(x)$ positiv ist.

Ferner ist für einen **hinreichend kleinen** Werth von a

$$\left.\begin{array}{l} f(x+a) < fx \\ f(x-a) > fx \end{array}\right\} \text{ wenn } f'''(x) \text{ negativ ist,}$$

d. h. unser Werth von x giebt ebenfalls weder **Maximum** noch **Minimum**, wenn $f'''(x)$ negativ ist.

Wir sind also in diesem Paragraphen zu folgendem Resultate gelangt: **Wenn für irgend einen Werth von x, $f'x$ und ebenso $f''(x)$ zu Null wird, während für denselben Werth $f'''(x)$ nicht zu Null wird, so findet für diesen Werth von x weder Maximum noch Minimum statt.**

§. 84.
Fortsetzung.

Wäre aber auch $f'''(x)$ gleich Null, so wäre

$$f(x \pm a) = fx + \frac{a^4}{4!} f''''(x) \pm \frac{a^5}{5!} f'''''(x) + \dots$$

Wenn nun in dieser Reihe $f''''(x)$ für unsern Werth von x nicht zu Null wird, so könnte man a wieder so klein machen, dass in unserer Reihe das Glied $\frac{a^4}{4!} f''''(x)$ grösser ist, als die Summe aller folgenden Glieder. Für einen **hinreichend** kleinen Werth von a ist dann

$$f(x \pm a) > fx, \text{ wenn } f''''(x) \text{ positiv ist,}$$

d. h. unser Werth von x giebt ein **Minimum**, wenn $f''''(x)$ **positiv** ist.

Ferner ist für ein **hinreichend** kleines a

$$f(x \pm a) < f(x), \text{ wenn } f''''(x) \text{ negativ ist,}$$

d. h. unser Werth von x giebt ein **Maximum**, wenn $f''''(x)$ **negativ** ist.

Das Resultat dieses Paragraphen ist demnach folgendes: Wenn für irgend einen Werth von x die abgeleiteten Functionen $f'x$, $f''x$ und $f'''x$ der Reihe nach gleich Null sind, so macht der betreffende Werth von x die Function fx zu einem **Maximum**, wenn für diesen Werth von x, $f''''x$ **negativ** ist. Dagegen ist $f(x)$ ein **Minimum** für denselben Werth von x, wenn $f''''(x)$ **positiv** ist.

§. 85.
Fortsetzung.

Wäre für unsern Werth von x, d. h. **für denjenigen Werth von x, für welchen $f'x$, $f''x$ und $f'''x$ gleich Null sind,** auch $f''''x = 0$, so bliebe es noch unentschieden, ob für diesen Werth von x unsere Function $f(x)$ ein Maximum oder Minimum, oder keins von beiden gäbe. Wenn man indessen

in ganz analoger Weise die Untersuchung weiter fortführte, so würde sich Folgendes ergeben:

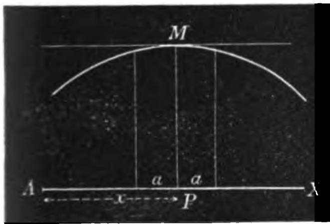
Wenn für irgend einen Werth von x, f'(x) = 0 ist, **und die erste hierauf folgende Abgeleitete, welche nicht verschwindet, von gerader Ordnung und positiv ist, so giebt die Function für diesen Werth von x ein Minimum. Ist dagegen die erste auf f'(x) folgende höhere Abgeleitete, welche nicht verschwindet, von gerader Ordnung und negativ, so hat die Function f(x) für unsern Werth von x ein Maximum. Ist endlich die erste auf f'(x) folgende höhere Abgeleitete, welche nicht verschwindet, von ungerader Ordnung, so findet für unsern Werth von x weder ein Maximum noch Minimum statt** (vergl. §. 91 ff.).

Bemerkungen.

I. Aus den Paragraphen 82 bis 85 folgt, dass vier wesentlich verschiedene Fälle eintreten können, wenn $\frac{dy}{dx} = f'x$ für irgend einen Werth von x zu Null wird.

1) Wenn für irgend einen Werth von x, welcher f'x zu Null macht

Fig. 30.



a) f''x **negativ** ist, oder

b) f''x auch gleich Null ist, und zugleich die erste höhere abgeleitete Function, welche nicht gleich Null ist, von **gerader Ordnung und dem Werthe nach negativ** ist,

so ist der entsprechende Werth der Function ein **Maximum** (siehe Fig. 30).

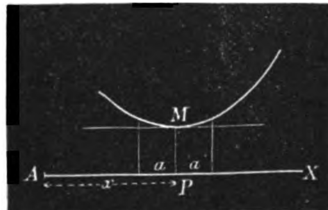
2) Wenn für irgend einen Werth von x, welcher f'x gleich Null macht,

a) f''x **positiv** ist, oder

b) auch f''x gleich Null ist, und zugleich die erste höhere abgeleitete Function, welche nicht gleich Null ist, **von gerader Ordnung und dem Werthe nach positiv** ist,

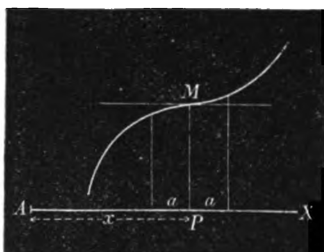
so ist der entsprechende Werth der Function ein **Minimum** (siehe Fig. 31).

Fig. 31.



3) Wenn für einen Werth von x, welcher f′x gleich Null macht, f″x = 0 ist, und

Fig. 32.



a) f‴x **positiv** ist, oder

b) die erste höhere **abgeleitete** Function, welche nicht gleich Null ist, von **ungerader Ordnung und dem Werthe nach positiv** ist,

so ist der entsprechende Werth der Function weder ein Maximum noch ein Minimum (siehe Fig. 32).

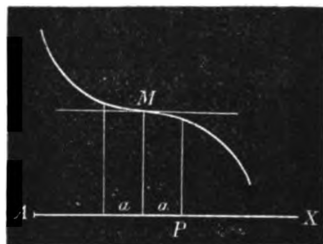
4) Wenn für einen Werth von x, welcher f′x zu Null macht, auch f″ = 0 ist, oder

a) f‴x **negativ** ist, oder

b) die erste höhere **abgeleitete** Function, welche nicht gleich Null **ist**, von **ungerader Ordnung und dem Werthe nach negativ ist,**

so **ist** der entsprechende Werth der Function weder ein Maximum noch ein Minimum (siehe Fig. 33).

Fig. 33.



II. In den Fig. 32 und 33 ist der Punkt M ein Wendepunkt. In Fig. 32 steigt die Curve bis zum Punkte M, und fängt unmittelbar hinter ihm wieder an zu steigen, im Punkte M selbst ist die Tendenz zum Steigen gleich Null, und die Curve geht in ihm aus der Convexität in die Concavität über. In Fig. 33 dagegen fällt die Curve bis unmittelbar vor dem Punkte M und fällt auch unmittelbar hinter dem Punkte M. Im Punkte M selbst ist die Tendenz zum Fallen oder Steigen gleich Null. Die Curve wendet sich in ihm aus der Concavität in die Convexität (vergl. §. 91 ff.).

III. Die Methode zur Ermittelung der etwaigen Maxima und Minima einer Function fx, welche in den §§. 82—85 entwickelt wurde, ist in den meisten Fällen die bequemere. Sie ist indessen **nur anwendbar,** wenn f′x gleich Null ist. Dagegen ist die Methode, welche §. 79 und 80 vorgetragen ist, **unter allen Umständen** anwendbar.

§. 86.

Anwendungen.

Aufgabe 1. Für welche Werthe von x giebt die Function $\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$ Minima oder Maxima?

Auflösung. Setzen wir

1) $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$, so ist

2) $\frac{dy}{dx} = x^2 - 6x + 5$

3) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 6.$

Setzen wir nun $\frac{dy}{dx} = 0$, so ergiebt sich nach Gleichung 2

4) $x^2 - 6x + 5 = 0,$

also durch Auflösung der Gleichung

5) $\begin{cases} x = 5 \\ x = 1 \end{cases}$

Da nun $\frac{dy}{dx}$ zu Null wird, wenn wir x gleich 1 oder 5 setzen, so kann für diese Werthe von x möglicherweise ein Maximum oder Minimum stattfinden.

Setzen wir sie in Gleichung 3) ein, so folgt

6) $\frac{d^2y}{dx^2} = +4$, wenn $x = 5$

7) $\frac{d^2y}{dx^2} = -4$, wenn $x = 1.$

Unsere Function $\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 19$ giebt also

für $x = 5$ ein Minimum
für $x = 1$ ein Maximum
(vergl. §. 81).

Aufgabe 2. Für welche Werthe von x giebt die Function

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 6$$

ein Maximum oder Minimum?

Auflösung. Wir haben zunächst

1) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 3$

2) $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6.$

Setzen wir nun $\frac{dy}{dx} = 0$ und lösen wir die hierdurch entstandene Gleichung

$$2)\ 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

für x auf, so finden wir $x = 1$.

Es kann also **möglicherweise** für $x = 1$, und **nur** für $x = 1$, ein Maximum oder Minimum stattfinden. Setzen wir nun diesen Werth von x in Gleichung 2) ein, so ergiebt sich für $x = 1$

$$4)\ \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Wir differentiiren nun weiter und finden aus Gleichung 2)

$$5)\ \frac{d^3y}{dx^3} = 6.$$

Wir sehen also, dass für $x = 1$, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ beide gleich Null werden, während $\frac{d^3y}{dx^3} = 6$ ist; mithin kann nach §. 85 für $x = 1$ **weder Maximum noch Minimum** stattfinden. Unsere Function $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 6$ giebt also überhaupt weder Maximum noch Minimum (vergl. §. 81 und Fig. 28).

§. 87.
Uebungsaufgaben.

1) Für welchen Werth von x giebt die Function

$$y = x^2 - 2ax + b^2$$

ein Maximum oder Minimum.

Auflösung. $x = a$ giebt ein Minimum, und es ist $y_{min} = b^2 - a^2$.

2) Wenn $y = x^2 + ax + b^2$, so giebt $x = -\frac{1}{2}a$ ein Minimum; $y_{min} = b^2 - \frac{a^2}{4}$

3) Wenn $y = x^3 - 18x^2 + 96x - 20$

so giebt $\begin{cases} x = 4 \text{ ein Maximum; } y_{max} = 140 \\ x = 8 \text{ ein Minimum; } y_{min} = 108. \end{cases}$

4) Wenn $y = A + (x - c)^4$, so giebt
$x = c$ ein Minimum und es ist $y_{min} = A$.

5) Wenn $y = A + (x - a)^5$, so giebt die Function weder Maximum noch Minimum.

6) $y = a + (x - a)^n$ giebt ein Minimum, wenn n eine gerade Zahl ist, aber weder Maximum noch Minimum, wenn n eine ungerade Zahl ist.

7) $y = x^2 (a - x)^3$ giebt für $x = 0$ ein Minimum
$x = \frac{2a}{5}$ giebt ein Maximum
$x = a$ giebt weder Maximum noch Minimum.

8) Wenn $y = (x - 1)^4 . (x + 2)^3$, so giebt
$x = -\frac{5}{7}$ ein Maximum,
$x = 1$ ein Minimum,
$x = -2$ weder Maximum noch Minimum.

9) $y = \left(\frac{a}{x}\right)^x$ giebt für $x = \frac{a}{e}$ ein Maximum.

10) $y = \frac{x}{lx}$ giebt für $x = e$ ein Minimum.

11) $y = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$ giebt ein Maximum für $x = e$.

12) $y = x^x$ giebt ein Minimum für $x = \frac{1}{e}$.

§. 88.

Rechnungsvortheil, wenn f'x eine gebrochene Function ist.

Wenn eine Function von x, z. B. fx durch einmalige Differentiation die Gleichung

$$1) \quad f'x = \frac{P}{Q} \text{ giebt,}$$

wo P und Q Functionen von x sein mögen, so wird im Allgemeinen f'x zu Null, wenn P zu Null wird.

Will man nun entscheiden, ob ein Werth von x, welcher P zu Null macht, ein Maximum oder Minimum giebt, so kann dies mit Hülfe von f''x geschehen. Wir finden in diesem Falle

$$2)\ f'x = \frac{Q.\frac{dP}{dx} = P.\frac{dQ}{dx}}{Q^2}.$$

Wegen P = 0 erhalten wir im Allgemeinen

$$3)\ f''x = \frac{1}{Q}.\frac{dP}{dx}.$$

Die Gleichung 3) bietet demnach einen **Rechnungsvortheil,** wenn man f''x bestimmen will, indem man nach dieser Gleichung nur P zu differentiiren braucht.

§. 89.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Für welchen Werth von x giebt die Function $fx = \frac{x}{1+x^2}$ ein Maximum oder Minimum?

Auflösung. Wir finden durch Differentiation

$$1)\ f'x = \frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Demnach wird f'x zu Null, wenn man setzt

$$2)\ 0 = 1 - x^2.$$

Hieraus folgt

$$3)\ \begin{cases} x = +1 \\ x = -1. \end{cases}$$

Wir bestimmen jetzt f''x und finden

$$4)\ f''x = \frac{1}{(1+x^2)^2}.(-2x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Setzen wir hierin x = +1, so wird f''x **negativ,**
setzen wir dagegen x = −1, so wird f''x **positiv.**

Unsere Function $\frac{x}{1+x^2}$ giebt also ein **Maximum,** wenn

$x = +1$, und ein **Minimum**, wenn $x = -1$. Demnach ist

$$f_{max}(x) = \tfrac{1}{2};\; f_{min}(x) = -\tfrac{1}{2}.$$

Aufgabe 2. Für welche Werthe von x giebt die Function $fx = \dfrac{2 - 3x + x^2}{2 + 3x + x^2}$ ein Maximum oder Minimum?

Auflösung. $x = +\sqrt{2}$ giebt ein Minimum,
$x = -\sqrt{2}$ giebt ein Maximum.

Aufgabe 3. Für welche Werthe von x giebt die Function $fx = \dfrac{x^3 + x}{x^4 - x^2 + 1}$ ein Maximum oder Minimum?

Auflösung. $x = 1$ giebt ein Maximum,
$x = -1$ giebt ein Minimum.

Aufgabe 4. Für welche Werthe von x giebt die Function $fx = \dfrac{x^3 - x}{x^4 - x^2 + 1}$ ein Maximum oder Minimum?

Auflösung.
$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\[2ex] x = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\} \text{giebt ein Maximum.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\[2ex] x = +\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\} \text{giebt ein Minimum.}$$

§. 90.

Aufgaben.

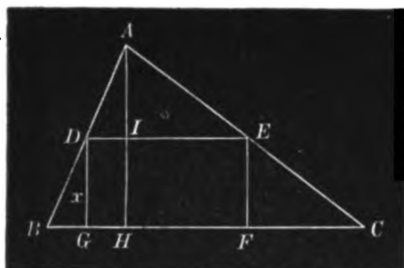
Aufgabe 1. Von einem Dreieck ist die Grundlinie $= b$ und die Höhe $= h$ gegeben. Man soll in dasselbe, wie in Figur 34 ein Rechteck so einzeichnen, dass sein Inhalt ein Maximum sei.

Auflösung. Wir setzen die Höhe irgend eines beliebigen Rechtecks $DG = x$.

$\frac{h}{h-x} = \frac{b}{DE}$

Nun ist

Fig. 34.



AH = h; BC = b

$$AJ : AH = DE : BC$$

$$h - x : h = DE : b,$$

also $DE = b . \frac{h-x}{h}$.

Mithin ist der Inhalt des Rechtecks

$$1)\quad Z = x . b \frac{h-x}{h} = \frac{b}{h} . (hx - x^2).$$

Hieraus folgt

$$2)\quad \frac{dZ}{dx} = \frac{b}{h} . (h - 2x)$$

$$3)\quad \frac{d^2Z}{dx^2} = - \frac{2b}{h}.$$

Setzen wir nun $\frac{dZ}{dx} = 0$, so folgt aus Gleichung 2)

$$4)\quad x = \frac{h}{2}.$$

Für $x = \frac{h}{2}$ ist also $\frac{dZ}{dx} = 0$, ausserdem ist $\frac{d^2Z}{dx^2}$ negativ, also findet für $x = \frac{h}{2}$ ein Maximum statt.

Das grösste unter allen Rechtecken, die sich in der angegebenen Weise in unser Dreieck einschreiben lassen, ist also dasjenige, dessen Höhe $= \frac{h}{2}$ und dessen Basis demnach $= \frac{b}{2}$ ist. Sein Flächeninhalt wird ausgedrückt durch die Gleichung $Z_{max} = \frac{h}{2} \frac{b}{2} = \frac{bh}{4}$.

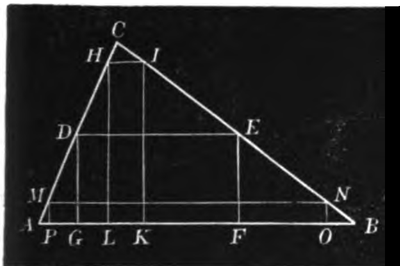
Da nun der Flächeninhalt des Dreiecks gleich $\frac{bh}{2}$ ist, so ergiebt sich, dass das grösste unter allen Rechtecken, die sich

in ein Dreieck einschreiben lassen, halb so gross ist, wie das gegebene Dreieck, oder $Z_{max} = \frac{1}{2} \triangle ABC$.

Bemerkungen.

1) In vielen Fällen erkennt man schon aus der Natur der Aufgabe, ob ein Maximum oder Minimum möglich ist. In unser Dreieck (Fig. 35) z. B. lassen sich unzählig viele Rechtecke einschreiben. Denken wir sie nun alle gezeichnet, und fangen wir bei demjenigen an, dessen Höhe = h (der Höhe des Dreiecks) ist, so finden wir, dass seine Basis = 0, also auch sein Flächen-Inhalt = 0 ist. Wenn wir nun die Höhe des Rechteckes kleiner werden lassen, so wird dessen Basis grösser. Wir gelangen auf diese Weise zu den Rechtecken HJKL, DEFG, MNOP, und endlich zu einem Rechteck, dessen Basis = b, dessen Höhe = 0, dessen Flächeninhalt also wieder gleich Null ist.

Fig. 35.



Hieraus folgt: Wenn wir uns alle Rechtecke, welche möglich sind, construirt denken, und bei dem Rechtecke anfangen, dessen Höhe gleich h ist, und die Höhe allmählig abnehmen lassen, bis sie zuletzt gleich Null wird, so werden die entsprechenden Rechtecke zuerst grösser werden, dann wieder abnehmen, und endlich wird das letzte Rechteck zu Null werden. Es muss also **wenigstens** ein Rechteck, dessen Höhe zwischen h und 0 liegt, ein **Maximum** sein; oder mit anderen Worten: Wir erkennen in diesem Falle aus der Natur der Sache, dass wenigstens ein Maximum möglich ist.

Da sich nun herausstellt, dass

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{h}(h - 2x)$$

nur für **einen einzigen Werth von x** $(x = \frac{h}{2})$ zu Null wird, so folgt, dass $x = \frac{h}{2}$ ein Maximum giebt.

2) Die Bestimmung von $\frac{d^2y}{dx^2}$ oder der höheren Abgeleiteten ist oft mühsam. Man kann dieselbe vermeiden, wenn man aus der Natur der betreffenden Function direct sehen kann, ob ein Maximum oder Minimum stattfindet.

Aufgabe 2. Man soll die Zahl a in zwei Theile theilen, so dass das Product derselben ein Maximum ist.

Auflösung. Der eine Theil sei x, so ist der andere Theil $= a - x$, also das Product dieser Theile

$$1)\quad y = x.(a - x) = ax - x^2$$

$$2)\quad \frac{dy}{dx} = a - 2x.$$

Setzen wir nun $\frac{dy}{dx} = 0$, so folgt

$$3)\quad a - 2x = 0,\ \text{also}$$

$$3)\quad x = \frac{a}{2}.$$

Differentiiren wir Gleichung 2) noch ein Mal, so finden wir

$$5)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -2.$$

Hieraus folgt, dass der Werth $x = \frac{a}{2}$ ein **Maximum** geben muss.

Wenn man also die Zahl a in zwei gleiche Theile theilt, so ist das Product $\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$ das **grösste** unter allen Producten, die sich aus zwei Theilen der Zahl a herstellen lassen.

Bemerkung.

Weil x ein Theil von a sein soll, so liegt x zwischen den Grenzen 0 und a. Setzen wir zunächst $x = 0$, so ist die Function $y = x(a - x)$ gleich Null. Lassen wir nun x alle Werthe von 0 bis a durchlaufen, so wird die Function $y = x\ (a - x)$ zuerst grösser werden, und zuletzt, wenn $x = a$ wird, wieder gleich Null werden. Unsere Function muss also für einen Werth von x, der zwischen 0 und a liegt, aus dem **Wachsen** ins **Abnehmen** übergehen.

Es lässt sich also in diesem Falle **ohne Hülfe** von $\frac{d^2y}{dy^2}$ erkennen, dass der **einzige** Werth von x, welcher $\frac{dy}{dx} = 0$ macht, d. i. $x = \frac{a}{2}$ unsere Function zu einem **Maximum** macht.

Aufgabe 3. Man soll eine absolute Zahl a so in zwei Theile theilen, dass das Product aus der 4ten Potenz des einen Theiles und der 7ten Potenz des andern Theiles ein Maximum wird.

Auflösung. Wir theilen die Zahl a wieder in die Theile x und a — x. Wir erhalten dann

1) $y = x^4 . (a-x)^7$, hieraus folgt

2) $\frac{dy}{dx} = 4x^3 . (a-x)^7 - 7x^4 (a-x)^6$.

Nun sieht man, dass $\frac{dy}{dx}$ gleich Null wird für $x = a$ und $x = 0$; für diese beiden Werthe von x kann aber kein Maximum oder Minimum stattfinden, weil sie die äussersten Grenzen der Werthe von x sind, die hier in Betracht kommen.

Aus Gleichung 2) folgt weiter, dass $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, wenn

3) $4(a-x) - 7x = 0$

4) $4a - 11x = 0$

5) $x = \frac{4}{11} a$.

Für diesen Werth von a muss ein Maximum stattfinden, wie sich dieses aus der Natur der Aufgabe ergiebt. Das Maximum unserer Function $y = x^4 . (a-x)^7$ ist demnach.

6) $y_{max} = \left(\frac{4}{11} a\right)^4 . \left(\frac{7}{11} a\right)^7$

Bemerkungen.

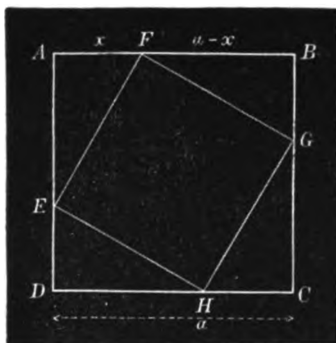
1) Wenn es nicht ohne Weiteres klar sein sollte, dass unsere Function für $x = \frac{4}{11}$ a ein **Maximum** giebt, so kann man sich durch Entwickelung von $\frac{d^2y}{dx^2}$ leicht davon überzeugen.

2) Wenn wir in Gleichung 1), $y = x^4 (a-x)^7$, y ganz allgemein als eine Function von x betrachten, so kann x jeden Werth von $-\infty$ bis $+\infty$ haben; in unserer Aufgabe dagegen, wo wir x als einen Theil der **absoluten** Zahl a auffassen, muss x nothwendig zwischen 0 und a liegen.

Eine analoge Bemerkung lässt sich an Aufgabe 2) und 4) anknüpfen.

Aufgabe 4. Man soll die Zahl a so in zwei Theile theilen, dass das Product aus der m^{ten} Potenz des einen Theiles und der n^{ten} Potenz des andern Theiles ein Maximum giebt.

Fig. 36.



Auflösung. Wenn die beiden Theile resp. x und $a - x$ sind, so giebt die Function $y = x^m \cdot (a - x)^n$ ein Maximum für $x = \frac{ma}{m+n}$.

Aufgabe 5. Man soll das kleinste unter den Quadraten bestimmen, welche sich in ein gegebenes Quadrat ABCD (Fig. 36) einschreiben lassen.

Auflösung. Es sei EFGH eins der Quadrate, welche sich in das Quadrat ABCD einschreiben lassen. Setzen wir nun

1) $AB = a$

2) $AF = x$, so ist

3) $AE = a - x$.

Es ist also $\overline{EF}^2 = x^2 + (a - x)^2$, oder wenn wir die Fläche des Quadrats EFGH = Z setzen, so ist

4) $Z = x^2 = (a - x)^2$.

Wir finden hieraus

5) $\frac{dZ}{dx} = 2x - 2(a - x)$.

Setzen wir nun $\frac{dZ}{dx} = 0$, so folgt $0 = 2x - 2a + 2x$, also

6) $x = \frac{a}{2}$.

Das eingeschriebene Quadrat (EFGH) wird demnach ein Minimum, wenn $x = \frac{a}{2}$ ist. In diesem Falle ist nach Gleichung 6)

7) $Z_{min} = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}$ ABCD.

Aufgabe 6. Man soll den grössten von allen Cylindern bestimmen, die sich in einen geraden Kegel einschreiben lassen.

Auflösung. Die Höhe des gegebenen Kegels sei h, der Radius seiner Basis sei R. Denken wir nun einen Cylinder in den Kegel einbeschrieben, und setzen wir die Höhe = y und den Radius seiner Basis = x, so ist

1) $Z = \pi x^2 . y$, aus der Figur 37 aber folgt ferner

2) $h - y : x = h : R$, also

3) $h . x = R . (h - y)$

4) $x = \frac{R}{h} (h - y)$.

Schalten wir diesen Werth von x in Gleichung 1) ein, so folgt

5) $Z = \pi \frac{R^2}{h^2} . (h - y)^2 y$

6) $Z = \pi \frac{R^2}{h^2} \{h^2 y - 2hy^2 + 3y^3\}$.

Differentiiren wir diese Gleichung, so folgt

7) $\frac{dZ}{dy} = \pi . \frac{R^2}{h^2} \{h^2 - 4hy + 3y^2\}$.

Soll ein Maximum stattfinden, so muss $\frac{dZ}{dy} = 0$ sein; wir erhalten demnach aus Gleichung 7)

Fig. 37.



8) $0 = \pi \frac{R^2}{h^2} (h^2 - 4hy + 3y^2)$

9) $0 = h^2 - 4hy + 3y^2$

10) $y^2 - \frac{4}{3} hy = - \frac{h^2}{3}$

11) $y^2 - \frac{4}{3} hy + \frac{4}{9} h^2 = \frac{h^2}{9}$

12) $y - \frac{2}{3} h = \pm \frac{h}{3}$

13) $y = \frac{1}{3} h$ oder $y = h$.

Man erkennt nun leicht aus der Natur der Aufgabe, dass für $y = h$ ein Maximum nicht möglich ist; dass aber für $y = \frac{1}{3} h$ das Maximum stattfinden muss. Ist aber $y = \frac{1}{3} h$, so ist nach Gleichung 4)

$$14)\quad x = \frac{R}{h}\frac{2}{3}h = \frac{2}{3}R.$$

Das Volumen des grössten Cylinders, der sich in den Kegel einschreiben lässt, ist also nach Gleichung 5)

$$15)\quad Z_{max} = \pi \cdot \frac{R^2}{h^2}\left(\frac{2}{3}h\right)^2 \cdot \frac{h}{3} = \pi \cdot \frac{R^2}{h^2}\frac{4}{27}h^3$$

$$16)\quad Z_{max} = \frac{4}{27}R^2 h \pi.$$

Bemerkung. Das Volumen des grössten Cylinders, der sich in einen normalen Kegel einschreiben lässt, ist demnach gleich $^4/_9$ von dem Volumen des Kegels.

Aufgabe 7. Man soll unter allen Cylindern, welche sich in einem normalen Kegel (Fig. 37) beschreiben lassen, denjenigen bestimmen, dessen Mantelfläche ein Maximum ist.

Auflösung. Ist der Radius des gesuchten Cylinders $= x$ und seine Höhe $= y$, so ist seine Mantelfläche

$$1)\quad Z = 2x\pi . y.$$

Nun ist $2)\quad x = \frac{R}{h}(h - y)$, also

$$3)\quad Z = 2\pi\frac{R}{h}(h - y) \cdot y = 2\pi\frac{R}{h}(hy - y^2).$$

Hieraus finden wir

$$4)\quad \frac{dZ}{dx} = 2\pi \cdot \frac{R}{h}(h - 2y) = 0, \text{ dies giebt}$$

$$5)\quad y = \frac{h}{2}, \text{ also}$$

$$6)\quad x = \frac{R}{2}.$$

Die Mantelfläche ist also nach Gleichung 1)

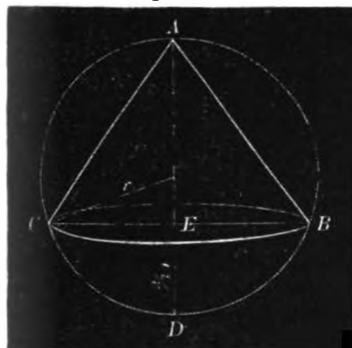
$$7)\quad Z_{max} = 2\pi \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{R}{2} = \frac{h \cdot R\pi}{2}.$$

Bemerkung.

Wenn in dem Producte afx der Factor a eine positive constante Zahl ist, so giebt fx für denselben Werth von x ein Maximum, für welchen das Product afx ein Maximum giebt. Bei der Bestimmung des Werthes

von x, für welchen $a f x$ ein Maximum wird, kann man also a ganz vernachlässigen.

Fig. 38.



Hiernach hätten wir also, um den Werth von y zu bestimmen, für welchen Z in Gleichung 3) zu einem Maximum wird, statt des Ausdruckes $2\pi \frac{R}{h} (hy - y^2)$ nur den Ausdruck $(hy - y^2)$ zu untersuchen brauchen.

Aufgabe 8. Man soll in einer Kugel einen geraden Kegel construiren, dessen Mantelfläche ein Maximum ist.

Auflösung. Wenn $DE = \frac{2}{3}$ r ist, so ist die Mantelfläche ein Maximum.

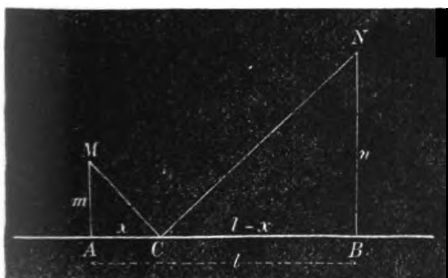
Aufgabe 9. Man soll unter allen Rechtecken von gleichem Umfange (p) dasjenige bestimmen, welches den grössten Inhalt hat.

Auflösung. Das gesuchte Rechteck ist ein Quadrat, dessen Seite $s = \frac{p}{4}$ ist. (Man setze $p = 2a$ und vergl. Aufg. 2).

Aufgabe 10. In Figur 39 sei $AB = l$, $AM = m$, $BN = n$. Man soll die Lage des Punktes C so auf der Linie AB bestimmen, dass $\overline{CM}^2 + \overline{CN}^2$ ein Minimum sei.

Auflösung. Wenn $\overline{MC}^2 + \overline{NC}^2$ ein Minimum sein soll, so muss $AC = \frac{l}{2}$ sein, d. h. C muss die Mitte von AB sein.

Fig. 39.



Aufgabe 11. Man soll in Figur 39 die Lage des Punktes C auf der Linie AB so bestimmen, dass $MC + NC$ ein Minimum ist.

Auflösung. $MC + NC$ ist ein Minimum, wenn der Punkt C eine solche Lage hat, dass

$$\left.\begin{array}{l} AC = \frac{m}{m+n} l \\ BC = \frac{n}{m+n} l \end{array}\right\} \text{ist.}$$

Bemerkung.

Aus unserer Auflösung folgt

$AC:BC = m:n$, also $\triangle ACM \backsim BCN$, mithin ist $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BCM$.

Unsere gebrochene Linie NCM bezeichnet demnach den Weg, den ein Lichtstrahl nehmen würde, der von dem Punkte N ausgehend auf AB träfe, und von AB nach M reflectirt würde. **Dieser Weg ist demnach ein Minimum.**

XIII. Capitel.

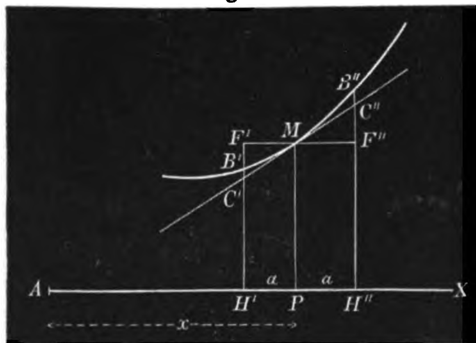
Concavität, Convexität, Wendepunkte.

§. 91.

Erklärung der Concavität, Convexität und der Wendepunkte.

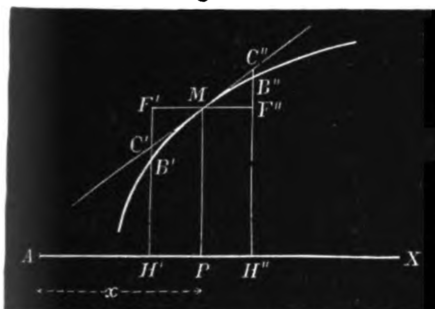
Legt man durch einen Punkt M einer Curve an dieselbe eine Tangente, so ist die Curve in diesem Punkte (M) **concav nach oben**, wenn die Curve in der Nähe des Berührungspunktes auf beiden Seiten von diesem Punkte (M) **oberhalb** der Tangente liegt. Dagegen ist eine Curve (Fig. 41) in dem Punkte M **convex nach oben**, wenn

Fig. 40.



ihre Punkte B' und B" in der Nähe des Punktes M **unterhalb** derjenigen Tangente liegen, die man durch den Punkt M an die Curve legen kann.

Fig. 41.



Der Punkt M (Fig. 42 und 43), in welchem die Curve aus Concavität in Convexität oder aus Convexität in Concavität übergeht, heisst ein **Wendepunkt.** Hieraus folgt, wenn man

Fig. 42.

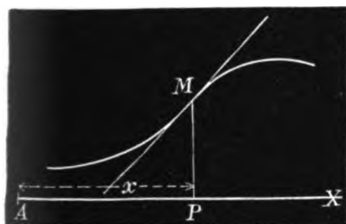
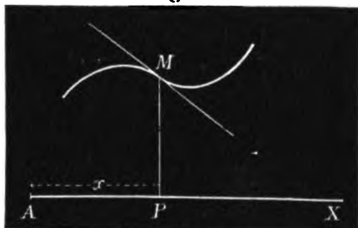


Fig. 43.



in einem Wendepunkte an die Curve eine Tangente legt, so liegen die benachbarten Punkte der Curve auf der einen Seite derselben oberhalb dieser Tangente, auf der andern Seite unterhalb derselben.

§. 92.

Kennzeichen für die Concavität und Convexität einer Curve und für die etwaigen Wendepunkte derselben.

Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve (Fig. 40), welche in dem Punkte M nach oben hin concav ist, so ist nach §. 91 bei **hinreichend** kleinem Werthe von a

$$\text{I.} \left.\begin{matrix} B''H'' - C''H'' \\ B'H' - C'H' \end{matrix}\right\} \text{positiv.}$$

Nun ist

1) $B''H'' = f(x + a)$
2) $C''H'' = F''H'' + C''F'' = MP + C''F''$.

Hieraus folgt

$$3)\ B''H'' = fx + af'x + \frac{a^2}{1.2}f''x + \frac{a^3}{1.2.3}f'''x + \dots$$

$$4)\ C''H'' = fx + af'x.$$

Subtrahiren wir nun Gleichung 4) von Gleichung 3), so ergiebt sich

$$5)\ B''H'' - C''H'' = \frac{a^2}{2!}f''x + \frac{a^3}{3!}f'x + \dots$$

In ähnlicher Weise erhalten wir

$$6)\ B'H' = fx - af'x + \frac{a^2}{2!}f''x - \frac{a^3}{3!}f'''x + \dots$$

$$7)\ C'H' = fx - af'x.$$

Hieraus erhalten wir wieder durch Subtraction

$$8)\ B'H' - C'H' = \frac{a^2}{2!}f''x - \frac{a^3}{3!}f'''x + \dots$$

Fassen wir nun die Bedingung, welche in I für die Concavität aufgestellt ist, mit den Gleichungen 5) und 8) zusammen, so folgt, dass eine Curve concav nach oben ist, wenn für hinreichend kleine Werthe von a die Reihe

$$9)\ \frac{a^2}{2!}f''x \pm \frac{a^3}{3!}f'''x + \frac{a^4}{4!}f''''x \pm \dots$$

positiv ist. Ist nun die Reihe convergent und a hinreichend klein, so ist dieses nach §. 55 No. 4 der Fall, wenn $f''x$ positiv ist. Hiermit ist also nachgewiesen, dass unsere Curve **im Punkte M concav nach oben ist, wenn für denjenigen Werth von x, welcher dem Punkte M entspricht, der Werth von f'' x positiv ist.**

Ist die Curve (Fig. 41) im Punkte M convex nach oben, so ist

$$\text{II.}\ \left.\begin{matrix} B''H'' - C''H'' \\ B'H' - C'H' \end{matrix}\right\}\ \text{negativ.}$$

Nun ist wieder

$$10)\ B''H'' = fx + af'x + \frac{a^2}{1.2}f''x + \frac{a^3}{3!}f'''x + \dots$$

11) $C''H'' = fx + af'x$, also

12) $B''H'' - C''H'' = \frac{a^2}{1.2} f''x + \frac{a^3}{3!} f'''x + ..$

Ferner ist

13) $B'H' = fx - af'x + \frac{a^2}{1.2} f''x - \frac{a^3}{3!} f'''x + \ldots$

14) $C'H' = fx - af'x$, also folgt durch Subtraction

15) $B'H' - C'H' = \frac{a^2}{1.2} f''x - \frac{a^3}{3!} f'''x + \ldots$

Aus den Ausdrücken in II., 12 und 15 folgt also, dass die Curve im Punkte M convex nach oben ist, wenn für einen **hinreichend kleinen** Werth von a die Reihe

16) $\frac{a^2}{1.2} f''x \pm \frac{a^3}{3!} f'''x + \frac{a^4}{4!} f''''x \pm \ldots$

negativ ist. Ist nun die Reihe convergent, so ist dieses der Fall, wenn $f''x$ negativ ist, d. h. unsere **Curve ist im Punkte M convex nach oben, wenn für den Werth der Abscisse, welche dem Punkte M entspricht, $f''x$ negativ wird.**

§. 93.

Fortsetzung.

In dem vorigen Paragraphen haben wir den Fall ausgeschlossen, dass $f''(x) = 0$ ist, und ebenso haben wir den Fall nicht betrachtet, dass $f''(x) = \infty$ ist.*) **Beide Fälle können im Allgemeinen nur für ganz bestimmte Werthe von x eintreten.** Ist nun für besondere Werthe von x der Werth von $f''(x)$ gleich Null oder **unendlich gross**, so können, unter der Voraussetzung, dass $f''(x-a)$ und $f''(x+a)$ noch reell bleiben, folgende 4 Fälle stattfinden.

*) Vergl. Bemerkung 1) zu §. 79.

$$f''(x) = 0 \text{ oder } f''(x) = \infty \left\{ \begin{array}{lll} \text{I.} & \left\{\begin{array}{l} f''(x-a) \text{ ist } \mathbf{positiv} \\ f''(x+a) \text{ ist } \mathbf{negativ} \end{array}\right\} & \text{(Fig. 42 und 23).} \\ \text{II.} & \left\{\begin{array}{l} f''(x-a) \text{ ist } \mathbf{negativ} \\ f''(x+a) \text{ ist } \mathbf{positiv} \end{array}\right\} & \text{(Fig. 43 und 25).} \\ \text{III.} & f''(x \mp a) \text{ ist } \mathbf{positiv} & \text{(Fig. 44 und 21).} \\ \text{IV.} & f''(x \mp a) \text{ ist } \mathbf{negativ} & \text{(Fig. 45 und 19).} \end{array}\right.$$

Findet der Fall 1 für **beliebig kleine** Werthe von a statt, so folgt ohne Weiteres nach §. 92, dass die Curve, welche der Gleichung $y = f(x)$ entspricht, **unmittelbar** vor dem Punkte, dessen Abscisse gleich x ist, **concav** ist, dass sie dagegen **unmittelbar** hinter diesem Punkte convex ist. **Wenn demnach für irgend einen Werth von x bei hinreichend kleinem Werthe von a**

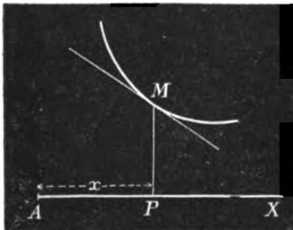
$$\text{I.} \left\{\begin{array}{l} f''(x-a) \ \mathbf{positiv} \\ f''(x+a) \ \mathbf{negativ} \text{ ist} \end{array}\right\} \text{(siehe Fig. 42 und 23),}$$

so hat die Curve in dem Punkte, dessen Abscisse = x ist, einen Wendepunkt, und zwar geht sie in diesem Punkte von der Concavität in die Convexität über. Ist dagegen bei **beliebig kleinem** Werthe von a

$$\text{II.} \left\{\begin{array}{l} f''(x-a) \ \mathbf{negativ} \\ f''(x+a) \ \mathbf{positiv} \end{array}\right\} \text{(siehe Fig. 43 und 25),}$$

so folgt aus §. 92, dass die Curve **unmittelbar vor** dem Punkte, dessen Abscisse = x ist, convex ist, und dass sie **unmittelbar hinter** diesem Punkte concav ist. **Wir haben also auch in diesem Falle (II) einen Wendepunkt, und zwar geht die Curve in unserm Wendepunkte aus der Convexität in die Concavität über.**

Fig. 44.



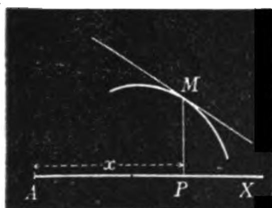
Ist ferner für **beliebig kleine** Werthe von a

III. $f''(x \mp a)$ **positiv** (Fig. 44 und Fig. 21),

so ist unsere Curve ($y = fx$) sowohl **unmittelbar** vor diesem

Punkte als auch unmittelbar nach demselben concav, d. h. unsere Curve hat in dem genannten Punkte **keinen Wendepunkt** der Concavität und Convexität. Ist endlich für **beliebig kleine** Werthe von a

Fig. 45.



IV. $f(x \mp a)$ **negativ** (Fig. 45 und Fig. 19),

so ergiebt sich in ganz ähnlicher Weise, dass unsere Curve $(y = fx)$ in dem entsprechenden Punkte, dessen Abscisse = x ist, **keinen Wendepunkt** hat.

§. 94.

Ermittelung der etwaigen Wendepunkte einer Curve.

Nach dem vorigen Paragraphen lassen sich nun leicht die etwaigen Wendepunkte einer Curve $(y = fx)$ bestimmen. Man ermittele nämlich die Werthe von x, für welche $f''(x)$ gleich Null oder unendlich gross ist, und untersuche für die hierdurch gefundenen Werthe von x die Ausdrücke $f(x - a)$ und $f(x + a)$.

Wenn nun für diese Werthe von x und **beliebig kleinen** Werth von a

$$\text{I. } \begin{cases} f(x - a) \text{ positiv} \\ f(x + a) \text{ negativ} \end{cases}$$

ist, so **giebt der betreffende Werth von x einen Wendepunkt, und zwar geht die Curve in ihm von der Concavität in die Convexität über** (Fig. 42 und 23).

Wenn aber für **beliebig kleinen** Werth von a

$$\text{II. } \begin{cases} f(x - a) \text{ negativ} \\ f(x + a) \text{ positiv} \end{cases}$$

ist, **giebt der betreffende Werth von x ebenfalls einen Wendepunkt, und zwar geht in ihm die Curve aus der Convexität in die Concavität über** (Fig. 43 und 25).

Ist endlich

III. $f(x \mp a)$ **negativ,**

IV. $f(x \mp a)$ **positiv,**

so giebt der betreffende Werth von x keinen Wendepunkt. Im Fall III ist die Curve vor und hinter unserm Punkte concav (Fig. 44 und Fig. 21). Im Fall IV ist die Curve vor und hinter unserm Punkte convex (Fig. 45 und Fig. 19).

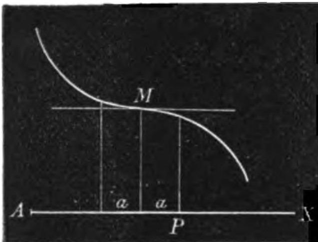
§. 95.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die etwaigen Wendepunkte der Curve $y = b + (c - x)^3$ bestimmen.

Auflösung. Aus der Gleichung

Fig. 46.



AP = c; MP = b.

1) $y = b + (c - x)^3$ folgt

2) $\frac{dy}{dx} = -3\,(c - x)^2$

3) $\frac{d^2y}{dx^2} = 6\,(c - x)$

Aus Gleichung 3) erkennen wir, dass es keinen endlichen Werth von x giebt, für welchen $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$ wird. Wir sehen aber auch, dass $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ wird, wenn man $x = c$ setzt.

Der Punkt M, dessen Abscisse $x = c$ ist, kann also **vielleicht** einen Wendepunkt geben. Um nun zu untersuchen, ob für $x = c$ wirklich ein Wendepunkt existirt, setzen wir in Gleichung 3, $x = c \mp a$ und finden dann

$$4)\ \frac{d^2y}{dx^2} = 6\,\{c - (c \mp a)\} = \pm 6a.$$

Aus Gleichung 4) folgt also, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ **positiv** ist, wenn $x = c - a$ ist, und dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist, wenn $x = c + a$ ist.

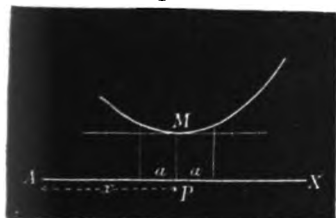
Da dies für beliebige Werthe von a gilt, gilt es sicher auch für **beliebig kleine** Werthe von a. **Unmittelbar** vor dem Punkte M, dessen Abscisse $x = c$ ist, ist unsere Curve also concav, und **unmittelbar** hinter diesem Punkte ist sie **convex**, d. h. der Punkt M ist ein Wendepunkt, und zwar geht die Curve in ihm von der Concavität in Convexität über.

Bemerkung.

Um die etwaigen Wendepunkte zu bestimmen, hätte man auch untersuchen können, zwischen welchen Grenzen von x unsere Curve concav oder convex ist. Wir finden aus unserer Gleichung 3), $\frac{d^2y}{dx^2} = 6.(c - x)$. Hieraus folgt, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ **positiv** ist, so lange x **kleiner als** c; und dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ **negativ** ist, wenn x **grösser als** c ist; d. h. so lange x kleiner ist als c, ist die Curve concav, wenn aber x grösser ist als c, so ist die Curve convex. Unsere Curve wird also in dem Punkte M, dessen Abscisse $x = c$ ist, aus der Concavität in die Convexität übergehen; d. h. sie hat in dem Punkte M einen Wendepunkt.

Aufgabe 2. Die Gleichung

Fig. 47.



$AP = c$; $MP = b$.

$$1)\quad y = b + (x - c)^4 \text{ giebt}$$

$$2)\quad \frac{dy}{dx} = 4\,(x - c)^3$$

$$3)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 12\,(x - c)^2$$

Für $x = c$ ist wieder $\frac{d^2x}{dx^2} = 0$.

Wenn also unsere Curve einen Wendepunkt hat, so ist dies der Punkt M, dessen Abscisse $x = c$ ist. Um dies nun zu untersuchen, setzen wir in Gleichung 3) $x = c \mp a$, wir erhalten dann

$$4)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 12\,(c \mp a - c)^2 = 12(\mp a)^2 = + 12a^2.$$

Wir sehen aus dieser Gleichung, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ **positiv** ist

sowohl für $x = c - a$

als auch für $x = c + a$.

Unsere Curve ist also sowohl **unmittelbar** vor dem Punkte M, als **unmittelbar** hinter dem Punkte M concav, demnach kann der Punkt M kein Wendepunkt sein, d. h. unsere Curve hat überhaupt keinen Wendepunkt.

Bemerkungen.

1) Aus Gleichung 3) folgt, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ für jeden Werth von x positiv ist, dass also unsere Curve **für jeden Werth von x concav sein muss.** Hieraus würde schon folgen, dass die Curve keinen Wendepunkt hat, weil ja der Wendepunkt einer Curve **derjenige Punkt** ist, in welchem sie von der Concavität in die Convexität, oder aus der Convexität in die Concavität übergeht.

2) Wir machen darauf aufmerksam, dass die Gleichungen der Curven in Fig. 46 und 47 sehr nahe übereinstimmen, während die Curven selbst sehr verschieden sind.

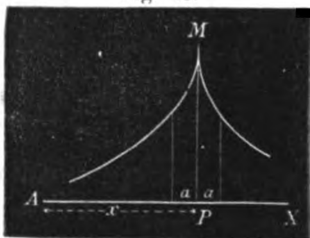
Aufgabe 3. Man soll die etwaigen Wendepunkte der Curven bestimmen, deren Gleichungen, wie folgt, gegeben sind

$$\text{I. } y = m - b\sqrt[5]{(x-c)^2} \text{ (Fig. 48).}$$

$$\text{II. } x = m - b\sqrt[5]{(x-c)^3} \text{ (Fig. 49).}$$

Auflösung. Die Gleichung I in anderer Form geschrieben giebt 1) $y = m - b(x-c)^{2/5}$,

Fig. 48.



AP = c; MP = m.

hieraus folgt

$$2)\ \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{5}b(x-c)^{-3/5}$$

$$3)\ \frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{6}{25}b(x-c)^{-8/5}$$

oder

$$4)\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6}{25}\cdot\frac{b}{\sqrt[5]{x-c)^8}}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass für keinen endlichen Werth von x, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ werden kann, dass aber für $x = c$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$ wird.

Es wäre also noch weiter zu untersuchen, ob unsere

Curve für $x = c$ einen Wendepunkt hat. Man erkennt jedoch ohne Weiteres, dass $(x - c)^8$ für jeden Werth von x positiv ist; und hieraus folgt wieder, dass $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6}{25} \cdot \frac{b}{\sqrt[5]{(x-c)^8}}$ für jeden Werth von x positiv ist, dass also unsere Curve für jeden Werth von x concav ist, und deshalb keinen Wendepunkt haben kann (vergl. die Bemerkung 1 zu Aufgabe 2).

Aus Gleichung II folgt

1) $y = m - b(x-c)^{3/5}$

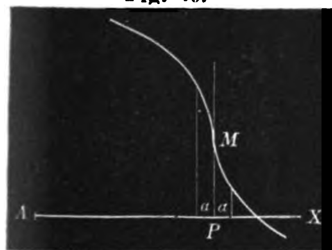
2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{5} b (x-c)^{-2/5}$

3) $\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{6}{25} b (x-c)^{-7/5} = \frac{6}{25} \cdot \frac{b}{\sqrt[5]{(x-c)^7}}$

Aus Gleichung 3) folgt $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$, wenn $x = c$ ist.

In der That giebt diese Curve auch für $x = c$ einen Wendepunkt. Wir erkennen dies ohne Weiteres schon daraus, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist, wenn $x < c$, und dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, wenn $x > c$, dass also unsere Curve vor dem Punkte M, dessen Abscisse $x = c$ convex, und hinter diesem Punkte concav ist.

Fig. 49.



AP = c; MP = m.

Bemerkungen.

1) Die Betrachtung der Curven (Fig. 48 und 49) und ihrer Gleichungen

$$\text{I. } y = m - b\sqrt[5]{(x-c)^8}$$

$$\text{II. } y = m - b\sqrt[5]{(x-c)^3}$$

zeigt, wie verschieden zwei Curven sein können, selbst wenn ihre Glei-

chungen nur sehr wenig von einander abweichen (vergl. die Figuren 46 und 47 und deren Gleichungen.)

2) Im Anhange werden wir auf einem andern Wege zeigen, dass eine Curve ($y = fx$), concav nach oben ist, wenn $f''x$ positiv ist, etc.

XIV. Capitel.

Bestimmung der Eigenschaften von Curven aus ihren Gleichungen.

§. 96.

Durch die Gleichung einer Curve sind alle Eigenschaften derselben gegeben.

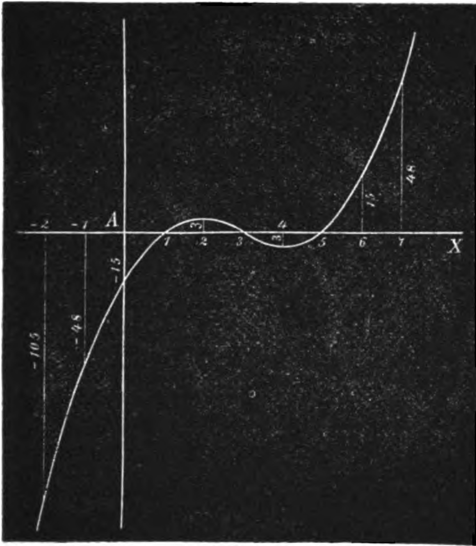
Wenn irgend eine Gleichung zwischen den Variabeln x und y gegeben ist, z. B. die Gleichung $y = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$, so lassen sich für beliebige Werthe von x die zugehörigen Werthe von y berechnen.

Unsere Gleichung giebt z. B.

für $x = -2$; $y = -105$
„ $x = -1$; $y = -48$
„ $x = 0$; $y = -15$
„ $x = 1$; $y = 0$
„ $x = 2$; $y = 3$
„ $x = 3$; $y = 0$
„ $x = 4$; $y = -3$
„ $x = 5$; $y = 0$
„ $x = 6$; $y = 15$
„ $x = 7$; $y = 48$
etc. etc.

Wird nun unsere Gleichung als Gleichung einer Curve aufgefasst, so lässt sich hiernach unsere Curve zeichnen, wie Fig. 50 zeigt.

Fig 50.



$x = 0$ giebt $y = -15$;
$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 5 \end{array}\right\}$ giebt $y = 0$;

$\left\{\begin{array}{l} y = x^3 - 9x^2 + 23x - 15 \\ x = 3 - \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ giebt ein Maximum} \\ x = 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ giebt ein Minimum} \\ x = 3 \text{ giebt einen Wendepunkt.} \end{array}\right.$

Durch die Gleichung einer Curve ist also die Curve selbst bestimmt, und man erkennt leicht, dass es möglich ist, **aus der Gleichung einer Curve sämmtliche Eigenschaften derselben zu bestimmen.**

Die Bestimmung der Eigenschaften einer Curve aus ihrer Gleichung nennt man die Discussion dieser Gleichung oder die Discussion der zugehörigen Curve.

§. 97.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Curve discutiren, welche der Gleichung $y = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ entspricht (s. Fig. 50).

Auflösung. Zunächst ist uns gegeben

1) $y = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$, hieraus folgt

2) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 18x + 23$

3) $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 18.$

Aus der Gleichung 1) finden wir die Durchschnittspunkte unserer Curve mit den Coordinatenachsen. Die Durchschnitts-

punkte mit der Abscissenachse ergeben sich, wenn wir in Gleichung 1), $y = 0$ setzen. Wir erhalten dadurch

$$4)\quad 0 = x^3 - 9x^2 + 23x - 15.$$

Lösen wir diese Gleichung für x auf, so finden wir

$$5)\quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 5. \end{cases}$$

Unsere Curve schneidet also die Abscissenachse drei Mal, und zwar in Punkten, für welche x resp. gleich 1, 3 und 5 ist. Die etwaigen Durchschnittspunkte unserer Curve mit der Ordinatenachse ergeben sich aus Gleichung 1), wenn man in derselben $x = 0$ setzt.

Wir finden in diesem Falle

$$y = -15,$$

d. h. **unsere Curve schneidet die Ordinatenachse ein Mal, und zwar in einem Punkte, welcher um 15 Einheiten unter dem Anfangspunkte liegt.**

Die Neigung der Curve gegen die Abscissenachse finden wir aus dem Werthe von $\frac{dy}{dx}$. Nach Gleichung 2) ist

$$6)\quad \frac{dy}{dx} = 3\left(x^2 - 6x + \frac{23}{3}\right), \text{ also}$$

$$7)\quad \frac{dy}{dx} = 3\left(x - 3 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(x - 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Die Factoren in den Klammern sind

beide positiv, wenn $x > 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ und

beide negativ, wenn $x < 3 - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Hieraus folgt, dass

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(x - 3 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(x - 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

positiv ist, wenn $x > 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ und wenn $x < 3 - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Unsere Curve steigt also für jeden Werth von x, der kleiner ist als $3-\frac{2}{\sqrt{3}}$ und der grösser ist als $3+\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Aus Gleichung 7) folgt nun weiter, dass $\frac{dy}{dx}$ negativ ist für diejenigen Werthe von x, welche zwischen $3-\frac{2}{\sqrt{3}}$ und $3+\frac{2}{\sqrt{3}}$ liegen, **unsere Curve fällt also in denjenigen Punkten, für welche x zwischen $3-\frac{2}{\sqrt{3}}$ und $3+\frac{2}{\sqrt{3}}$ liegt.**

Hieraus folgt weiter, dass unsere Curve aus dem Steigen in das Fallen übergeht, wenn $x=3-\frac{2}{\sqrt{3}}$ und dass sie aus dem Fallen ins Steigen übergeht, wenn $x=3+\frac{2}{\sqrt{3}}$; **sie giebt also ein Maximum, wenn $x=3-\frac{2}{\sqrt{3}}$,**

und ein Minimum, wenn $x=3+\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Aus Gleichung 3) $\frac{d^2y}{dx^2}=6x-18$ folgt, dass

$\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist, wenn $x<3$, und dass

$\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, wenn $x>3$.

Unsere Curve ist also convex für alle Werthe von x, welche zwischen $-\infty$ und $+3$ liegen; dagegen ist sie concav für alle Werthe von x, welche zwischen $+3$ und $+\infty$ liegen.

Die Curve geht also in dem Punkte, in welchem $x=3$ ist, aus der Convexität in die Concavität über; d. h. **sie hat für $x=3$ einen Wendepunkt.**

Bemerkung. Der Anfänger verfehle ja nicht, die Resultate der Rechnung an Fig. 50 sich zu veranschaulichen.

Aufgabe 2. Es ist eine Curve gegeben durch die Gleichung $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 9$. **Man soll**

1) **den Lauf der Curve bestimmen in dem Punkte, dessen Abscisse $x = 3$;**
2) **den Punkt bestimmen, in welchem die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels $= 2$ ist;**
3) **die etwaigen Wendepunkte bestimmen.**

Auflösung. Aus der Gleichung

$$1)\quad y = x^3 - 2x^2 - 7x + 9 \text{ folgt}$$

$$2)\quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x - 7$$

$$3)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 4.$$

Setzen wir nun in Gleichung 1) $x = 3$, so finden wir

$$y = 27 - 18 - 21 + 9 = -3.$$

Der Punkt M, dessen Abscisse $x = 3$ ist, hat also eine Ordinate $y = -3$.

Nach Gleichung 2) ist für $x = 3$

$$4)\quad \frac{dy}{dx} = 27 - 12 - 7 = 8,$$

d. h. **unsere Curve steigt in dem Punkte,** dessen Abscisse $= 3$ ist, und zwar ist für diesen Punkt $\operatorname{tg} \alpha = 8$.

Aus Gleichung 3) folgt endlich, dass für $x = 3$

$$5)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 18 - 4 = +14$$

ist, d. h. **die Curve ist in unserm Punkte M concav.**

Auflösung 2. Um den Punkt zu bestimmen, für den die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels $= 2$ ist, setze man in Gleichung 2) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = 2$, so erhält man die Gleichung

$$6)\quad 2 = 3x^2 - 4x - 7$$

$$x^2 - \frac{4}{3}x - 3 = 0$$

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = 3 + \frac{4}{9} = \frac{31}{9}$$

$$x - \frac{2}{3} = \pm \frac{\sqrt{31}}{3}$$

$$7)\ x = \frac{2 \pm \sqrt{31}}{2},$$

d. h. **es giebt 2 Punkte, in denen die Tangente des Neigungswinkels unserer Curve gleich 2 ist, und dies sind die Punkte, deren Abscisse resp.** $\frac{2 + \sqrt{31}}{3}$ **und** $\frac{2 - \sqrt{31}}{3}$ **ist.**

Auflösung 3. Um die etwaigen Wendepunkte zu bestimmen, suche man diejenigen Werthe von x auf, für welche $\frac{d^2y}{dx^2}$ entweder gleich Null oder unendlich gross ist. Nun ist nach Gleichung 3) $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 4$. Wir sehen hieraus, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ für keinen endlichen Werth von x unendlich gross wird, wohl aber, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu Null wird für $x = \frac{2}{3}$. **Der Punkt unserer Curve, welcher diesem Werthe von x entspricht, ist ein Wendepunkt,** weil $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist, wenn $x < \frac{2}{3}$ und positiv, wenn $x > \frac{2}{3}$.

Bemerkung. Wir empfehlen dem Anfänger, die Curve zu construiren, welche der Gleichung $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 9$ entspricht, und das Resultat unserer analytischen Untersuchung auf graphischem Wege zu prüfen.

Aufgabe 3. Man soll die Curve discutiren, deren Gleichung $y = \frac{a^2x}{(x-a)^2}$ ist.

Auflösung. Aus unserer Gleichung

$$1)\quad y = \frac{a^3x}{(x-a)^2}$$ erhalten wir

$$2)\ \frac{dy}{dx} = \frac{(x-a)^2 . a^2 - 2a^2x(x-a)}{(x-a)^4} = \frac{(x-a) . a^2 - 2a^2x}{(x-a)^3}$$

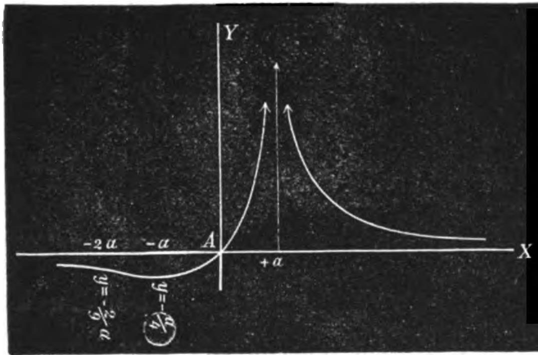
$$= -a^2 \frac{a+x}{(x-a)^3}$$

$$3)\ \frac{d^2y}{dx^2} = -a^2 \left\{ \frac{(x-a)^3 - 3(x-a)^2 . (a+x)}{(x-a)^6} \right\}$$

$$= -a^2 \frac{x-a-3a-3x}{(x-a)^4} = 2a^2 \frac{2a+x}{(x-a)^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a^2 . \frac{2a+x}{(x-a)^4} .$$

Fig. 51.



$x = -2a$ Wendepunkt
$x = -a$ Minimum.
$x = a,\ y = \infty$ (Max.)

Um nun die etwaigen Durchschnittspunkte mit der Abscissenachse zu finden, setzen wir in Gleichung 1) $y = 0$; wir erhalten dann

$$4)\ 0 = \frac{a^2x}{(x-a)^2}.$$

Hieraus folgt $x = 0$ und $x = \pm\infty$, d. h. **unsere Curve schneidet die Abscissenachse im Anfangspunkte des Coordinatensystems,** ausserdem schneidet sie dieselbe auch in unendlicher Entfernung auf beiden Seiten der Abscissenachse, **oder die Curve nähert sich auf beiden Seiten der Abscissenachse asymptotisch.**

Um die etwaigen Durchschnittspunkte der Curve mit der Ordinatenachse zu finden, setzen wir in Gleichung 1) $x = 0$. Wir finden dann $y = \frac{a^2 . 0}{(0-a)^2} = \frac{0}{a^2}$ oder $y = 0$, d. h. **die Curve schneidet die Ordinatenachse nur ein Mal, und zwar im Anfangspunkte des Coordinatensystems,** wie wir dies vorhin schon gesehen haben.

Nach Gleichung 2) ist

$$5)\ \frac{dy}{dx} = -a^2 \frac{a+x}{(x-a)^3}\ .$$

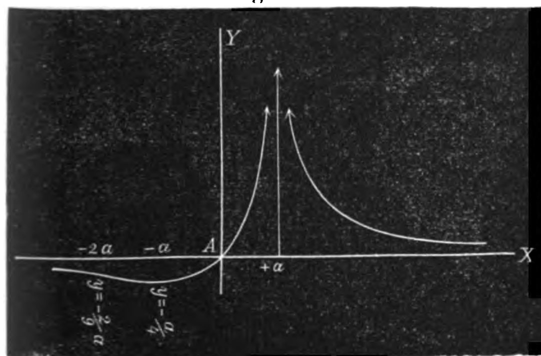
Nun ist $\frac{a+x}{(x-a)^3}$ **positiv** für alle Werthe von x, welche zwischen $-\infty$ und $-a$, und welche zwischen $+a$ und $+\infty$ liegen; dagegen ist der Bruch $\frac{a+x}{(x-a)^3}$ **negativ** für alle Werthe von x, welche zwischen $x = -a$ und $x = +a$ liegen. Wegen des Factors $(-a^2)$ ist also in Gleichung 5) $\frac{dy}{dx}$ **negativ** für alle Werthe von x, welche zwischen $x = -\infty$ und $x = -a$, und welche zwischen $x = +a$ und $x = +\infty$ liegen.

Für alle diese Werthe von x fällt demnach die Curve.

$\frac{dy}{dx}$ ist aber **positiv** für alle Werthe von x, welche zwischen $-a$ und $+a$ liegen; **für alle diese Werthe steigt also die Curve.**

Da nun unsere Curve für $x = -a$ aus dem Fallen ins Steigen übergeht; **so giebt $x = -a$ ein Minimum;** der Werth des Minimums ist nach Gleichung 1)

Fig. 51.



$x = -2a$ Wendepunkt
$x = -a$ Minimum.
$x = a$; $y = \infty$ (Max.)

$$y_{min} = \frac{a^2(-a)}{(-a-a)^2} = -\frac{a^3}{4a^2} = -\frac{a}{4}.$$

Für $x = +a$ geht die Curve aus dem Steigen ins Fallen über; wir haben **also für $x = +a$ ein Maximum,** der Werth des Maximums ist

$$y_{max} = \frac{a^2 . a}{(a - a)^2} = \infty,$$

d. h. die Curve nähert sich nach oben einer Linie asymptotisch, welche || der Ordinatenachse ist, und von derselben um die Länge $+ a$ entfernt ist.

Die Concavität und Convexität unserer Curve erkennen wir aus Gleichung 4)

$$6) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2a^2 \frac{2a + x}{(x - a)^4}.$$

Dieser Ausdruck ist offenbar **negativ** für alle Werthe von x, welche zwischen $-\infty$ und $-2a$ liegen; **für diese Werthe von x ist unsere Curve mithin convex**; dagegen ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ **positiv** für alle Werthe von x, welche zwischen $-2a$ und $+\infty$ liegen. Die Curve ist also für diese Werthe von x concav. Wir sehen nun, dass die Curve in dem Punkte, dessen Abscisse $x = -2a$ ist, von der Convexität in die Concavität übergeht; **dieser Punkt ist also ein Wendepunkt.**

Bemerkungen.

1) Für $x = +a$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$, trotzdem giebt der Punkt, welcher der Abscisse $x = a$ entspricht, keinen Wendepunkt.

2) Der Anfänger thut gut, den Lauf der Curve für einen bestimmten Werth von a zu verzeichnen, etwa $a = 4$ zu setzen, dann würde unsere Gleichung 1)

$$y = \frac{16x}{(x - 4)^2}.$$

Aufgabe 4. Man soll die Curve discutiren, deren Gleichung $y = e^{-x^2}$ ist.

Auflösung. Aus der Gleichung

$$1) \quad y = e^{-x^2} \text{ folgt}$$

$$2) \quad \frac{dy}{dx} = -2xe^{-x^2}$$

$$3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

Aus diesen 3 Gleichungen erkennt man sehr leicht

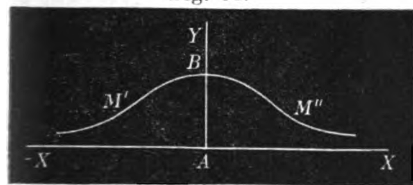
1) dass die Curve stets oberhalb der Abscissenachse ist, weil e^{-x^2} stets positiv ist, dass sie jedoch sich derselben nach beiden Seiten hin asymptotisch nähert;

2) dass die Ordinatenachse in der Höhe $y = 1$ geschnitten wird, und dass die Curve symmetrisch zur Ordinatenachse ist;

3) dass die Curve steigt zwischen den Grenzen $x = -\infty$ und $x = 0$, dass sie fällt zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = +\infty$;

4) dass also die Curve für $x = 0$ ein Maximum hat;

Fig. 52.



$\left.\begin{matrix} x = -\sqrt{2} \\ x = +\sqrt{2} \end{matrix}\right\}$ Wendepunkt.

5) dass die Curve concav ist zwischen den Grenzen
$x = -\infty$ und $x = -\sqrt{2}$
$x = +\sqrt{2}$ und $x = +\infty$

6) dass die Curve für
$x = \pm\sqrt{2}$
einen Wendepunkt hat.

Aufgabe 4. Gegeben ist eine Curve durch die Gleichung $y = \frac{3bx^2 - x^3}{a^2}$. Man soll beweisen, dass die Curve einen Wendepunkt hat, wenn

$$x = b, \text{ also } y = \frac{2b^3}{a^2}.$$

Ausserdem soll man das Resultat der Rechnung auf graphischem Wege prüfen, indem man für a und b beliebige Zahlenwerthe, z. B. $a = 2$, $b = 3$ setzt, und dann die Curve construirt etc.

Hat die Curve Maxima und Minima?

XV. Capitel.

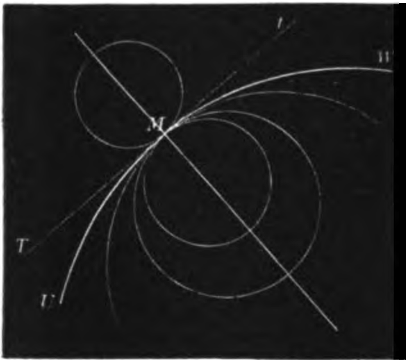
Krümmungskreis und Evoluten.

§. 98.

Begriff des Krümmungskreises.

Wenn man in irgend einer Curve UW (Fig. 53) einen beliebigen Punkt M annimmt, so giebt es unzählig viele Kreise, welche die Curve in dem Punkte M berühren. Unter diesen Kreisen giebt es indessen **einen** Kreis, welcher die Curve **inniger** berührt als alle übrigen Kreise. Diesen Kreis nennt man den **Krümmungskreis** der Curve für den Punkt M.

Fig. 53.



§. 99.

Berührungen von höhern Ordnungen.

Zur Bestimmung des Krümmungskreises ist es nach dem vorigen Paragraphen nothwendig, ein Kennzeichen anzugeben, nach welchem man den Grad der Innigkeit, in welchem sich zwei Curven berühren, beurtheilen kann. Zu dem Ende wollen wir annehmen, es seien (Fig. 54) zwei Curven gegeben

1) VW durch die Gleichung $y = f(x)$
2) RS durch die Gleichung $y = \varphi(x)$.

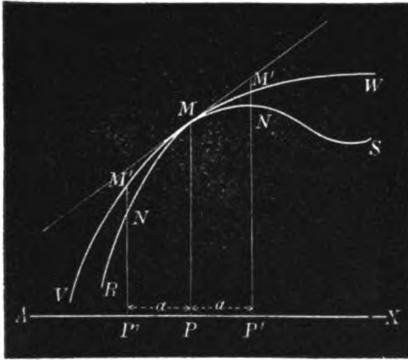


Fig. 54.

Ferner wollen wir annehmen, dass diese beiden Curven sich in dem Punkte M berühren. Setzen wir nun die Abscisse des Punktes M gleich x, und lassen wir x um die beliebig kleine positive oder negative Grösse a zunehmen, so erhalten wir

$$3)\ M'P' = f(x+a) = fx + a\,f'x + \frac{a^0}{1.2}f''x + \frac{a^3}{3!}f'''\,x + \ldots$$

$$4)\ NP' = \varphi(x+a) = \varphi x + a\varphi'x + \frac{a^2}{1.2}\varphi''x + \frac{a^3}{3!}\varphi'''x + \ldots$$

Subtrahiren wir Gleichung 4) von Gleichung 3), so erhalten wir

$$5)\ M'P' - NP' = fx - \varphi x + a(f'x - \varphi'x) + \frac{a^2}{1.2}(f''x - \varphi''x) + \ldots$$

oder

$$6)\ M'N = (fx - \varphi x) + a\,(f'x - \varphi'x) + \frac{a^2}{1.2}(f''x - \varphi''x) + \ldots$$

Nun erkennt man aus der Figur ohne Weiteres, dass die Berührung der beiden Curven VW und RS um so inniger ist, je kleiner, für denselben aber **hinreichend kleinen** Werth von a, der Werth von M'N wird. Aus §. 55 folgt ferner, dass der Werth von M'N um so kleiner wird, je mehr von den **ersten aufeinanderfolgenden** Gliedern rechts in Gleichung 6) zu Null werden. Wenn die beiden Curven VW und RS im Punkte M eine gemeinschaftliche Tangente haben, wie das vorausgesetzt wurde, so ist

$$fx = \varphi\,x$$
$$f'x = \varphi'x$$

oder es sind die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite der Gleichung 6) gleich Null

Sind nur diese beiden ersten Glieder gleich Null, so nennt man die Berührung unserer beiden Curven eine **Berührung der ersten Ordnung.** Wenn dagegen die drei ersten Glieder auf der rechten Seite von Gleichung 6) zu Null werden, d. h. wenn

$$fx = \varphi x$$
$$f'x = \varphi' x$$
$$f''x = \varphi'' x$$

so wird M'N noch kleiner, als es je für denselben hinreichend kleinen Werth von a werden könnte, wenn nur die beiden ersten Glieder zu Null würden; d. h. die Berührung ist **inniger** als sie bei einer Berührung der ersten Ordnung sein kann. Man nennt die Berührung unserer beiden Curven in diesem Falle eine **Berührung der zweiten Ordnung.**

Wenn auf der rechten Seite von Gleichung 6) die $n + 1$ ersten Glieder zu Null werden, d. h. wenn $fx = \varphi x$, und ausserdem die n ersten Abgeleiteten von fx und φx unter sich gleich sind, so nennt man die Berührung der beiden Curven VW und RS eine Berührung der n^{ten} Ordnung. Man erkennt leicht, dass die Berührung dann **inniger** ist, als sie bei irgend einer Berührung von niederer Ordnung sein kann, d. h. wenn zwei Curven sich in irgend einem Punkte (M) berühren, so ist **die Berührung um so inniger, je höher die Ordnung der Berührung ist.**

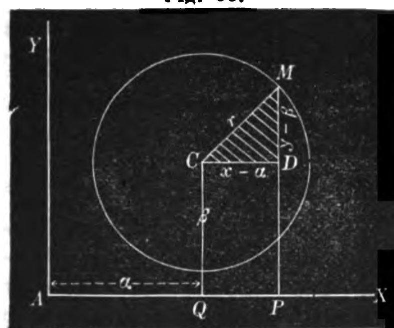
Bemerkung. Den vorstehenden Betrachtungen liegt die stillschweigende Voraussetzung zu Grunde, dass fx und φx nebst ihren Abgeleiteten für die betreffenden Werthe von x continuirlich bleiben.

§. 100.

Hülfssätze zur Bestimmung des Krümmungskreises.

Wir könnten jetzt sofort zur Ermittelung des Krümmungskreises übergehen; indessen wollen wir für die weniger geübten Leser noch einige Betrachtungen über den Kreis voranschicken.

Fig. 55.



AP = x; MP = y.

Aufgabe 1. Ein Kreis ist (Fig. 55) durch die Lage seines Mittelpunktes und die Grösse seines Radius gegeben. Man soll die Gleichung desselben aufstellen.

Auflösung. Der Mittelpunkt unseres Kreises sei bestimmt durch seine Coordinaten α und β; sein Radius gleich r. Nehmen wir nun an, dass M ein beliebiger Punkt auf der Peripherie des Kreises sei, und setzen wir seine Coordnaten resp. gleich x und y, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck CDM

$$CD = x - \alpha, \; MD = y - \beta.$$

Hieraus folgt

$$\text{I. } (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

als Gleichung des Kreises.

Wenn man die Gleichung I für y auflöst, so erhält die Gleichung des Kreises eine andere Form, nämlich

$$\text{II. } y = \beta \pm \sqrt{r^2 - (x - \alpha)^2}.$$

Aufgabe 2. Man soll die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ ermitteln, welche den Coordinaten x′ und y′ eines Punktes (M) auf der Peripherie des Kreises entsprechen.

Auflösung. Wenn wir ausgehen von der Gleichung

$$1) \; (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

so erhalten wir in Uebereinstimmung mit den Resultaten von Aufgabe 2 §. 70

$$2) \; \frac{dy}{dx} = -\frac{x - \alpha}{y - \beta}$$

$$3) \; \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r^2}{(y - \beta)^3}.$$

Bemerkung.

In der vorstehenden Aufgabe war der Kreis durch Mittelpunkt (α, β) und Radius (r) und auf ihm der Punkt M gegeben. Nach diesen Angaben haben wir die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ berechnet, welche den Coordinaten des Punktes M entsprechen. Nehmen wir jetzt umgekehrt an, dass die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ und die Coordinaten des Punktes M (x', y') gegeben seien, so bleiben in den Gleichungen 1) bis 3) nur noch die Grössen α, β und r unbekannt. Da nun aber 3 Unbekannte durch 3 Gleichungen bestimmt sind, so folgt hieraus, dass der Kreis vollkommen bestimmt ist, wenn die Lage des Punktes M, so wie die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ gegeben sind.

Aufgabe 3. Es ist ein Punkt M gegeben durch seine Coordinaten

$$1)\ x' = 5,\ y' = 7.$$

Man soll durch M einen Kreis legen, welcher ausserdem noch an die Bedingung gebunden ist, dass für **diesen Punkt M**

$$2)\ \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

$$3)\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{25}{64}\,.$$

Auflösung. Setzen wir die Coordinaten des Mittelpunktes von unserm Kreise resp. gleich α und β, und seinen Radius gleich r; bezeichnen wir ferner die laufenden Coordinaten unseres Kreises resp. durch x und y, so finden nach der vorigen Aufgabe folgende Gleichungen Statt

$$4)\ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$$5)\ \frac{dy}{dx} = -\frac{x-\alpha}{y-\beta}$$

$$6)\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r^2}{(y-\beta)^3}$$

Schalten wir nun in die Gleichungen 4) bis 6) die Werthe von x, y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ nach den Bedingungen (1 bis 3) unserer Aufgabe ein, so ergiebt sich

$$7)\ (5-\alpha)^2+(7-\beta)^2=r^2$$

$$8)\ \frac{3}{4}=\frac{5-\alpha}{7-\beta}$$

$$9)\ \frac{25}{64}=\frac{r^2}{(7-\beta)^3}$$

Jetzt folgt aus Gleichung 8)

$$10)\ 5-\alpha=\frac{3}{4}(7-\beta).$$

Schalten wir den Werth von $(5-\alpha)$ nach Gleichung 10) in Gleichung 7) ein, so folgt

$$11)\ \frac{9}{16}(7-\beta)^2+(7-\beta)^2=r^2$$

$$12)\ \frac{25}{16}(7-\beta)^2\qquad=r^2.$$

Schalten wir jetzt den Werth von r^2 nach Gleichung 1) in Gleichung 9) ein, so folgt

$$13)\ \frac{25}{64}=\frac{\frac{25}{16}(7-\beta)^2}{(7-\beta)^3}$$

$$14)\ \frac{25}{64}=\frac{25}{16(7-\beta)}$$

$$15)\ 7-\beta=4$$

$$16)\qquad \beta=7-4=3.$$

Verbinden wir Gleichung 15) mit Gleichung 10), so folgt

$$17)\ 5-\alpha=\frac{3}{4}.4=3.$$

$$18)\qquad \alpha=2.$$

Schalten wir endlich die Werthe von $(5-\alpha)$ und $(7-\beta)$ nach den Gleichungen 17) und 15) in Gleichung 7) ein, so folgt

$$19)\ 9+16=r^2$$

$$20)\qquad r=5.$$

Das Resultat unserer Rechnung ist also nach den Gleichungen 16), 18) und 20)

$$21)\ \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \\ r = 5. \end{cases}$$

Die zweiten Werthe für α, β und ϱ nämlich

$$\alpha = 5$$
$$\beta = 7$$
$$\varrho = 0$$

liefern als Kreis einen Punkt.

Bemerkung.

Man sieht hieraus, dass in unsern speciellen Falle ein Kreis **vollkommen bestimmt war** durch einen Punkt auf dessen Peripherie, und durch die Werthe von p und q, welche diesem Punkte entsprechen (vergl. Bemerkung zu Aufgabe 2).

§. 101.

Ermittelung des Krümmungskreises.

Aufgabe. Eine Curve VW ist durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben. Man soll für einen beliebigen Punkt M (x', y') der Curve den Krümmungskreis bestimmen.

Auflösung. Setzen wir die **gesuchten** Mittelpunkts-Coordinaten unsers Krümmungskreises resp. gleich α und β, den **gesuchten** Radius desselben gleich ϱ, und bezeichnen wir seine laufenden Coordinaten resp. durch x und y, so ist die Gleichung des Krümmungskreises nach §. 100 Aufgabe 1)

1) $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2$.

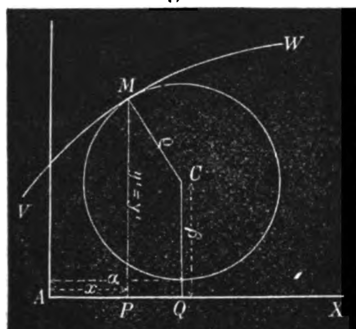
Da nun unser Kreis durch den Punkt M gehen muss, so muss in Gleichung 1) der Werth von y gleich der Ordinate (y') des Punktes M werden, wenn in dieser Gleichung $x = x'$ gesetzt wird. Bezeichnen wir diesen Werth von y durch y', so erhalten wir

2) $\mathrm{y}' = y'$.

Damit nun im Punkte M die Berührung des Kreises mit der Curve so innig werde wie möglich, ist es nach §. 99 nothwendig, dass möglichst viele der **ersten** aufeinanderfolgenden

Differentialquotienten $\frac{d\mathrm{y}}{d\mathrm{x}}$, $\frac{d^2\mathrm{y}}{d\mathrm{x}^2}$ etc., welche dem Punkt M **als Punkt des Kreises** angehören, gleich den entsprechenden Differentialquotienten $\frac{d\mathit{y}}{d\mathrm{x}}$, $\frac{d^2\mathit{y}}{d\mathrm{x}^2}$ etc. werden, welche dem Punkt M **als Punkt der Curve VW** angehören, weil dort in Gleichung 6) die Klammergrössen gleich Null werden, wenn sie gleich sind. Wir wissen aber nach §. 100, **dass ein Kreis vollkommen bestimmt ist,** wenn er durch einen gegebenen Punkt geht, und ausserdem die Werthe von $\frac{d\mathrm{y}}{d\mathrm{x}}$ und $\frac{d^2\mathrm{y}}{d\mathrm{x}^2}$, welche diesem Punkte entsprechen, gegeben sind. Bezeichnen wir nun die Differentialquotienten $\frac{d\mathit{y}}{d\mathrm{x}}$ und $\frac{d^2\mathit{y}}{d\mathrm{x}^2}$, welche dem Punkte M entsprechen, durch p und q, so ist unser Kreis durch folgende Bedingungen bestimmt

Fig. 56.



$AQ = \alpha$, $CQ = \beta$
$AP = \mathrm{x}'$, $MP = \mathrm{y}' = \mathit{y}'$.

3) $\mathrm{y} = \mathit{y}$, d. h. die Ordinate des Punktes M der Curve ist gleich der Ordinate von M auf der Peripherie des Kreises.

4) $\frac{d\mathrm{y}}{d\mathrm{x}} = \mathrm{p}$, d. h. der 1. Differentialquotient des Kreises ist gleich dem 1. Differentialquotient der Curve.

5) $\frac{d^2\mathrm{y}}{d\mathrm{x}^2} = \mathrm{q}$, d. h. der 2. Differentialquotient des Kreises ist gleich dem 2. Differentialquotient der Curve.

Hierbei ist zu bemerken, dass der einfacheren Bezeichnung wegen die Indices von y', y' und x' weggelassen sind, so dass in **den vorstehenden drei Gleichungen die Werthe von y, y, x, p und q der Lage des Punktes M entsprechen müssen.**

Aus Gleichung 1), folgt ferner

$$6)\ \frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y-\beta}$$

$$7)\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\varrho^2}{(y-\beta)^3}.$$

Da nun in Bezug auf den Punkt M, $y = y$ ist, so folgt für den Punkt M aus Gleichung 1)

$$8)\ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2.$$

Aus den Gleichungen 4) und 6) folgt ebenso

$$9)\ -\frac{x-\alpha}{y-\beta} = p.$$

Aus den Gleichungen 5) und 7) folgt ferner

$$10)\ -\frac{\varrho^2}{(y-\beta)^3} = q.$$

In diesen drei Gleichungen sind die Werthe von x, y, p und q bekannt, weil sie der Lage des gegebenen Punktes M auf der gegebenen Curve VW ($y = fx$) entsprechen. Wir können also aus ihnen leicht die Werthe von α, β und ϱ ermitteln. Zunächst finden wir aus Gleichung 9)

$$11)\ (x-\alpha) = -p(y-\beta).$$

Schalten wir diesen Werth von $x - \alpha$ in Gleichung 8) ein, so folgt

$$12)\ p^2(y-\beta)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2$$

$$13)\ (1+p^2)(y-\beta)^2 = \varrho^2.$$

Setzen wir diesen Werth von ϱ^2 in Gleichung 10) ein, so folgt

$$14)\ -\frac{(1+p^2)(y-\beta)^2}{(y-\beta^3)} = q$$

$$15)\ -\frac{1+p^2}{y-\beta} = q$$

$$16)\ y-\beta = -\frac{1+p^2}{q}.$$

$$17)\ \beta = y + \frac{1+p^2}{q}.$$

Nach Verbindung der Gleichungen 11) und 16) erhält man weiter

$$18)\quad x - \alpha = p\,\frac{1+p^2}{q}$$

$$19)\qquad \alpha = x - p\,\frac{1+p^2}{q}.$$

Setzen wir endlich die Werthe von $x - \alpha$ und $y - \beta$ nach den Gleichungen 18) und 16) in Gleichung 8) ein, so folgt

$$20)\quad p^2 . \left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2 + \left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2 = \varrho^2$$

$$21)\quad (p^2+1) . \left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2 = \varrho^2$$

$$22)\quad \varrho^2 = \frac{(1+p^2)^3}{q^2}$$

$$23)\quad \varrho = \frac{(1+p^2)^{3/2}}{q}.$$ {Hier ist auf das Vorzeichen von ϱ keine Rücksicht genommen, da es nur auf die Länge des Krümmungshalbmessers ankömmt.

Unser Krümmungskreis ist demnach bestimmt durch die Gleichungen 17), 19) und 23), nämlich

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \beta = y + \dfrac{1+p^2}{q}. \\ \alpha = x - p\,\dfrac{1+p^2}{q} \\ \varrho = \dfrac{(1+p^2)^{3/2}}{q} \end{cases}$$

Bemerkungen.

1) Wir machen wieder darauf aufmerksam, dass die Werthe von p und q in den vorstehenden Gleichungen den Werthen von x' und y' des Punktes M, für welchen der Krümmungskreis gefunden werden soll, entsprechen, und dass die Indices nur zum Zweck des bequemeren Schreibens weggelassen sind.

2) Der Krümmungskreis geht im Allgemeinen mit der entsprechenden Curve eine Berührung zweiter Ordnung ein.

3) Schalten wir in Gleichung 23) die Werthe von p und q nach den Gleichungen 5) und 11) §. 71 ein, so folgt

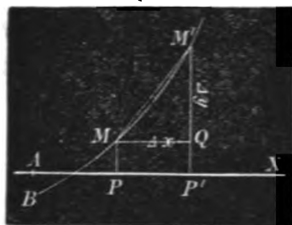
$$24)\quad \varrho = \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{dx.d^2y - dy.d^2x}{dx^3}}$$

$$25)\ \varrho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2} . dx^3}{dx . d^2y - dy . d^2x}$$

$$26)\ \varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx . d^2y - dy . d^2x}.$$

4) Setzt man die Länge des Bogens irgend einer Curve BM (Fig. 57) gleich s, so ist das Differential des Bogens demgemäss ds. Betrachten wir nun das Dreieck MM'Q, so ergiebt sich

Fig. 57.



$$27)\ \overline{MM'}^2 = \overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta y}^2$$

$$29)\ \lim \overline{MM'}^2 = dx^2 + dy^2.$$

Man erkennt nun, dass der Bruch $\frac{\breve{MM'}}{\overline{MM'}}$ die Einheit zur Grenze hat, wenn Δx sich der Null nähert. Hieraus aber folgt, dass $\lim \overline{MM'} = \lim \breve{MM'} = ds$ ist; mithin ist nach Gleichung 28)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Schalten wir nach dieser Gleichung den Werth von $dx^2 + dy^2$ in Gleichung 26) ein. so ergiebt sich

$$29)\ \varrho = \frac{ds^3}{dx . d^2y - dy . d^2x}.$$

5) Wenn man voraussetzt, dass x die unabhängig veränderliche Grösse sei, so fällt d^2x weg. Wir erhalten dann aus den Gleichungen 26) und 29) für ϱ die Gleichungen

$$30)\ \varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx . d^2y}$$

$$31)\ \varrho = \frac{ds^3}{dx . d^2y}.$$

§. 102.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll den Krümmungskreis der Parabel $y = \sqrt{ax}$ für den allgemeinen gegebenen Punkt M (x, y) bestimmen.

Auflösung 1. Wir haben durch Differentiation der Gleichung der Parabel

$$1)\ y = \sqrt{ax}$$

$$2)\ p = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$$

$$3)\ q = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{x^3}}.$$

Schalten wir diese Werthe von y, p, q in die Gleichungen 17), 19) und 23) des vorigen Paragraphen ein, so erhalten wir

$$4)\ \beta = \sqrt{ax} - \frac{1 + \frac{a}{4x}}{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{x^3}}}$$

$$5)\ \alpha = x + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}} \cdot \frac{1 + \frac{a}{4x}}{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{x^3}}}$$

$$6)\ \varrho = \frac{\left(1 + \frac{a}{4x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{x^3}}} \text{(vergl. Bemerk. zu Gl. 23) §. 101).}$$

Formen wir diese Gleichungen noch etwas um, so finden wir

$$7)\ \beta = -4\sqrt{\frac{x^3}{a}} = -\ 4x\sqrt{\frac{x}{a}}$$

$$8)\ \alpha = 3x + \frac{a}{2}$$

$$9)\ \varrho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a + 4x)^3}{a}}.$$

Bemerkung.

Setzt man in Gleichung 9) $x = 0$, so erhält man den Krümmungshalbmesser für den Scheitelpunkt der Parabel, nämlich

$$\varrho = \frac{a}{2}$$

(vergl. Bemerkung zu §. 103).

Aufgabe 2. Man soll den Krümmungskreis der Ellipse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ für den allgemeinen Punkt M (x, y) bestimmen.

Auflösung. Aus der Gleichung

$$1)\ a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \text{ folgt}$$

$$2)\ p = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$3)\ q = -\frac{a^2p^2+b^2}{a^2y} = -\frac{a^2\frac{b^4x^2}{a^4y^2}+b^2}{a^2y}$$

$$= -\frac{a^2b^4x^2+a^4b^2y^2}{a^6y^3} = -a^2b^2\frac{b^2x^2+a^2y^2}{a^6y^3}$$

$$= -\frac{a^4b^4}{a^6y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3} = -\frac{ab}{(a^2-x^2)^{3/2}}$$

$$4)\ q = -\frac{b^4}{a^2y^3} \text{ oder } -\frac{ab}{(a^2-x^2)^{3/2}}.$$

Schalten wir jetzt die für p und q gefundenen Werthe in die Gleichungen 17), 19) u. 23) von §. 101 ein, so ergiebt sich

$$5)\ \alpha = \frac{a^2-b^2}{a^4}x^3$$

$$6)\ \beta = -\frac{a^2-b^2}{b^4}y^3 = -\frac{a^2-b^2}{ba^3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}$$

$$7)\ \varrho = \frac{\{a^4-(a^2-b^2)x^2\}^{3/2}}{a^4b}$$

Die Excentricität der Ellipse wird gewöhnlich durch e bezeichnet, dann ist also $e^2 = a^2 - b^2$.

Schaltet man diesen Werth in die Gleichungen 5) und 7) ein, so erhält man

$$8)\ \alpha = \frac{e^2x^3}{a^4}$$

$$9)\ \beta = -\frac{e^2}{b^4}y^3 = -\frac{e^2}{ba^3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}$$

$$10)\ \varrho = \frac{(a^4-e^2x^2)^{3/2}}{a^4b}$$

für $x = 0$ wird $\varrho = \frac{a^6}{a^4b} = \frac{a^2}{b}\ (=\varrho_{max})$

für $x = a$ wird $\varrho = \frac{a^3b^3}{a^4b} = \frac{b^2}{a}\ (=\varrho_{min})$.

Aufgabe 3. Man soll den Krümmungskreis der Cycloide für den allgemeinen Punkt M bestimmen.

Auflösung. Wir haben in §. 76 die Cycloide bestimmt durch die beiden Gleichungen

$$1)\ y = r\,(1 - \cos t)$$

$$2)\ x = r\,(t - \sin t)$$

Hieraus folgt

$$3)\ dy = r \sin t \,.\, dt$$

$$4)\ dx = r\,(1 - \cos t)\,dt$$

$$\left.\begin{array}{l} 5)\ p = \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} . \dfrac{t}{2} \\[2ex] 6)\ q = -\dfrac{1}{4\,r\,.\,\sin^4 \dfrac{t}{2}} \end{array}\right\} \text{(siehe §. 72, Aufgabe 2).}$$

Nach unserer Formel für den Krümmungshalbmesser in §. 101 Gleichung 23) erhalten wir jetzt

$$7)\ \varrho = \frac{\left(1 + \operatorname{ctg}^2 \dfrac{t}{2}\right)^{3/2}}{\dfrac{1}{4\,r.\sin^4 \dfrac{t}{2}}} = \frac{\left(\dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{t}{2}}\right)^{3/2}}{\dfrac{1}{4\,r \sin^4 \dfrac{t}{2}}}$$

$$8)\ \varrho = \frac{4\,r \sin^4 \dfrac{t}{2}}{\sin^3 \dfrac{t}{2}}$$

$$9)\ \varrho = 4\,r.\sin \frac{t}{2}.$$

Der **Krümmungshalbmesser** für einen beliebigen Punkt der Cycloide ist also **doppelt so gross** wie die **Normale** für denselben Punkt (vergl. §. 76, Gleichung 12).

Verbinden wir die Gleichungen 17) und 19) von §. 101 mit unsern Gleichungen 1), 5) und 6), so ergiebt sich

$$10)\ \beta = r(1-\cos t) - \frac{1+\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}}{\frac{1}{4\,r\,\sin^4\frac{t}{2}}}$$

$$\beta = r\,2\sin^2\frac{t}{2} - \frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}.4\,r\sin^4\frac{t}{2}$$

$$\beta = 2r\sin^2\frac{t}{2} - 4\,r\sin^2\frac{t}{2}.$$

$$11)\ \beta = -2r\sin^2\frac{t}{2} = -r(1-\cos t) = -y$$

$$12)\ \alpha = x - p\,\frac{1+p^2}{q}$$

$$\alpha = r(t-\sin t) + \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\frac{1+\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}}{\frac{1}{4\,r\sin^4\frac{t}{2}}}$$

$$\alpha = rt - r\sin t + \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}}{\frac{1}{4\,r\sin^4\frac{t}{2}}}$$

$$\alpha = rt - r\sin t + 4\,r\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$$

$$\alpha = rt - r\sin t + 2r\sin t$$

$$13)\ \alpha = r(t+\sin t).$$

Bemerkung.

Die Werthe von α und β hätte man auch mit Hülfe von Gleichung 9) direct aus der Figur 58 ableiten können. Ist nämlich I der Mittelpunkt des Krümmungskreises für den Punkt M, so ist MI = 2MH, weil nach Gleichung 9) der Krümmungshalbmesser doppelt so gross ist, wie die Normale.

Hieraus folgt HI = MH, also

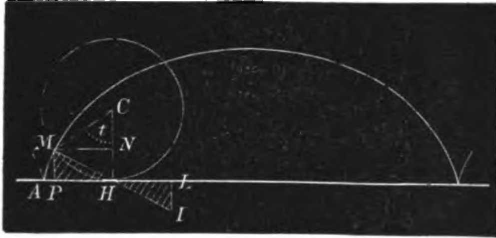
12) $\triangle$ HLI = MHP, also

13) $LI = MP = y = r(1 - \cos t)$.

Ferner $HL = HP = MN = r.\sin t$

14) $AL = AH + HL = rt + r\sin t = r(t + \sin t)$.

Fig. 58.



Nun ist

$LI = -\beta$

$AL = \alpha$,

also nach den Gleichungen 13) und 14)

15) $\alpha = r(t + \sin t)$

16) $\beta = -r(1 - \cos t)$.

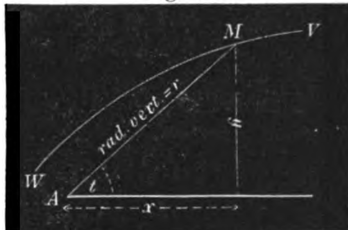
Die hier gefundenen Werthe von α und β stimmen genau mit den Werthen in Gleichung 9) und 11) (vergl. §. 105, Aufgabe 5).

§. 103.

Krümmungshalbmesser für Polar-Curven.

Die Polar-Curven lassen sich bekanntlich durch Veränderung des Coordinaten-Systems leicht auf rechtwinklige Coordinaten beziehen, und dadurch ist die Bestimmung des Krümmungskreises von Polar-Curven auf §. 101 zurückgeführt. Beziehen wir z. B. die Polar-Curve WV (Fig 59) auf ein rechtwinkliges Coordinaten - System, dessen Abscissenachse die Linie AX, und dessen Anfangspunkt der Punkt A ist, so ist

Fig. 59.



1) $y = r \sin t$

2) $x = r \cos t$.

Wenn nun die Polargleichung unserer Curxe WV ganz allgemein

3) $r = f(t)$

ist, so ergiebt sich aus Gleichung 1) und 2,

4) $y = f(t) \sin t$

5) $x = f(t) \cos t$.

Nach Capitel X können wir nun sehr leicht p und q bestimmen und darauf nach §. 101 den Werth von α, β und ϱ ermitteln.

Aufgabe 1. Man soll den Krümmungshalbmesser für einen beliebigen Punkt der Exponential-Spirale $r = e^t$ bestimmen.

Auflösung. Beziehen wir unsere Exponential-Spirale auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System, dessen Abscissenachse und Anfangspunkt resp. mit der Achse und dem Pol des Polar-Coordinaten-Systems zusammenfällt, so ist

1) $y = r \sin t$

2) $x = r \cos t$, oder weil

3) $r = e^t$, so ist

4) $y = e^t . \sin t$

5) $x = e^t . \cos t$.

Hieraus folgt

6) $dy = (e^t . \sin t + e^t \cos t)\, dt$

7) $dx = (e^t . \cos t - e^t \sin t)\, dt$

8) $$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$$

Nun ist $\sin t + \cos t = \sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) . \sqrt{2}$

$\cos t - \sin t = \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right) . \sqrt{2}$, also

9) $$p = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) . \sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right) . \sqrt{2}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + t\right)$$

10) $$q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + t\right)} \cdot \frac{1}{e^t (\cos t - \sin t)}$$

$$q = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + t\right)} \cdot \frac{1}{e^t \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \sqrt{2}} = \frac{1}{e^t \cos^3\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \sqrt{2}}$$

Nun ist $\varrho = \frac{(1+p^2)^{3/2}}{q}$ (§. 101). Schalten wir in diese Formel für ϱ die Werthe von p und q nach den Gleichungen 9) und 10) ein, so folgt

$$11)\ \varrho = \frac{\left\{1 + tg^2\left(\frac{\pi}{4} + t\right)\right\}^{3/2}}{\frac{1}{e^t \cos^3\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \sqrt{2}}}$$

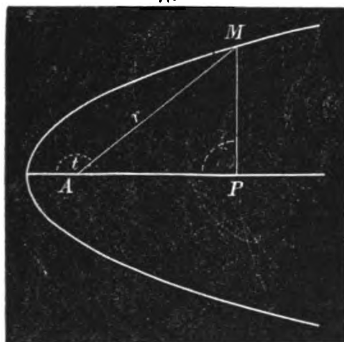
$$12)\ \varrho = \frac{1}{\cos^3\left(\frac{\pi}{4} + t\right)} \, . \cos^3\left(\frac{\pi}{4} + t\right) . e^t \sqrt{2}$$

$$13)\ \varrho = e^t \sqrt{2} = r . \sqrt{2}.$$

Für einen beliebigen Punkt der Exponential-Spirale ist also der Krümmungshalbmesser gleich der Normale und Tangente (vergl. §. 78).

Aufgabe. Eine Parabel ist auf Polar-Coordinaten bezogen. Man soll den Krümmungshalbmesser derselben als Function des Polar-Winkels ausdrücken.

Fig. 60.



Auflösung. Wenn a der Parameter der Parabel ist, so ist ihre Polargleichung

$$1)\ r = \frac{a}{2(1 + \cos t)}.$$

Bezieht man nun die Parabel auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System, dessen Abscissenachse mit der geometrischen Achse zusammenfällt und dessen Anfangspunkt der Brennpunkt A ist, so ist

$$2)\ x = -r . \cos t = -\frac{a . \cos t}{2(1 + \cos t)}$$

$$3)\ y = r . \sin t = \frac{a . \sin t}{2(1 + \cos t)}\ .$$

Man findet nun durch Differentation

$$4)\, dx = \frac{a \sin \frac{t}{2}}{4 \cos^3 \frac{t}{2}} dt$$

$$5)\, dy = \frac{a}{4 \cos^2 \frac{t}{2}} dt.$$

Hieraus folgt

$$6)\ p = \frac{dy}{dx} = \frac{4\, a \cos^3 \frac{t}{2}}{4 a \sin \frac{t}{2} \,.\, \cos^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$$

$$7)\ q = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{4 \cos^3 \frac{t}{2}}{a \sin \frac{t}{2}}$$

$$q = \frac{2}{a} \,.\, \operatorname{ctg}^3 \frac{t}{2}$$

Nach §. 101 Gleichung 23) ist

$$9)\ \varrho = \frac{(1 + p^2)^{3/2}}{q}\,.$$

Setzen wir nun die Werthe von p und q nach den Gleichungen 6) und 7) in Gleichung 9) ein, so ergiebt sich

$$10)\ \varrho = \frac{\left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}\right)^{3/2}}{\frac{2}{a} \,.\, \operatorname{ctg}^3 \frac{t}{2}}$$

$$= a \frac{\sin^3 \frac{t}{2}}{2 \cos^3 \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{\sin^3 \frac{t}{2}} = \frac{a}{2 \cos^3 \frac{t}{2}}\,.$$

Bemerkung.

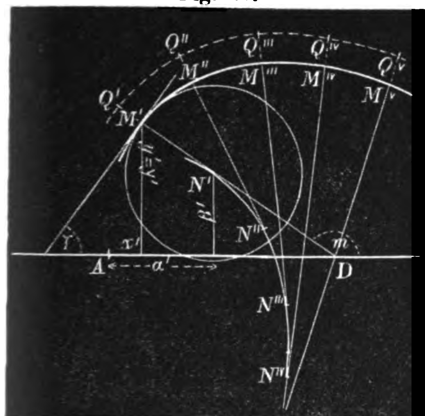
Setzt man in Gleichung 10) $t = 0$, so erhält man den Krümmungshalbmesser für den Scheitelpunkt der Parabel

$\varrho = \frac{a}{2}$ (vergl. Bemerkung zu §. 102, Aufgabe 1).

§. 104.
Evoluten.

Wenn man die Krümmungskreise zu sämmtlichen Punkten (M) einer Curve M′ M″ M‴ construirt denkt, so wird durch ihre Mittelpunkte (N) eine neue Curve N′ N″ N‴ bestimmt, welche offenbar von der ursprünglichen Curve M′ M″ M‴ abhängt. Man nennt diese neue Curve (N′ N″ N‴ etc.) die Evolute der ursprünglichen Curve.

Fig. 61.



Die Evolute irgend einer Curve ist demnach der geometrische Ort der Mittelpunkte sämmtlicher Krümmungkreise dieser Curve.

Ist nun irgend eine Curve durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben und will man für irgend einen Punkt der Curve, die Coordinaten des zugehörenden Krümmungskreises bestimmen, oder was dasselbe ist, einen gewissen Punkt der Evolute, und nennt man die Coordinaten der zugehörigen Evolute resp. α und β, so erhalten wir nach §. 101

$$\text{I. } \alpha = x - p\frac{1+p^2}{q}$$

$$\text{II. } \beta = y + \frac{1+p^2}{q}.$$

Wenn man hierin diejenigen Werthe von y, p und q, welche der Gleichung $y = f(x)$ entsprechen, einschaltet, so wird die Evolute durch die beiden Gleichungen (I und II) bestimmt. In manchen Fällen ist es möglich, auch x zu eliminiren, so dass wir dann eine Gleichung zwischen α und β als Gleichung der Evolute aufstellen können.

Bemerkung.

Wäre y eine unentwickelte Function von x, so wäre es nicht immer möglich, y durch x auszudrücken. Wir würden dann aus den Gleichungen I) und II) nur p und q entfernen können. In diesem Falle würde die Beziehung zwischen α und β durch die Gleichungen I) und II) allein nicht bestimmt werden, vielmehr wäre es dann nothwendig, die unentwickelte Gleichung $f(x,y) = 0$ mit den Gleichungen I) und II) zu verbinden.

§. 105.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Die Gleichung einer Parabel ist $y = \sqrt{ax}$. Man soll die Gleichung ihrer Evolute aufstellen.

Auflösung. Aus unserer Gleichung

$$1)\quad y = \sqrt{ax} \text{ folgt}$$

$$2)\quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{a^{1/2}}{2x^{1/2}}$$

$$3)\quad q = \frac{dp}{dx} = -\frac{a^{1/2}}{4x^{3/2}}.$$

Schalten wir die Werthe von y, p und q in die Gleichungen I) und II) von §. 104 ein, so folgt

$$4)\quad \alpha = x - \frac{a^{1/2}}{2x^{1/2}} \cdot \frac{1 + \frac{a}{4x}}{-\frac{a^{1/2}}{4x^{3/2}}}$$

$$5)\quad \alpha = 3x + \frac{a}{2}$$

$$6)\quad \beta = a^{1/2}x^{1/2} + \frac{1 + \frac{a}{4x}}{-\frac{a^{1/2}}{4x^{3/2}}} = a^{1/2}x^{1/2} - \frac{4x^{3/2} + ax^{1/2}}{a^{1/2}}$$

$$7)\quad \beta = -4\,\frac{x^{3/2}}{a^{1/2}} = -4\sqrt{\frac{x^3}{a}}.$$

Durch die Gleichungen 5) und 7) ist also die Evolute der Parabel bestimmt. Wir haben sie in Gleich. 8) wiederholt

$$8) \left\{ \begin{aligned} \alpha &= 3x + \frac{a}{2} \\ \beta &= -4\sqrt{\frac{x^3}{a}}. \end{aligned} \right\} \text{ Evolute der Parabel.}$$

Aus den Gleichungen 8) kann man x eliminiren und eine Gleichung zwischen α und β herstellen, man erhält dann

$$\left. \begin{aligned} 10)\ \beta &= -4\sqrt{\frac{(2\alpha - a)^3}{6^3 . a}}. \\ 11)\ \beta &= -\tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{(2\alpha - a)^3}{6a}}. \end{aligned} \right\} \text{ Gleichung der Evolute einer Parabel.}$$

Die Evolute einer Parabel ist nach dieser Gleichung also eine semikubische Parabel.

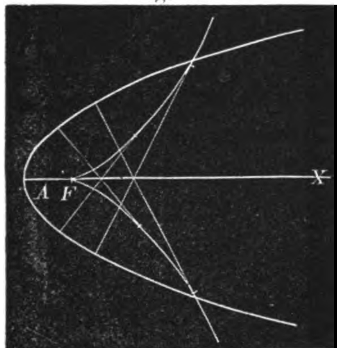
Aufgabe 2. Man soll die Gleichung der Evolute einer Parabel $y^2 = ax$ discutiren.

Auflösung. Berücksichtigen wir das doppelte Vorzeichen, welches jede Quadratwurzel hat, so erhalten wir nach Gleichung 11) der vorigen Aufgabe für die Evolute der Parabel

$$1)\ \beta = \mp \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{(2\alpha - a)^3}{6a}}.$$

Wir sehen hieraus zunächst, dass β imaginair wird, wenn $\alpha < \frac{a}{2}$ ist; ferner dass $\beta = 0$ ist, wenn $\alpha = \frac{a}{2}$, und endlich, dass β zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe hat, wenn $\alpha > \frac{a}{2}$. **Die Evolute beginnt demnach auf einem Punkte der Achse, welcher um den halben Parameter vom Scheitelpunkte entfernt ist, und erstreckt sich von da ab in zwei Zweigen, welche gegen die geometrische Achse symmetrisch sind, in unendliche Entfernung nach der Seite der positiven Abscissen.**

Fig. 62.



Da wir nun wissen, dass die Zweige der Evolute einer Parabel gegen die geometrische Achse derselben eine symmetrische Lage haben, so brauchen wir die übrigen Eigenschaften der Evolute nur für **einen** Zweig zu untersuchen.

Wir wählen den oberen Zweig. Für ihn ist nach Gleichung 1)

$$2)\ \beta = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(2\alpha - a)^3}{6a}}.$$

Durch Differentiation finden wir weiter

$$3)\ \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{2}{3\sqrt{6a}} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{(2\alpha - a)} . 2$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6a}} \cdot \sqrt{(2\alpha - a)}$$

$$4)\ \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{2}{\sqrt{6a(2\alpha - a)}}.$$

Da wir nun bei den Wurzelgrössen nur das Vorzeichen $+$ berücksichtigen, so sind in unsern Gleichungen 3) und 4) die Werthe von $\frac{d\beta}{d\alpha}$ und $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ stets positiv, d. h. **der obere Zweig der Evolute unserer Parabel steigt für jeden Werth von α, und ist für jeden Werth von α concav nach oben.** Der untere Zweig der Evolute wird demnach stets **fallen**, und convex nach oben sein.

Aufgabe 3. Die Gleichung einer Ellipse ist

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Man soll die Gleichung der Evolute aufstellen und aus der Gleichung die Eigenschaften der Evolute entwickeln.

Aufgabe 4. Man soll die Evolute der Cycloide bestimmen.

Auflösung. In §. 76 haben wir gefunden, dass die Cycloide bestimmt wird durch die beiden Gleichungen

$$1)\ \begin{cases} y = r . (1 - \cos t) \\ x = r . (t - \sin t) \end{cases} \text{Gleichungen der Cycloide.}$$

Denken wir uns durch den Punkt M ein Krümmungskreis gelegt, so folgt aus der Auflösung von Aufgabe 3, §. 102

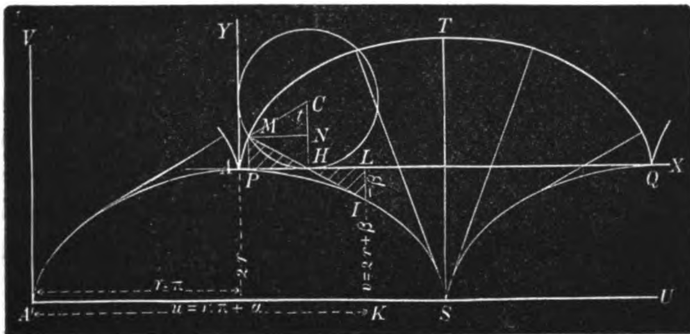
2) $\alpha = r.(t + \sin t)$

3) $\beta = -r.(1 - \cos t)$.

Der Punkt M, für welchen wir die Lage des Krümmungsmittelpunktes bestimmt haben, war **einzig** und **allein** an die Bedingung gebunden, dass er ein Punkt auf der Cycloide sein sollte. Was für den Punkt M erwiesen ist, gilt demnach für **jeden** Punkt der Cycloide. Mithin müssen die Gleichungen 2) und 3) für **jeden** Punkt auf der Evolute der Cycloide gelten. Die Evolute der Cycloide ist demnach durch die Gleichungen 2) und 3) bestimmt.

Aufgabe 5. Man soll beweisen, dass die Evolute einer Cycloide wieder eine mit ihr congruente Cycloide ist.

Fig. 63.



Auflösung. Wir haben in den Gleichungen 2) und 3) der vorigen Aufgabe gefunden, dass die Evolute der Cycloide (Fig. 63) den Gleichungen

$$1) \begin{cases} \alpha = r(t + \sin t) \\ \beta = -r(1 - \cos t) \end{cases}$$

und dass die Gleichungen der Cycloide

$$2) \begin{cases} y = r(1 - \cos t) \\ x = r(t - \sin t) \end{cases}$$

entspricht. Führen wir nun ein Coordinaten-System (U, V) ein, dessen Abscissenachse parallel der alten Abscissenachse ist, und dessen Anfangspunkt A' eine solche Lage hat, dass

3) $u = r\pi + \alpha$

4) $v = 2r + \beta$,

so erhalten wir aus den Gleichungen 1)

$$\left.\begin{array}{l} 5) \begin{cases} u = r\pi + r(t + \sin t) \\ v = 2r - r(1 - \cos t) \end{cases} \\ 6) \begin{cases} u = r(\pi + t + \sin t) \\ v = r(1 + \cos t). \end{cases} \end{array}\right\}$$

Gleichungen für die Evolute der Cycloide, bezogen auf das Coordinaten-System U, V.

Setzen wir ferner in Gleichung 5) für $\pi + t = w$, also

7) $t = w - \pi$, so ist

8) $\sin t = - \sin w$

9) $\cos t = - \cos w$.

Schalten wir diese Werthe von t, sin t und cos t in die Gleichungen 5) ein, so ergiebt sich

$$10) \left.\begin{cases} u = r(w - \sin w) \\ v = r(1 - \cos w) \end{cases}\right\}$$

Evolute der Cycloide, bezogen auf das System U, V.

In den Gleichungen 9) und 2) erhalten wir nun für gleiche Werthe von w und t resp. gleiche Werthe von u und x, sowie von v und y. Da nun in Gleichung 1) unsere Cycloide und in Gleichung 9) deren Evolute ausgedrückt ist, so folgt hieraus, **dass die Evolute einer Cycloide dieser Cycloide congruent ist** w. z. b. w.

§. 106.

Beziehungen zwischen Evolute und Evolvente.

Ist $y = fx$ die Gleichung der Curve M' M'' M''' M'''', und ist die Gleichung des Krümmungskreises für einen beliebigen Punkt (M')

1) $(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \varrho^2$,

so ergeben sich durch Differentiation die beiden Gleichungen

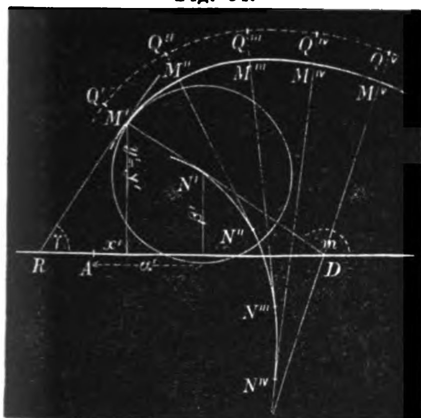
2) $(y - \beta) dy + (x - \alpha) dx = 0$

3) $dy^2 + (y - \beta) d^2y + dx^2 = 0$.

Bei den Differentiationen, aus welchen die Gleichungen 2) und 3) hervorgegangen sind, lag die Voraussetzung zum

Grunde, dass der **Punkt der Curve**, für welchen wir in Gleichung 1) die Gleichung des Krümmungskreises aufgestellt habe, **nunverändert** bleibe.

Fig. 64.



Nehmen wir jetzt an, dass der Punkt der Curve, für welchen wir den Krümmungskreis in Gleichung 1) bestimmt haben, seine Lage auf der Curve ändert, so werden **nicht allein die Coordinaten x und y als Coordinaten des Krümmungskreises unserer Curve sich ändern, sondern es muss der ganze Krümmungskreis ein anderer werden, d. h. es werden auch α und β und ϱ variabel.** Unter dieser Voraussetzung erhalten wir durch Differentiation der Gleichung 2)

$$4)\quad dy^2 + (y - \beta)\, d^2y + dx^2 - d\beta \,.\, dy - d\alpha\, dx = 0.$$

In Gleichung 3) fanden wir

$$5)\quad dy^2 + (y - \beta)\, d^2y + dx^2 \qquad\qquad = 0.$$

Subtrahiren wir diese Gleichung von Gleichung 4), so ergiebt sich

$$6)\quad - d\beta \,.\, dy - d\alpha \,.\, dx = 0$$

$$7)\quad d\beta \,.\, dy = - d\alpha \,.\, dx$$

$$8)\quad \frac{d\beta}{d\alpha} = - \frac{dx}{dy}\,.$$

Nun ist aber $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} = p$ (§. 101). Aus Gleichung 8) folgt demnach

$$9)\quad \frac{d\beta}{d\alpha} = - \frac{1}{p}\,.$$

Ist nun M′ R die Tangente für irgend einen Punkt (M′) der Curve M′ M″ M‴, und N′ D die Tangente für den ent-

sprechenden Punkt (N') der Evolute, so ist nach den Bezeichnungen in Fig. 64

10) $\frac{d\beta}{d\alpha} = \operatorname{tg} m$

11) $p = \operatorname{tg}\gamma$.

Schalten wir diese Werthe $\frac{d\beta}{d\alpha}$ und p in die Gleichung 9) ein, so ergiebt sich

12) $\operatorname{tg} m = -\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$

13) $\operatorname{tg} m = -\operatorname{ctg}\gamma$.

Hieraus folgt, dass die Linien N' D und M' R (hinreichend verlängert) einen rechten Winkel mit einander bilden müssen. Die Linie M' N' (als Krümmungshalbmesser) steht aber ebenfalls ⊥ zu R M'. Hieraus folgt, dass die Linien M' N' und N' D beide auf der Linie M' R ⊥ stehen. Sie haben ferner den Punkt M' gemeinschaftlich, also müssen sie in ihren Richtungen zusammenfallen oder der Krümmungshalbmesser M' N' ist zugleich Tangente der Evolute N' N'' N'''. Da dieses nun für jede Lage des Punktes M' gilt, so folgt hieraus, **dass die Krümmungshalbmesser irgend einer Curve zugleich Tangenten für die zugehörige Evolute sind.**

§. 107.

Fortsetzung.

Aus Gleichung 2) von §. 106 folgt

1) $(y-\beta) \cdot \frac{dy}{dx} = -(x-\alpha)$.

Da nun für den Punkt, in welchem der Krümmungskreis die Curve berührt, nach §. 101

$$y = \mathfrak{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\mathfrak{y}}{dx} = p$$

und da ferner nach Gleichung 9) §. 106

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{p},$$

so ergiebt sich aus Gleichung 1)

$$2)\ y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x - \alpha).$$

Setzen wir ebenfalls in Gleichung 1) §. 106, $y = y$, so erhalten wir

$$3)\ (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \varrho^2.$$

Hieraus folgt nach Gleichung 2)

$$4)\ \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2 . (x - \alpha)^2 + (x - \alpha)^2 = \varrho^2$$

$$5)\ (x - \alpha)^2 . \left\{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\right\} \quad = \varrho^2.$$

Differentiiren wir Gleichung 3) nach $x, y, \alpha, \beta, \varrho$, so folgt

$$6)\ (y-\beta)\,dy + (x-\alpha)\,dx - (y-\beta)\,d\beta - (x-\alpha)\,d\alpha = \varrho\,d\varrho.$$

Differentiiren wir dagegen Gleichung 3) **allein nach** x und y (d. h. differentiiren wir so, als ob **nicht der Kreis**, sondern nur x und y **als Coordinaten des Kreises** sich ändern), so erhalten wir

$$7)\ (y - \beta)\,dy + (x - \alpha)\,dx = 0.$$

Subtrahiren wir Gleichung 7) von Gleichung 6), so folgt

$$8)\ -(y - \beta)\,d\beta - (x - \alpha)\,d\alpha = \varrho\,d\varrho$$

$$-(y - \beta)\frac{d\beta}{d\alpha} - (x - \alpha) \quad = \varrho\frac{d\varrho}{d\alpha}$$

Schalten wir in diese Gleichung den Werth von $(y-\beta)$ nach Gleichung 2) ein, so folgt

$$9)\ -(x-\alpha)\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2 - (x-\alpha) = \varrho\,\frac{d\varrho}{d\alpha}$$

$$10)\ (x - \alpha) . \left\{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\right\} = -\varrho\,\frac{d\varrho}{d\alpha}$$

$$11)\ (x - \alpha)^2 . \left\{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\right\}^2 = \varrho^2\left(\frac{d\varrho}{d\alpha}\right)^2$$

In Gleichung 5) fanden wir

$$12)\ (x-\alpha)^2.\left\{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\right\}=\varrho^2.$$

Dividiren wir jetzt diese Gleichung in Gleichung 11), so folgt

$$13)\ 1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2=\left(\frac{d\varrho}{d\alpha}\right)^2$$

$$14)\ d\alpha^2+d\beta^2=d\varrho^2.$$

Nun sind α und β Coordinaten der Evolute; setzen wir ihren Bogen gleich s, so ergiebt sich nach Bemerk. 4 §. 101

$$15)\ d\alpha^2+d\beta^2=ds^2,\ \text{also}$$

$$16)\ ds^2=d\varrho^2,\ \text{oder}$$

$$17)\ ds\ =\pm d\varrho.$$

Nehmen wir nun $\triangle s$ und $\triangle\varrho$ in einem Intervall, in welchem für $d\varrho$ **kein Zeichenwechsel** stattfindet, so ist nach Gleichung 17)

$$18)\ \triangle s=\pm\triangle\varrho.$$

d. h. **in einem Intervall, in welchem für $d\varrho$ kein Zeichenwechsel stattfindet, ist der absolute Werth, um welchen sich der Krümmungshalbmesser einer Curve ändert, gleich dem absoluten Werthe der entsprechenden Aenderung des zugehörigen Elvolventen-Bogens.**

§. 108.

Fortsetzung.

Denkt man jetzt um die Evolute N′ N″ N‴ (Fig. 65) einen **vollkommen biegsamen, undehnbaren** Faden gelegt, dessen freies Ende mit einem Punkte, z. B. M′, der ursprünglichen Curve zusammenfällt, so wird nach §. 107 dies freie Ende, wenn man den Faden stets straff hält, und ihn dabei von der Evolute abwickelt, wieder die ursprüngliche Curve M′ M″ M‴ M⁗ beschreiben. Man nennt deshalb die Curve M′ M″ etc., die Evolvente von N′ N″ N‴, während letztere die Evolute der ersteren ist. Man erkennt nun leicht, dass irgend ein anderer

Punkt auf dem abgewickelten Faden, z. B. Q', eine andere zu N' N'' N''' gehörige Evolvente (Q'Q''Q''') beschreiben würde, wenn sich der obgenannte Faden von der Curve N' N'' N''' abwickelt. Es ergiebt sich demnach folgender Satz:

Fig. 65.

„Jede Curve hat nur **eine einzige Evolute,** während man zu jeder als Evolute gedachten Curve **unzählig viele Evolventen** construirt denken kann.

Bemerkungen.

1) Alle diese Evolventen sind aequidistante Linien.

2) Nach dem Vorstehenden ist die Cycloide AMTQ (Fig. 66) eine Evolvente der beiden halben Cycloiden AS und SQ. Befestigt man demnach einen **vollkommen biegsamen und undehnbaren** Faden in dem Punkte S und legt denselben um die halbe Cycloide SIA, so wird das Ende A die Cycloide AMTQ beschreiben, wenn man den Faden immer straff hält, und ihn dabei von der halben Cycloide AS abwickelt, und wieder auf die halbe Cycloide SQ aufwickelt, bis das Ende des Fadens in dem Punkte Q anlangt.

Fig. 66.

Aufgabe. Man soll die Länge der Cycloide AMTQ (Fig. 66) ermitteln.

Auflösung. Für den Punkt A der Cycloide AMTQ ist der Krümmungshalbmesser gleich Null. Für den Scheitelpunkt T ist, nach §. 102, der Krümmungshalbmesser ϱ gleich $4\,r \sin\frac{t}{2}$. TO ist Durchmesser des Krümmungskreises, folglich $t = 180^0$ und demnach $\sin\frac{t}{2} = 1$, woraus folgt, dass ϱ gleich $4\,r$ ist.

Ferner lässt sich noch leicht aus §. 102 ableiten, dass für alle Punkte der Cycloide, welche zwischen den Punkten A und T liegen, das Vorzeichen von $d\varrho$ positiv ist (dass es sich also in diesem Intervalle nicht ändert). Demnach ergiebt sich mit Hülfe von §. 107, dass die Evolute $AIS = TS = 4\,r$ ist.

Nun ist aber nach §. 105, Aufgabe 5 die Evolute AIS congruent der halben Cycloide AMT, mithin ist auch

$$AMT = 4\,r,$$

also die ganze Cycloide $AMTQ = 8\,r$, d. h. **der Bogen einer gemeinen Cycloide ist 8 mal so lang wie der Radius des erzeugenden Kreises.**

Bemerkungen.

1) Einfacher hätte man die Aufgabe in folgender Weise lösen können: Nimmt man an, dass TS ein vollkommen biegsamer undehnbarer Faden sei, und wickelt man diesen Faden auf die Cycloide SIA, so wird der Punkt T mit A zusammenfallen. Demnach ist $TS = \overset{\smile}{SIA}$. Weil nun $TS = 4r$, so ist SIA auch gleich 4r. Ferner ist $SIA = \frac{1}{2}\,\overset{\smile}{ATQ}$, also $ATQ = 8r$.

2) In der Integral-Rechnung werden wir die Länge des Cycloiden-Bogens auf einem anderen Wege ermitteln.

3) Die Cycloide findet viele Anwendungen in der technischen Mechanik.

Zweiter Theil.

Functionen von mehreren unabhängig veränderlichen Grössen.

XVI. Capitel.

§. 109.

Differentiation einer Function von zwei unabhängig veränderlichen Grössen.

Wenn eine Gleichung zwischen drei veränderlichen Grössen x, y und z gegeben ist, so wird man zweien von diesen veränderlichen Grössen, z. B. x und y, beliebige Werthe beilegen können. Hierdurch ist der Werth der dritten veränderlichen Grösse (z) bestimmt. In diesem Falle sind also x und y die unabhängig veränderlichen und z ist die abhängig veränderliche Grösse, **oder z ist eine Function von x und y.**

Nehmen wir nun an, es sei

1) $z = f(x, y)$,

so kann z auf dreifache Art seinen Werth ändern.

1) **dadurch, dass sich x allein ändert,**
2) **dadurch, dass sich y allein ändert,**
3) **dadurch, dass sich x und y ändern.**

Die Zunahme von z, die daraus hervorgeht, dass sich x **allein** ändert, heisst die **partielle** Zunahme von z in Bezug auf x. Man bezeichnet sie durch das Symbol $\triangle_x z$. Wenn sich y **allein** ändert, so nennt man die entsprechende Zunahme von z eine **partielle** Zunahme von z in Bezug auf y. Man bezeichnet sie durch das Symbol $\triangle_y z$.

Wenn sich endlich alle unabhängigen Variabeln (x und y) ändern, so nennt man die hieraus entstehende Zunahme von z eine **totale** Zunahme. Man bezeichnet sie durch das Symbol $\triangle z$.

Das Differential, welches sich ergiebt, wenn man z nach **einer einzigen** unabhängig Veränderlichen differentiirt, wird **partielles** Differential genannt; dagegen ist dasjenige Differential, welches entsteht, wenn man z nach **allen** unabhängigen Variabeln differentiirt, das **totale** Differential von z. Die partiellen Differentiale von z bezeichnet man durch ein rundes ∂ das totale dagegen wird durch ein römisches d bezeichnet. Demnach bezeichnen die Symbole $\partial_x z$ und $\partial_y z$ die partiellen Differentiale von z resp. nach x und y, während das Symbol dz das totale Differential von z bezeichnet.

Die Differential-Quotienten, die entstehen, wenn man z nach x oder y differentiirt, bezeichnet man resp. durch $\frac{\partial z}{dx}$ und $\frac{\partial z}{dy}$. Nimmt man darauf Rücksicht, dass $z = f(x, y)$ ist, so kann man auch $f'_x(x, y)$ und $f'_y(x, y)$ resp. statt $\frac{\partial z}{dx}$ und $\frac{\partial z}{dy}$ schreiben.

Aufgabe 1. Wie gross ist $\triangle_x z$, $\triangle_y z$ und $\triangle z$, wenn gegeben ist

1) $z = y^4 . x^3$.
2) $x = 4 \quad y = 8$.
3) $\triangle x = 3, \triangle y = 2$?

Auflösung. Setzen wir in die Gleichung $z = y^4 . x^3$ für x und y ihre Werthe nach Gleichung 1), so folgt

4) $z = 8^4 . 4^3 = 262144$.

Ferner ist nach Gleichung 3), $\triangle x = 3$, also

5) $z + \triangle_x z = 8^4 . (4 + 3)^3 = 1404928$.

Subtrahiren wir nun Gleichung 4) von Gleichung 5), so folgt

6) $\Delta_x z = 1142784.$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) folgt ferner

7) $z + \Delta_y z = (8 + 2)^4 . 4^3 = 640000.$

Subtrahiren wir hiervon

8) $z = 8^4 . 4^3 \qquad = 262144$, so folgt

9) $\qquad \Delta_y z \qquad = 377856.$

Lassen wir endlich sowohl x als auch y sich resp. um Δx und Δy ändern, so folgt

10) $z + \Delta z = (8 + 2)^4 . (4 + 3)^3 = 3430000.$

Subtrahiren wir hiervon

11) $z = 8^4 . 4^3 \qquad = 262144$, so folgt

12) $\qquad \Delta z \qquad = 3167856.$

Aufgabe 2. Wie gross ist $\frac{\partial z}{dx}$ und $\frac{\partial z}{dy}$, wenn $z = y^4 x^3$ ist.

Auflösung. Wir erhalten den Werth von $\frac{\partial z}{dx}$, wenn wir z allein nach x differentiiren, und den Werth von $\frac{\partial z}{dy}$, wenn wir z allein nach y differentiiren. Demnach ist

1) $\frac{\partial z}{dx} = 3y^4 x^2.$

2) $\frac{\partial z}{dy} = 4y^3 x^3.$

Hieraus ergiebt sich ferner noch

3) $\partial_x z = 3y^4 x^2 dx$

4) $\partial_y z = 4y^3 x^3 dy.$

§. 110.

Fortsetzung.

Nehmen wir jetzt an, es sei z ganz allgemein, irgend eine Function von x und y, also

1) $z = f(x, y)$

und lassen wir in dieser Gleichung x und y resp. um die Grössen $\triangle x$ und $\triangle y$ wachsen, so erhalten wir

$$2)\quad z + \triangle z = f(x + \triangle x, y + \triangle y).$$

Subtrahiren wir Gleichung 1) von Gleichung 2), so folgt

$$3)\quad \triangle z = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y).$$

Addiren wir hierzu die Gleichung

$$4)\quad 0 = - f(x, y + \triangle y) + f(x, y + \triangle y),$$ so folgt

$$5)\quad \triangle z = f(x+\triangle x, y+\triangle y) - f(x, y+\triangle y) + f(x, y+\triangle y) - f(x, y),$$ also

$$6)\quad \triangle z = \frac{f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y + \triangle y)}{\triangle x} . \triangle x + \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x, y)}{\triangle y} . \triangle y.$$

Hieraus folgt

$$7)\quad dz = \lim \frac{f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y + \triangle y)}{\triangle x} . \triangle x + \lim \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x, y)}{\triangle y} . \triangle y.$$

Nun erkennt man leicht (§. 6), dass

$$8)\quad \lim \frac{f(x+\triangle x, y+\triangle y) - f(x, y+\triangle y)}{\triangle x} = \frac{\partial z}{dx} = f'_x(x,y)$$

$$9)\quad \lim \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x,y)}{\triangle y} = \frac{\partial z}{dy} = f'_y(x,y).$$

Verbinden wir diese beiden Gleichungen 8) und 9) mit Gleichung 7), so folgt

$$10)\quad dz = \frac{\partial z}{dx} . dx + \frac{\partial z}{dy} dy$$

$$11)\quad dz = f'_x(x,y)\, dx + f'_y(x,y)\, dy$$

$$12)\quad dz = \partial_x z + \partial_y z$$

$$13)\quad d f(x,y) = \partial_x f(x,y) + \partial_y f(x,y).$$

Will man die Formeln 10, bis 12, in Worten ausdrücken, so kann man sagen: „Wenn z eine Function von x und y ist, so ist das totale Differential von z gleich der Summe der beiden partiellen Differentiale, welche man erhält, wenn man z nach x und y differentiirt.“

§. 111.

Aufgaben.

Man soll die Werthe xon $\frac{\partial z}{dx} \cdot \frac{\partial z}{dy}$ und dz ermitteln, wenn gegeben ist

1) $z = y^2 x^3$

2) $z = y^2 \sin x$

3) $z = y^3 + 4x^2 y + y^2$

4) $z = e^y . \text{arc}\sin x + x^2 \, ly.$

Auflösung 1. Aus der Gleichung

1) $z = y^2 x^3$ folgt

2) $\frac{\partial z}{dx} = 3 \, y^2 x^2$

3) $\frac{\partial z}{dy} = 2 \, y \, x^3.$

Hieraus folgt

4) $dz = 3 \, y^2 x^2 \, dx + 2 \, y \, x^3 \, dy.$

Auflösung 2. Aus der Gleichung

1) $z = y^2 \sin x$ folgt

2) $\frac{\partial z}{dx} = y^2 . \cos x$

3) $\frac{\partial z}{dy} = 2 \, y . \sin x$

4) $dz = y^2 . \cos x \, dx + 2 y \sin x \, d y.$

Auflösung 3. Aus der Gleichung

1) $z = y^3 + 4 x^2 y + y^2$ folgt

2) $\frac{\partial z}{dx} = 8 \, xy$

3) $\frac{\partial z}{dy} = 3 y^2 + 4 x^2 + 2 \, y$

4) $dz = 8 x y \, dx + 3 y^2 \, dy + 4 x^2 \, dy + 2 y \, dy.$

Auflösung 4. Aus der Gleichung

1) $z = e^y . \text{arc} \sin x + x^2 . ly$ folgt

2) $\frac{\partial z}{dx} = \frac{e^y}{\sqrt{1-x^2}} + 2x \,.\, ly$

3) $\frac{\partial z}{dy} = e^y \,.\, \mathrm{arc\,sin}\, x + \frac{x^2}{y}$

4) $dz = \frac{e^y}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + 2x\, ly\, dx + e^y\, \mathrm{arc\,sin}\, x\, dy + \frac{x^2}{y} dy.$

§. 112.

Differentiation der Functionen mit mehr als zwei unabhängigen Variabeln.

Wenn eine Function mit mehr als zwei unabhängigen Variabeln vorliegt, so erfolgt die Differentiation in ähnlicher Weise, wie wir es in dem Vorstehenden für zwei unabhängig Veränderliche auseinandergesetzt haben. Es sei z. B.

1) $z = f(u, x, y)$, so ist

2) $z + \Delta z = f(u + \Delta u, x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Subtrahiren wir Gleichung 1) von Gleichung 2), so folgt

3) $\Delta z = f(u + \Delta u, x + \Delta x, y + \Delta y) - f(u, x, y)$.

Addirt man hierzu

4) $0 = \begin{cases} - f(u, x + \Delta x, y + \Delta y) + f(u, x + \Delta x, y + \Delta y) \\ - f(u, x, y + \Delta y) + f(u, x, y + \Delta y), \end{cases}$

so folgt

5) $\Delta z = \begin{cases} f(u + \Delta u, x + \Delta x, y + \Delta y) - f(u, x + \Delta x, y + \Delta y) \\ + f(u, x + \Delta x, y + \Delta y) - f(u, x, y + \Delta y) \\ + f(u, x, y + \Delta y) - f(u, x, y) \end{cases}$

6) $\Delta z = \begin{cases} \frac{f(u + \Delta u, x + \Delta x, y + \Delta y) - f(u, x + \Delta x, y + \Delta y)}{\Delta u} . \Delta u \\ + \frac{f(u, x + \Delta x, y + \Delta y) - f(u, x, y + \Delta y)}{\Delta x} . \Delta x \\ + \frac{f(u, x, y + \Delta y) - f(u, x, y)}{\Delta y} . \Delta y \end{cases}$

$$7)\ dz = \begin{cases} \left(\lim \frac{f(u+\Delta u, x+\Delta x, y+\Delta y) - f(u, x+\Delta x, y+\Delta y)}{\Delta u}\right).du \\ + \left(\lim \frac{f(u, x+\Delta x, y+\Delta y) - f(u, x, y+\Delta y)}{\Delta x}\right).dx \\ + \left(\lim \frac{f(u, x, y+\Delta y) - f(u, x, y)}{\Delta y}\right).dy \end{cases}$$

$$8)\ dz = \frac{\partial z}{du} du + \frac{\partial z}{dx} dx + \frac{\partial z}{dy} dy.$$

Aufgabe. Es ist gegeben $z = \sin u \,.\, x^2 y + e^y \,.\, lu$, wie gross ist

$$\frac{\partial z}{du}, \frac{\partial z}{dx}, \frac{\partial z}{dy} \text{ und } dz?$$

Auflösung. Durch partielle Differentiation ergiebt sich

$$1)\ \frac{\partial z}{du} = \cos u \,.\, x^2 y + \frac{e^y}{u}$$

$$2)\ \frac{\partial z}{dx} = 2 \sin u \,.\, x \,.\, y$$

$$3)\ \frac{\partial z}{dy} = \sin u \,.\, x^2 + e^y\, lu.$$

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) folgt weiter

$$4)\ dz = \left(\cos u \,.\, x^2 y + \frac{e^y}{u}\right) du$$
$$+ 2 \sin u \,.\, xy\, dx + (\sin u \,.\, x^2 + e^y\, lu)\, dy.$$

§. 113.

Wiederholte Differentiation einer Function von mehreren unabhängigen Variabeln.

Wenn $z = f(x, y)$ ist, so sind die Differential-Quotienten $\frac{\partial z}{dx}$ und $\frac{\partial z}{dy}$ im Allgemeinen wieder Functionen von x und y. Man wird demnach jeden dieser beiden Differential-Quotienten wieder **sowohl nach x als auch nach y** differentiiren können.

Wenn wir diese Differentiationen ausführen, so erhalten wir die 4 Differential-Quotienten (abgeleiteten Functionen)

1) $\frac{\partial \frac{\partial z}{dx}}{dx}$ d. i. diejenige abgeleitete Function von z, welche wir erhalten, wenn wir z zwei Mal nach x differentiiren.

2) $\frac{\partial \frac{\partial z}{dx}}{dy}$ d. i. diejenige abgeleitete Function von z, welche wir erhalten, wenn wir erst nach x differentiiren, und den erhaltenen Differential-Quotienten darauf nach y differentiiren.

3) $\frac{\partial \frac{\partial z}{dy}}{dx}$ d. i. diejenige abgeleitete Funktion von z, welche wir erhalten, wenn wir z erst nach y differentiiren, und den erhaltenen Differential-Quotienten darauf nach x differentiiren.

4) $\frac{\partial \frac{\partial z}{dy}}{dy}$ d. i. diejenige abgeleitete Function von z, welche wir erhalten, wenn wir z zwei Mal nach y differentiiren.

Der kürzeren Schreibweise wegen schreibt man gewöhnlich

5) $\frac{\partial^2 z}{dx^2}$ statt $\frac{\partial \frac{\partial z}{dx}}{dx}$

6) $\frac{\partial^2 z}{dx . dy}$ statt $\frac{\partial \frac{\partial z}{dx}}{dy}$

7) $\frac{\partial^2 z}{dy . dx}$ statt $\frac{\partial \frac{\partial z}{dy}}{dx}$

8) $\frac{\partial^2 z}{d^2 y}$ statt $\frac{\partial \frac{\partial z}{dy}}{dy}$.

Bemerkung.

Man erkennt aus No. 6 und 7, dass die Ausdrücke $\frac{\partial^2 z}{dx . dy}$ und $\frac{\partial^2 z}{dy . dx}$ in formeller Beziehung von einander verschieden sind; indem $\frac{\partial^2 z}{dx . dy}$ diejenige Function von x und y darstellt, welche dadurch entsteht, dass z erst nach x und dann nach y differentiirt wird, während $\frac{\partial^2 z}{dy . dx}$

diejenige Function von x und y darstellt, welche entsteht, **wenn z erst nach y und dann nach x differentiirt wird.** Dem Werthe nach ist jedoch $\frac{\partial^2 z}{dx.dy} = \frac{\partial^2 z}{dy.dx}$, wie dies in dem folgenden Paragraphen bewiesen werden soll.

§. 114.

Fortsetzung.

Aufgabe 1. Man soll die Werthe von $\frac{\partial^2 z}{dx^2}$, $\frac{\partial^2 z}{dx.dy}$, $\frac{\partial^2 z}{dy.dx}$, $\frac{\partial^2 z}{dy^2}$ ermitteln, wenn gegeben ist

$$1)\quad z = y^3 x^2 - xy + xy^5.$$

Auflösung. Aus Gleichung 1) ergiebt sich durch Differentiation

$$2)\quad \frac{\partial z}{dx} = 2y^3 x - y + y^5$$

$$3)\quad \frac{\partial z}{dy} = 3y^2 x^2 - x + 5xy^4$$

$$4)\quad \frac{\partial^2 z}{dx^2} = 2y^3$$

$$5)\quad \frac{\partial^2 z}{dx.dy} = 6y^2 x - 1 + 5y^4$$

$$6)\quad \frac{\partial^2 z}{dy.dx} = 6y^2 x - 1 + 5y^4$$

$$7)\quad \frac{\partial^2 z}{dy^2} = 6yx^2 + 20xy^3.$$

Aufgabe 2. Man soll die Werthe von $\frac{\partial^2 z}{dx^2}$, $\frac{\partial^2 z}{dx.dy}$, $\frac{\partial^2 z}{dy.dx}$ und $\frac{\partial^2 z}{dy^2}$ ermitteln, wenn gegeben ist

$$1)\quad z = \sin x . ly + e^y . lx.$$

Auflösung. Durch Differentiation finden wir

$$2)\quad \frac{\partial z}{dx} = \cos x . ly + \frac{e^y}{x}$$

$$3)\quad \frac{\partial z}{dy} = \frac{\sin x}{y} + e_y . lx.$$

Hieraus ergiebt sich weiter

$$4)\quad \frac{\partial^2 z}{dx^2} = -\sin x\,.\,ly - \frac{e^y}{x^2}$$

$$5)\quad \frac{\partial^2 z}{dx\,.\,dy} = \frac{\cos x}{y} + \frac{e^y}{x}$$

$$6)\quad \frac{\partial^2 z}{dy\,.\,dx} = \frac{\cos x}{y} + \frac{e^y}{x}$$

$$7)\quad \frac{\partial^2 z}{dy^2} = -\frac{\sin x}{y^2} + e^y\,.\,lx.$$

Bemerkung. Man sieht, dass in den vorstehenden speciellen Fällen $\frac{\partial^2 z}{dx\,.\,dy} = \frac{\partial^2 z}{dy\,.\,dx}$ ist.

§. 115.

Fortsetzung.

Lehrsatz. Wenn $z = f(x,y)$, so ist stets $\frac{\partial^2 z}{dx.dy} = \frac{\partial^2 z}{dy.dx}$.

Beweis. Aus den ersten Begriffen der Differentialrechnung (§. 6) folgt

$$1)\quad \frac{\partial z}{dx} = \lim \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}\,.$$

Hieraus folgt weiter

$$2)\quad \frac{\partial \frac{\partial z}{dx}}{dy} = \lim \frac{\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} - \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}}{\Delta y}$$

Ferner ist

$$3)\quad \frac{\partial z}{dy} = \lim \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$4)\quad \frac{\partial \frac{\partial z}{dy}}{dx} = \lim \frac{\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y} - \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}}{\Delta x}$$

Aus der Gleichung 4) folgt durch eine einfache Umformung

$$5)\quad \frac{\partial \frac{\partial z}{dy}}{dx} = \lim \frac{\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} - \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}}{\Delta y}$$

Jetzt stimmen die rechten Seiten der Gleichungen 2) und 5) vollkommen überein, demnach erhalten wir

$$6)\ \frac{\partial \frac{\partial z}{dx}}{dy} = \frac{\partial \frac{\partial z}{dy}}{dx} \text{ oder}$$

$$7)\ \frac{\partial^2 z}{dx.dy} = \frac{\partial^2 z}{dy.dx}\ .$$

In dem Vorstehenden ist also bewiesen, dass es auf den Werth der entstehenden abgeleiteten Function **keinen Einfluss hat, ob man z erst nach x und dann nach y differentiirt, oder ob man erst nach y und dann nach x differentiirt.**

In ganz analoger Weise lässt sich nachweisen, dass bei der Entwickelung der höheren Differentialquotienten die Reihenfolge der Differentiation auf das Resultat keinen Einfluss hat, und dass besonders

$$\frac{\partial^{n+m} z}{dx^n.\ dy^m} = \frac{\partial^{m+n} z}{dy^m.\ dx^n} \text{ ist.}$$

§. 116.

Fortsetzung.

Will man jetzt noch die höheren totalen Differentiale von $z = f(x, y)$ entwickeln, so ergiebt sich nach §. 110, Gleichung 10)

$$1)\ dz = \frac{\partial z}{dx} dx + \frac{\partial z}{dy} dy.$$

$$2)\ d^2 z = \frac{\partial^2 z}{dx^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{dx.dy} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{dy.dx} dy\,dx + \frac{\partial^2 z}{dy^2} dy^2.$$

Weil nun $\frac{\partial^2 z}{dx.dy} = \frac{\partial^2 z}{dy.dx}$, so folgt aus Gleichung 2)

$$3)\ d^2 z = \frac{\partial^2 z}{dx^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{dx.dy} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{dy^2} dy^2.$$

In ähnlicher Weise folgt weiter

$$4)\ d^3 z = \frac{\partial^3 z}{dx^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{dx^2 dy} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{dx\,dy^2} dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{dy^3}\ .$$

Setzt man die Differentiation weiter fort, so erkennt man, dass man symbolisch schreiben kann $d^n z = \left(\frac{\partial z}{dx}dx + \frac{\partial z}{dy}dy\right)^n$, wobei man sich vorbehält, nach der Entwickelung der Potenz $\left(\frac{\partial z}{dx}dx + \frac{\partial z}{dy}dy\right)^n$ überall $\partial^2 z$, $\partial^3 z$, $\partial^n z$ resp. statt ∂z^2 ∂z^3, ∂z^n zu schreiben.

§. 117.

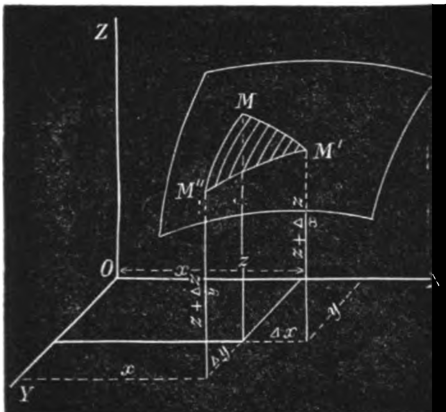
Berührende Ebene an einer beliebigen krummen Fläche.

Aufgabe. Die Gleichung einer krummen Fläche (Figur 67) sei

$$z = f(x, y).$$

Man soll durch den Punkt M dieser krummen Fläche eine berührende Ebene an dieselbe legen.

Fig. 67.



Auflösung. Die Coordinaten des Punktes M wollen wir kurzweg resp. durch x, y und z bezeichnen. Lassen wir nun x um $\triangle x$ wachsen, so gelangen wir von dem Punkte M zu einem neuen Punkte M' unserer krummen Fläche, dessen Coordinaten resp. $x + \triangle x$, y, $z + \triangle_x z$ sind. Lassen wir dagegen y allein wachsen, so gelangen wir von dem Punkte M zu einem dritten Punkte M'' auf der krummen Fläche, dessen Coordinaten resp. x, $y + \triangle y$, $z + \triangle_y z$ sind. Durch die drei Punkte M, M' und M'' ist eine Ebene bestimmt. Nennen wir die laufenden Coordinaten dieser Ebene resp. u, v, w, so lässt sich die Gleichung dieser Ebene auf die Form

1) $w = Au + Bv + C$ bringen.

Da nun unsere Ebene durch die Punkte M, M' und M'' gehen soll, so bleibt die Gleichung 1) bestehen, wenn wir in derselben u, v und w resp. gleich den Coordinaten der Punkte M, M' und M'' setzen. Wir erhalten dadurch aus Gleichung 1) folgende 3 Gleichungen

$$2)\ z = Ax + By + C$$
$$3)\ z + \triangle_x z = A(x + \triangle x) + By + C$$
$$4)\ z + \triangle_y z = Ax + B(y + \triangle y) + C.$$

Subtrahiren wir Gleichung 2) von den Gleichungen 3), 4) und 1), so folgt

$$5)\ \triangle_x z = A.\triangle x,\ \text{also}\ \frac{\triangle_x z}{\triangle x} = A$$

$$6)\ \triangle_y z = B.\triangle y,\ \text{also}\ \frac{\triangle_y z}{\triangle y} = B$$

$$7)\ w - z = A(u - x) + B(v - y).$$

Schalten wir nun die Werthe von A und B nach den Gleichungen 5) und 6) in Gleichung 7) ein, so folgt

$$8)\ w - z = \frac{\triangle_x z}{\triangle x}(u - x) + \frac{\triangle_y z}{\triangle y}(v - y).$$

Diese Gleichung ist die Gleichung der Ebene, welche durch die Punkte M, M', M'' geht. Es ist zu beachten, **dass** u, v **und** w **laufende Coordinaten sind, während x, y und** z **die Coordinaten eines bestimmten Punktes der Ebene bezeichnen, so dass x, y und z in Bezug auf unsere Ebene** (Gleichung 8) **constante Grössen darstellen.**

Lassen wir nun $\triangle x$ und $\triangle y$ resp. zu dx und dy, d. i. zu Null werden, so findet Folgendes Statt

1) die Punkte M' und M'' fallen mit M zusammen,

2) die Differenz-Quotienten $\frac{\triangle_x z}{\triangle x}$ und $\frac{\triangle_y z}{\triangle y}$ werden zu Differential-Quotienten oder

$\frac{\triangle_x z}{\triangle x}$ wird zu $\frac{\partial z}{dx}$, $\frac{\triangle_y z}{\triangle y}$ wird zu $\frac{\partial z}{dy}$,

3) die Ebene, welche durch die Punkte M, M' und M'' gelegt ist, wird demgemäss zu einer Ebene, welche unsere krumme Fläche $z = f(x,y)$ in dem Punkte M **berührt.**

Um die Gleichung dieser **berührenden** Ebene aufzustellen, brauchen wir also nur $\frac{\partial z}{dx}$ und $\frac{\partial z}{dy}$ statt $\frac{\triangle_x z}{\triangle x}$ und $\frac{\triangle_y z}{\triangle y}$ in Gleichung 8) einzuschalten. Wir erhalten dann als **Gleichung der berührenden Ebene**

$$9)\quad w - z = \frac{\partial z}{dx}(u - x) = \frac{\partial z}{dy}(v - y).$$

Bemerkung.

Wir wiederholen für den Anfänger, dass in Gleichung 9) u, v und w die laufenden Coordinaten der berührenden Ebene, und dass x, y und z die Coordinaten des Berührungspunktes sind; **so dass x, y und z in Bezug auf die berührende Ebene als constante Grössen angesehen werden müssen.**

§. 118.

Fortsetzung.

Aufgabe. Eine Parabel, deren Parameter gleich 9 ist, rotirt um ihre geometrische Achse. Hierdurch entsteht ein Rotations-Paraboloid, dessen Gleichung

1) $9z = x^2 + y^2$ ist.

Man soll durch den Punkt (M) dieses Rotations-Paraboloides, für welchen $x = 3$ und $y = 4$ eine berührende Ebene an das Paraboloid legen, und die Gleichung derselben aufstellen.

Auflösung. Nach der Gleichung 9) des vorigen Paragraphen hat die Gleichung der gesuchten Ebene die Form

$$2)\quad w - z = \frac{\partial z}{dx}(u - x) + \frac{\partial z}{dy}(v - y).$$

Nun folgt aus Gleichung 1)

$= z\ (3\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9}$

$$4)\quad \frac{\partial z}{dx} = \frac{2x}{9}$$

$$5)\quad \frac{\partial z}{dy} = \frac{2y}{9}.$$

Setzen wir für x und y ihre Werthe nach der Bedingung der Aufgabe in die Gleichungen 3) bis 5) ein, so folgt

$$6)\quad z = \frac{3^2}{9} + \frac{4^2}{9} = \frac{25}{9}$$

$$7)\quad \frac{\partial z}{dx} = \frac{2.3}{9} = \frac{2}{3}$$

$$8)\quad \frac{\partial z}{dx} = \frac{2.4}{9} = \frac{8}{9}.$$

Schalten wir die hier gefundenen Werthe von z, $\frac{\partial z}{dx}$ und $\frac{\partial z}{dy}$ in Gleichung 2) ein, so folgt

$$9)\quad w - \frac{25}{9} = \frac{2}{3}(u-3) + \frac{8}{9}(v-4)$$

$$10)\quad 9w - 25 = 6u - 18 + 8v - 32$$

$$11)\quad 9w = 6u + 8v - 25$$

$$12)\quad w = \frac{2}{3}u + \frac{8}{9}v - \frac{25}{9}.$$

Vorstehende Gleichung ist die gesuchte Gleichung der berührenden Ebene.

Bemerkung.

Dem Leser, welcher mit den Anfangsgründen der descriptiven Geometrie vertraut ist, empfehlen wir, das Resultat der Rechnung auf graphischem Wege zu prüfen.

XVII. Capitel.

Taylors Reihe für mehrere unabhängig veränderliche Grössen. Maxima und Minima der Functionen von mehreren unabhängig veränderlichen Grössen. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

§. 119.

Entwickelung von Taylors Reihe.

Es sei z irgend eine Function von x und y, z. B.

1) $z = f(x, y)$.

Nehmen wir nun an, dass sich x und y resp. um die Grössen a und k ändern, und dass sich in Folge dessen z um $\triangle z$ ändert, so entsteht aus der Gleichung 1)

2) $z + \triangle z = f(x + a, y + k)$.

Um den Werth von $f(x + a, y + k)$ in eine Reihe zu entwickeln, nehmen wir vor der Hand an, dass sich x **allein** geändert habe und zwar um die Grösse a. Wir erhalten dann

3) $z + \triangle_x z = f(x + a, y)$

4) $z + \triangle_x z = f(x,y) + a f'_x(x,y) + \frac{a^2}{2} f''_{x_2}(x,y) + \frac{a^3}{3!} f'''_{x_3}(x,y) + \dots$

Lassen wir in dieser Gleichung y um die Grösse k zunehmen, so erhalten wir nach dem Vorstehenden

5) $z + \triangle z = f(x,y+k) + af'_x(x,y+k) + \frac{a^2}{2} f'_{x_2}(x,y+k) + \frac{a^3}{3!} f'''_{x_3}(x,y+k) + \dots$

Entwickeln wir nun die Grössen $f(x,y+k)$, $f'_x(x,y+k)$, $f''_{x_2}(x,y+k)$ etc. nach §. 46, so erhalten wir

6) $f(x,y+k) = f(x,y) + k.f'_y(x,y) + \frac{k^2}{2!} f''_{y_2}(x,y) + \frac{k^3}{3!} f'''_{y_3}(x,y) + \ldots$

7) $f'_x(x,y+k) = f'_x(x,y) + k.f''_{x,y}(x,y) + \frac{k^2}{2!} f''_{x,y_2}(x,y) + \ldots$

8) $f''_{x_2}(x,y+k) = f''_{x_2}(x,y) + k f'''_{x_2y}(x,y) + \ldots$

etc. etc.

Schalten wir die für $f(x,y+k)$, $f'_x(xy+k)$ etc. gefundenen Werthe aus den Gleichungen 6) bis 8) etc. in Gleichung 5) ein, so folgt

$$9)\ z+\triangle z = f(x,y) + af'_x(x,y) + \frac{a^2}{2} f''_{x_2}(x,y) + \frac{a^3}{3!} f'''_{x_3}(x,y) + \text{etc.}$$
$$+ kf'_y(x,y) + akf''_{x,y}(x,y) + \frac{a^2k}{1.2} f'''_{x_2y}(x,y) + \text{etc}$$
$$+ \frac{k^2}{2} f''_{y_2}(x,y) + \frac{ak^2}{1.2} f'''_{x,y_2}(x,y) + \text{etc.}$$
$$+ \frac{k^3}{3!} f'''_{y_3}(x,y) + \text{etc.}$$

Weil $z = f(x,y)$, so kann man statt Gleichung 9) auch schreiben

$$10)\ z + \triangle z = z + a\frac{\partial z}{dx} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 z}{dx^2} + \frac{a^3}{3!}\frac{\partial^3 z}{dx^3} \text{ etc.}$$
$$+ k\frac{\partial z}{dy} + ak\frac{\partial^2 z}{dx\,dy} + \frac{a^2k}{2}\frac{\partial^3 z}{dx^2dy} \text{ etc.}$$
$$+ \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 z}{dy^2} + \frac{ak^2}{2}\frac{\partial^3 z}{dx\,dy^2} \text{ etc.}$$
$$+ \frac{k^3}{3!}\frac{\partial^3 z}{dy^3} \text{ etc.}$$

§. 120.

Erläuterung durch ein Beispiel.

Aufgabe. Es ist gegeben

1) $z = x^2y$

Die ursprünglichen Werthe von x und y mögen sein

2) $x = 7,\ y = 4.$

Man soll **mit Hülfe von Taylors Reihe** die neuen Werthe von $z + \triangle z$ ermitteln, wenn die Zunahmen von x und y resp. sind

3) $a = 3,\ k = 2.$

Auflösung. Aus Gleichung 1) und 2) erhalten wir

4) $\frac{\partial z}{dx} = 2x \cdot y = 2 \cdot 7 \cdot 4 = 56$

5) $\frac{\partial z}{dy} = x^2 = 7^2 = 49$

6) $\frac{\partial^2 z}{dx^2} = 2y = 2 \cdot 4 = 8$

7) $\frac{\partial^2 z}{dx\,dy} = 2x = 2 \cdot 7 = 14$

8) $\frac{\partial^2 z}{dy^2} = 0$

9) $\frac{\partial^3 z}{dx^3} = 0$

10) $\frac{\partial^3 z}{dx^2 dy} = 2$

11) $\frac{\partial^3 z}{dx\,dy^2} = 0$

12) $\frac{\partial^3 z}{dy^3} = 0.$

Alle folgenden höheren abgeleiteten Functionen sind ebenfalls gleich Null.

Taylors Reihe giebt also in unserm speciellen Falle eine geschlossene Reihe.

Schalten wir nun die Werthe von

$$\frac{\partial z}{dx}, \frac{\partial z}{dy} \text{ etc.}$$

nach den Gleichungen 4) bis 12) in Gleichung 10) des vorigen Paragraphen ein, so folgt

$$13)\ z + \Delta z = z + a\,56 + \frac{a^2}{2}\,8 + \frac{a^3}{3!}\,.0$$
$$+ k\,49 + ak\,14 + \frac{a^2k}{2}.2$$
$$+ \frac{k^2}{2}\,0 + \frac{ak^2}{2}.0$$
$$+ \frac{k^3}{3!}.0.$$

Nun ist nach den Gleichungen 1) und 2)

$$14)\ z = x^2y = 7^2\,.\,4 = 196.$$

Schalten wir diesen Werth von z, und die Werthe von a und k nach Gleichung 3) in Gleichung 13) ein, so folgt

$$15)\ z + \Delta z = 196 + 3\,.\,56 + \frac{9}{2}.8 + \frac{18}{2}.2$$
$$+ 2\,.\,49 + 6\,.\,14$$

$$16)\ z + \Delta z = \begin{array}{r} 196 \\ 168 \\ 98 \\ 36 \\ 84 \\ 18 \\ \hline 600 \end{array}$$

Bemerkung.

Aus den Gleichungen 1), 2) und 3) folgt unmittelbar

$$17)\ z + \Delta z = (7 + 3)^2\,.\,(4 + 2)$$
$$18)\ z + \Delta z = 600.$$

Ein Resultat, welches mit Gleichung 16) übereinstimmt.

§. 121.

Maxima und Minima der Functionen mehrerer unabhängig veränderlicher Grössen.

Wenn $z = f(x,y)$, so geben diejenigen Werthe von x und y ein **Maximum**, für welche bei beliebigen positiven oder negativen, aber **hinreichend kleinen** absoluten Werthen von a und k

$$1)\ f(x,y) > f(x + a,\ y + k);$$

dagegen findet ein **Minimum** Statt, wenn für beliebige positive oder negative, aber **hinreichend kleine** absolute Werthe von a und k

$$2)\ f(x,y) < f(x + a, y + k).$$

Entwickeln wir $f(x + a, y + k)$ nach Taylors Reihe, so finden wir nach §. 119, Gl. 10)

$$3)\ f(x + a, y + k) = z + a \frac{\partial z}{dx} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 z}{dx^2} + \frac{a^3}{3!} \frac{\partial^3 z}{dy^3} \text{ etc.}$$
$$+ k \frac{\partial z}{dy} + ak \,.\, \frac{\partial^2 z}{dx\,dy} + \frac{a^2 k}{2} \frac{\partial^3 z}{dx^2 dy} \text{ etc.}$$
$$+ \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 z}{dy^2} + \frac{ak^2}{2} \frac{\partial^2 z}{dx dy^2} \text{ etc.}$$
$$+ \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 z}{dy^3} \text{ etc.}$$

Nehmen wir nun an, dass die vorliegende Doppelreihe für $f(x + a, y + k)$ continuirlich ist, dass also die abgeleiteten Functionen $\frac{\partial z}{dx}, \frac{\partial z}{dy}$ etc. nicht unendlich gross werden, so erkennt man sehr leicht, dass bei **hinreichend kleinen** Werthen von a und k die Summe irgend einer Vertical-Columne dieser Doppelreihe **dem absoluten Werthe nach grösser ist, als die Summe der absoluten Werthe aller darauf folgenden Glieder** (vergl. §. 55, No 4).

Da nun a und k ebensowohl **positiv** als **negativ** sein können, so ergiebt sich, dass die Bedingungen in No. 1 und 2 **nur dann** erfüllt werden können, wenn

$$4)\ a \frac{\partial z}{dx} + k \frac{\partial z}{dy} = 0 \text{ ist.}$$

In dieser Gleichung sind die Grössen a und k von einander unabhängig, mithin kann die Gleichung 4) nur dann bestehen, wenn man einzeln hat

$$5)\ \frac{\partial z}{dx} = 0,\ \frac{\partial z}{dy} = 0.$$

Schliessen wir nun vor der Hand den Fall aus, dass

die Summe der 3. Verticalreihe in 3), also der 2. Differential-Quotient

$$6)\quad \frac{a^2}{2}\,\frac{\partial^2 z}{dx^2} + ak\,\frac{\partial^2 z}{dx\,dy} + \frac{k^2}{2}\,\frac{\partial^2 z}{dy^2}$$

gleich Null ist, so ergiebt sich, dass diese Summe für beliebige aber hinreichend kleine absolute Werthe von a und k für ein **Maximum** beständig **negativ**, dass sie dagegen für ein **Minimum** beständig **positiv** sein muss (siehe §. 82).

Um nun ein Kennzeichen zu ermitteln, nach welchem wir beurtheilen können, ob diese Bedingungen erfüllt sind, setzen wir des bequemeren Schreibens wegen

$$7)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial^2 z}{dx^2} = A \\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{dx\,dy} = 2B \\[2ex] \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial^2 z}{dx^2} = C. \end{cases}$$

Unser Ausdruck in Gl. 6) erscheint dann in der Form

$$8)\quad Aa^2 + 2Bak + Ck^2.$$

Um diesen Ausdruck weiter umzuformen, setzen wir

$$9)\quad Aa^2 + 2Bak + Ck^2 = A(a^2 + 2a\,\frac{Bk}{A} + \frac{C}{A}k^2$$

$$10)\quad Aa^2 + 2Bak + Ck^2 = A(a^2 + 2a\,\frac{B}{A}\,k + \frac{B^2}{A^2}k^2 - \frac{B^2}{A^2}k^2 + \frac{C}{A}k^2)$$

$$11)\quad Aa^2 + 2Bak + Ck^2 = A\left\{\left(a + \frac{B}{A}k\right)^2 + k^2\left(\frac{AC - B^2}{A^2}\right)\right\}$$

$$12)\quad Aa^2 + 2Bak + Ck^2 = Ak^2\left\{\left(\frac{a}{k} + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}\right\}$$

Beachten wir nun, dass a und k an die einzige Bedingung gebunden sind, dass ihr absoluter Werth eine gewisse Grösse nicht überschreite, dass sie sonst aber ganz beliebige **positive** oder **negative** Werthe haben können, so ergiebt sich, **dass der Quotient $\frac{a}{k}$ jeden beliebigen positiven oder negativen**

Werth haben kann, und im Besonderen, dass $\frac{a}{k}$ auch $= -\frac{B}{A}$ sein kann. Hieraus folgt nun, dass je nach dem Werthe von $\frac{a}{k}$ das Quadrat $\left(\frac{a}{k}+\frac{B}{A}\right)^2$ jeden **positiven** Werth Null eingeschlossen haben kann. Demnach muss $\frac{AC-B^2}{A^2} > 0$ sein, **wenn der Ausdruck** $Ak^2 \left\{\left(\frac{a}{k}+\frac{B}{A}\right)^2+\frac{AC-B^2}{A^2}\right\}$ **für jeden Werth von a und k dasselbe Zeichen behalten und auch nicht gleich Null werden** soll, d. h. es muss sein

13) $AC > B^2$.

Ist dann A negativ, so ist für jeden Werth von a und k nach Gleichung 12) der Werth von $Aa^2+2Bak+Ck^2$ negativ, d. h. unsere Werthe von x und y*) machen z zu einem **Maximum,** ist dagegen A positiv, so ist auch $Aa^2+2Bak+Ck^2$ für jeden Werth von a und k positiv; d. h. unsere Werthe von x und y machen z zu einem **Minimum.**

Wenn die Bedingung 13) erfüllt sein soll, so muss das Product AC positiv sein; d. h. A und C müssen **entweder beide positiv oder beide negativ sein.** Fassen wir nun das Resultat der vorstehenden Untersuchung zusammen, so ergiebt sich, dass ein Maximum oder Minimum stattfindet, wenn

14) $\frac{\partial z}{dx}=0, \frac{\partial z}{dy}=0$

15) $AC > B^2$

und dass unter dieser Voraussetzung z ein **Maximum** ist, wenn A und C **negativ** sind, dass dagegen ein **Minimum** stattfindet, wenn A und C **positiv** sind.

Setzen wir für A, B und C weiter ihre Werthe nach den Gleichungen in No. 7), so folgt, **dass für diejenigen Werthe von x und y, für welche**

*) D. h. diejenigen Werthe von x und y, für welche $\frac{\partial z}{dx}=0$ und $\frac{\partial z}{dy}=0$.

$$16)\ \begin{cases} \frac{\partial z}{dx} = 0,\ \frac{dz}{dy} = 0. \\ \frac{\partial^2 z}{dy^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{dy^2} > \left(\frac{\partial^2 z}{dx\, dy}\right)^2 \end{cases}$$

ein Maximum oder Minimum stattfindet, und zwar findet ein **Maximum** Statt, wenn $\frac{\partial^2 z}{dx^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{dy^2}$ beide **negativ** sind, dagegen findet ein **Minimum** Statt, wenn $\frac{\partial^2 z}{dx^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{dy^2}$ beide positiv sind.

§. 122.

Fortsetzung.

Zunächst ist nun noch der Fall zu beachten, dass $AC = B^2$. In diesem Falle behält nach den Gleichungen 12) und 7) des vorigen Paragraphen die Vertical-Columne in Gleichung 3), welche die Glieder zweiter Ordnung enthält, für jeden Werth von $\frac{a}{k}$ dasselbe Vorzeichen; und zwar dasjenige Vorzeichen, welches $\frac{\partial^2 z}{dx^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{dy^2}$ haben; indessen wird der Werth dieser Vertical-Columne zu Null,

$$\text{wenn } \frac{a}{k} = -\frac{B}{A} \text{ oder } \frac{a}{k} = -\frac{\frac{\partial^2 z}{dx\, dy}}{\frac{\partial^2 z}{dx^2}}.$$

Wegen dieses Umstandes bleibt es unentschieden, ob unsere Werthe von x und y die Function $z = f(x, y)$ zu einem Maximum oder Minimum machen.*) Untersucht man zunächst die Vertical-Columnen, welche alle Glieder der dritten Ordnung enthält, und stellte sich dann heraus, dass die Annahme

*) Es ist nämlich noch unentschieden, ob $f(x + a, y + k)$ grösser oder kleiner als $f(x, y)$ oder ob $f(x + a, y + k) = f(x, y)$ ist, wenn $\frac{a}{k} = -\frac{B}{A}$ ist.

$$„\frac{a}{k} = - \frac{\frac{\partial^2 z}{dx\,dy}}{\frac{\partial^2 z}{dx^2}}“$$

die Summe aller Glieder dritter Ordnung zu Null machte, während die Summe aller Glieder der vierten Ordnung dem Werthe nach von Null verschieden wäre, und dasselbe Zeichen mit $\frac{\partial^2 z}{dx^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{dy^2}$ hätte, so fände ein Maximum Statt, wenn dies Vorzeichen — wäre. Dagegen findet ein Minimum Statt, wenn dies Vorzeichen + ist. Würde dagegen die Annahme

$$\frac{a}{k} = - \frac{\frac{\partial^2 z}{dx\,dy}}{\frac{\partial^2 z}{dx^2}}$$

die Summe aller Glieder dritter Ordnung nicht zu Null machen, oder wäre, selbst wenn die Summe aller Glieder dritter Ordnung gleich Null ist, das Vorzeichen der Summe aller Glieder vierter Ordnung dem Vorzeichen von $\frac{\partial^2 z}{dx^2}$ entgegengesetzt, so fände weder Maximum noch Minimum Statt. Wenn dagegen die Annahme

$$\frac{a}{k} = - \frac{\frac{\partial^2 z}{dx\,dy}}{\frac{\partial^2 z}{dx^2}}$$

sowohl die Summe aller Glieder dritter Ordnung, als auch die Summe aller Glieder vierter Ordnung zu Null macht, so bleibt es noch unentschieden, ob ein Maximum oder Minimum stattfindet, und man könnte in ähnlicher Weise wie vorstehend die Untersuchung weiter führen, indem man zunächst die Summen aller Glieder resp. fünfter und sechster Ordnung in Betracht zöge etc. etc.

Man erkennt aber leicht, dass in diesem Falle die Anwendung der Differentialrechnung zur Ermittelung der etwaigen

Maxima oder Minima auf grosse Rechnungsschwierigkeiten führen würde, so dass in diesem Falle vorzuziehen wäre, durch directe Anwendung der algebraischen Analysis die Untersuchung zu Ende zu führen (vergl. §. 123).

§. 123.

Fortsetzung.

Man erkennt leicht, dass in folgenden Fällen die Function $z = f(x, y)$ möglicherweise noch Maxima oder Minima geben kann.

1) In dem Falle, dass einer der Differentialquotienten $\frac{\partial z}{dx}$ und $\frac{\partial z}{dy}$ gleich unendlich gross und der andere gleich Null wird, oder dass beide ∞ werden.

2) In dem Falle, dass $\frac{\partial z}{dx}$ und $\frac{\partial z}{dy}$ beide zu Null werden und dass ausserdem für jeden Werth von a und k die Summe aller Glieder zweiter Ordnung in Gleichung 3) §. 121 zu Null wird.

In dem ersten Falle ist es nicht möglich, mit Hülfe der Differentialrechnung zu entscheiden, ob ein Maximum oder Minimum stattfindet; in dem zweiten Falle dagegen führt die Anwendung der Differentialrechnung gewöhnlich auf grosse Rechnungs-Schwierigkeiten.

Um nun zu entscheiden, ob in diesen beiden Fällen ein Maximum oder Minimum und welches von beiden stattfindet, ist es deshalb in der Regel am einfachsten, den Ausdruck

$$f(x+a, y+k)$$

direct mit Hülfe der algebraischen Analysis zu untersuchen. Stellt sich dann heraus, dass **für jeden positiven oder negativen, aber hinreichend kleinen Werth von a und k $f(x, y) > f(x + a, y + k)$, so machen die betreffenden Werthe von x und y unsere Function $z = f(x, y)$ zu einem Maximum.** Stellt sich dagegen heraus, dass **für jeden**

positiven oder negativen, aber hinreichend kleinen Werth von a und k, f (x, y) < f (x + a, y + k), so machen unsere Werthe von x und y unsere Function z = f (x, y) zu einem Minimum.

Bemerkungen.

1) Wir wiederholen aus §. 121 bis 123, dass eine Function z = f(x, y) **nur für diejenigen Werthe von x und y Maxima oder Minima geben kann, für welche die Differentialquotienten $\frac{\partial z}{dx}$ und $\frac{\partial z}{dy}$ resp. gleich Null oder unendlich gross sind.**

2) Wenn man also die etwaigen Maxima oder Minima einer Function z = f(x,y) ermitteln will, so muss man zuerst diejenigen Werthe von x und y ermitteln, für welche $\frac{\partial z}{dx}$ und $\frac{\partial z}{dy}$ resp. gleich Null oder unendlich gross sind. Für diese Werthe von x und y, **und nur für diese,** hat man dann nach den §§. 121 bis 123 die Untersuchung weiter zu führen.

3) Diese weitere Untersuchung kann man in manchen Fällen vermeiden, indem man sehr oft aus der Natur der vorliegenden Function $\{z = f(x,y)\}$ direct erkennen kann, ob für die betreffenden Werthe von x und y ein Maximum oder Minimum existirt.

§. 124.

Geometrische Betrachtungen zur Erläuterung dessen, was in den §§. 120—123 vorgetragen ist.*)

Die Resultate der vorhergehenden Untersuchungen werden anschaulich, wenn man die Gleichung z = f(x,y) als Gleichung einer Fläche auffasst. Giebt dann die Ordinate für irgend einen Punkt der Fläche ein Maximum oder Minimum, und denkt man durch diesen Punkt zwei (verticale) Ebenen gelegt, welche resp. || der XZ-Ebene und der YZ-Ebene sind; **und setzt man voraus, dass z = f(x,y) nebst ihren abgeleiteten Functionen continuirlich ist,** so müssen die Tangenten, welche die Schnitt-Curven in dem genannten Punkte berühren, parallel der XY-Ebene sein. **Diese erste Bedingung liefert die Gleichungen** $\frac{\partial z}{dx} = 0$, $\frac{\partial z}{dy} = 0$.

*) Dem Leser, welcher sich noch nicht mit analytischer Geometrie des Raumes beschäftigt hat, empfehlen wir, diesen Paragraphen zu überschlagen. Der Zusammenhang würde nicht dadurch gestört werden.

Ferner müssen die genannten Schnitt-Curven ihre Concavität derselben Seite zuwenden. Hieraus folgt (nach §. 92), **dass die Differentialquotienten** $\frac{\partial^2 z}{dx^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{dy^2}$ **gleiche Vorzeichen haben müssen.***) Diese letzte Bedingung genügt im Allgemeinen aber noch nicht, um die Existenz des Maximum oder Minimum zu constatiren. Es müssen vielmehr auch alle übrigen Schnitt-Curven, welche durch Ebenen entstehen, die senkrecht zur XY-Ebene durch unsern Punkt gelegt sind, ihre Concavität derselben Seite zuwenden. Die Grössen a und k bezeichnen nun bekanntlich beliebige, von einander unabhängige aber **hinreichend kleine** Zunahmen resp. von x und y; also ist der Bruch $\frac{a}{k}$ gleich der trigonometrischen Tangente desjenigen Winkels, den die entsprechende Schnittebene mit der YZ-Ebene bildet. Nun ist schon vorhin bemerkt, dass für einen Maximal- oder Minimal-Punkt unserer krummen Fläche **alle möglichen Schnitt-Curven**, welche durch verticale Ebenen entstehen, ihre Concavität derselben Seite zuwenden müssen. Damit ist auch bewiesen, dass für alle möglichen **hinreichend kleinen** Werthe von a und k untersucht werden muss, ob f(x, y) grösser resp. kleiner als f(x + a, y + k) ist, wenn nachgewiesen werden soll, dass unsere Function für bestimmte Werthe von x und y resp. ein Maximum oder Minimum giebt. (Vergl. §. 121—123.)

Lassen wir jetzt die Voraussetzung wegfallen, welche oben gemacht ist, und nehmen wir vielmehr an, dass z = f (x, y) eine **ganz beliebige Function von x und y ist**, so ergiebt sich, dass in den etwaigen Maximal- oder Minimal-Punkten unserer krummen Fläche für die Schnitt-Curven, welche parallel

*) Hier ist vor der Hand der Fall ausgeschlossen, dass $\frac{\partial^2 z}{dx^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{dy^2}$ gleich Null werden.

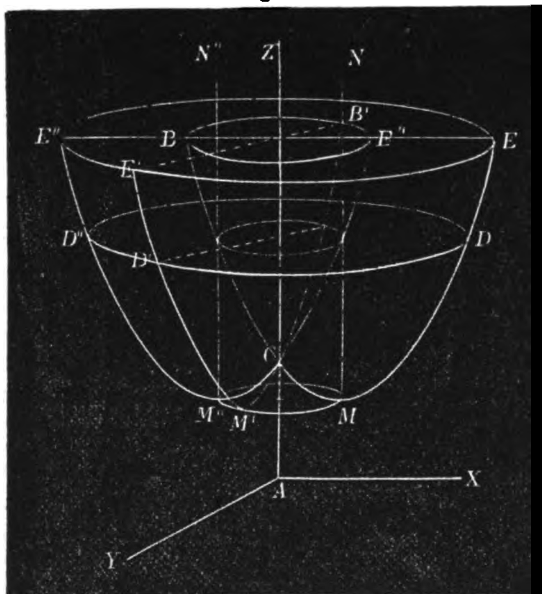
der XZ-Ebene und YZ-Ebene sind, resp. $\frac{\partial z}{dx}$ und $\frac{\partial z}{dy}$ entweder gleich 0 oder ∞ *) sein müssen, und dass man ausserdem wieder für alle möglichen **hinreichend kleinen Werthe** von a und k untersuchen muss, ob f(x, y) resp. grösser oder kleiner ist als f(x + a, y + k), um nachzuweisen, dass die betreffenden Werthe von x und y unsere Function z = f(x, y) zu einem Maximum oder Minimum machen.

Bemerkung.

Nach dem Vorstehenden ist klar, dass für die etwaigen Maximal- oder Minimal-Punkte einer krummen Fläche sämmtliche Schnitt-Curven, welche durch Ebenen entstehen, die normal zur XY-Ebene sind, ihre Concavität derselben Seite zuwenden müssen.

Man könnte nun geneigt sein, auch umgekehrt anzunehmen, dass ein Punkt dieser krummen Fläche dann ein Maximal- oder ein Minimal-Punkt wäre, wenn sämmtliche Schnitt-Curven dieses Punktes, welche durch verticale Ebenen entstanden sind, in demselben ihre Concavität derselben Seite zuwenden.

Fig. 68.



Indessen lässt sich leicht zeigen, dass dies nicht allgemein richtig wäre. Wir nehmen zu dem Ende an, dass (Fig. 68) eine Parabel um eine Achse AZ rotirt, welche parallel ist der geometrischen Achse MN der Parabel. Denken wir uns dann auf der hierdurch entstandenen krummen Fläche, in dem Kreise, den der Punkt M beschreibt, einen Punkt M', so werden die Schnitt-Curven

*) Vergl. Bemerkung zu §. 79.

von sämmtlichen durch M' gelegten verticalen Ebenen nach oben hin concav sein. Trotzdem aber giebt der Punkt M kein Minimum, wie man aus der Figur sieht.

§. 125.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Werthe von x und y bestimmen, für welche die Function $z = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 10$ ein Maximum oder Minimum giebt.

Auflösung. Durch Differentiation von z erhalten wir

$$1)\ \frac{\partial z}{dx} = 2x + y - 5; \frac{\partial z}{dy} = x + 2y - 4$$

$$2)\ \frac{\partial^2 z}{dx^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{dy^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{dx . dy} = 1.$$

Nach Bemerkung 1) von §. 123 haben wir nun diejenigen Werthe von x und y zu ermitteln, für welche $\frac{\partial z}{dx}$ und $\frac{\partial z}{dy}$ resp. gleich Null oder unendlich gross wird. Der Anblick der Gleichungen 1) lehrt jedoch, dass es keinen endlichen Werth von x und y giebt, für welchen $\frac{\partial z}{dx}$ und $\frac{\partial z}{dy}$ unendlich gross würde. Wir brauchen also nur die Werthe von x und y zu bestimmen, für welche $\frac{\partial z}{dy}$ und $\frac{\partial z}{dx}$ gleich Null werden. Zu dem Ende setzen wir nach Gleichung 1)

$$3)\ 0 = 2x + y - 5$$

$$4)\ 0 = x + 2y - 4.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$5)\ y = 1;\ x = 2.$$

Da nun die Gleichungen 3) und 4) keine andern Wurzeln geben als die Wurzeln $y = 1$, $x = 2$, so kann, wenn unsere Function überhaupt ein Maximum oder Minimum haben sollte, dies nur für die genannten Werthe von x und y der Fall sein.

Aus Gleichung 2) folgt aber

a) dass $\frac{\partial^2 z}{dx^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{dy^2}$ **beide positiv sind;**

b) dass $\frac{\partial^2 z}{dx^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{dy^2} > \left(\frac{\partial^2 z}{dx . dy}\right)^2$;

mithin wird für $x = 2$ und $y = 1$ der Werth von z zu einem Minimum. Schalten wir diese Werthe von x und y in unsere Function $z = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 10$ ein, so ergiebt sich $z_{min} = 3$.

Aufgabe 2. Man soll eine absolute Zahl a so in drei Theile theilen, dass das Product dieser drei Theile ein Maximum ist.

Auflösung. Wir nennen die Theile resp. x, y und $a - x - y$. Das Product derselben ist dann

1) $z = x . y (a - x - y) = axy - x^2y - xy^2$.

Hieraus folgt durch Differentiation

2) $\frac{\partial z}{dx} = ay - 2xy - y^2$

3) $\frac{\partial z}{dy} = ax - 2xy - x^2$.

Man sieht zunächst, dass es keine endlichen Werthe von x und y giebt, für welche $\frac{\partial z}{dx}$ und $\frac{\partial z}{dy}$ unendlich gross wird. Um aber diejenigen Werthe von x und y zu finden für welche $\frac{\partial z}{dx}$ und $\frac{\partial z}{dy}$ zu Null werden, setze man nach den Gleichungen 2) und 3)

4) $0 = ay - 2xy - y^2$

5) $0 = ax - 2xy - x^2$.

Löst man diese Gleichungen für x und y auf, so erhält man 4 Paar Wurzeln, nämlich

6) $\begin{cases} x = 0; \; x = 0; \; x = a; \; x = \frac{a}{3} \\ y = 0; \; y = a; \; y = 0; \; y = \frac{a}{3}. \end{cases}$

Aus der Natur der vorliegenden Aufgabe erkennt man aber ohne Weiteres

I. dass die drei ersten Paare zusammengehöriger Wurzeln ein Maximum nicht geben können;

II. dass wenigstens ein Maximum existiren muss.

Es muss also für $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{3}$ das Product $z = x \,.\, y \,.\, (a - x - y)$ ein Maximum geben und zwar ist dies auch das einzig mögliche Maximum.

Sein Werth ist $z_{max} = \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27}$.

Aufgabe 3. Man soll unter allen Dreiecken, deren Umfang gleich 2s ist, dasjenige ermitteln, dessen Flächeninhalt ein Maximum ist.

Auflösung. Setzen wir 2 Seiten unseres Dreiecks resp. gleich x und y, so ist die dritte Seite gleich $2s - x - y$, Setzen wir nun den Flächeninhalt unseres Dreiecks gleich z, so erhalten wir nach der Planimetrie

$$1)\quad z = \sqrt{s \,.\, (s - x) \,.\, (s - y) \,.\, (s - [2s - x - y])}$$

$$2)\quad z = \sqrt{s \,.\, (s - x) \,.\, (s - y) \,.\, (x + y - s)}.$$

Nun leuchtet ein, dass wir bei der Wurzelgrösse in Gleichung 2) von dem Vorzeichen ganz absehen können; demnach giebt z für dieselben Werthe von x und y ein Maximum, für welche z^2 oder selbst $\frac{z^2}{s}$ ein Maximum giebt. Nun aber ist

$$3)\quad \frac{z^2}{s} = (s - x) \,.\, (s - y) \,.\, (x + y - s).$$

Setzen wir der Kürze wegen $\frac{z^2}{s} = u$, so folgt

$$4)\quad u = (s - x) \,.\, (s - y) \,.\, (x + y - s).$$

Wir haben also unsere Aufgabe darauf zurückgeführt, diejenigen Werthe von x und y zu ermitteln, für welche

nach Gleichung 4) u ein Maximum giebt.*) Differentiiren wir jetzt Gleichung, 4) so folgt

$$5)\ \frac{\partial u}{dx} = (s-x).(s-y)-(x+y-s).(s-y)$$

$$\frac{\partial u}{dx} = (s-y).(2s-2x-y)$$

$$6)\ \frac{\partial u}{dy} = (s-x).(s-y)-(x+y-s).(s-x)$$

$$\frac{\partial u}{dy} = (s-x).(2s-2y-x).$$

Man ersieht aus diesen Gleichungen, dass es keinen endlichen Werth von x und y giebt, für welche $\frac{\partial u}{dx}$ und $\frac{\partial u}{dy}$ unendlich gross werden. Wohl aber giebt es Werthe von x und y, für welche $\frac{\partial u}{dx}$ und $\frac{\partial u}{dy}$ zu Null werden. Um diese Werthe zu ermitteln, setzen wir nach den Gleichungen 5) und 6)

$$7)\ 0 = (s-y).(2s-2x-y)$$

$$8)\ 0 = (s-x).(2s-2y-x).$$

Lösen wir diese beiden Gleichungen für x und y auf, so erhalten wir folgende Paare zusammengehöriger Werthe von x und y

$$9)\ \begin{cases} x = s;\ x = 0;\ x = s;\ x = \frac{2s}{3}. \\ y = s;\ y = s;\ y = 0;\ y = \frac{2s}{3}. \end{cases}$$

Erinnert man sich nun des geometrischen Satzes, dass in jedem Dreiecke die Summe zweier Seiten stets grösser ist als die dritte Seite, dass also jede Seite (x oder y) stets kleiner sein muss als der halbe Umfang des Dreiecks $\left(\frac{2s}{2}\right)$, so erkennt man ohne Weiteres, dass in No. 9 die ersten drei Paare zusammengehöriger Werthe von x und y, nämlich

*) Vergleicht man Gleichung 2) mit Gleichung 4), so wird man erkennen, dass wir dadurch einen Rechnungs-Vortheil gemacht haben.

$$\begin{cases} x = s; \; x = 0; \; x = s; \\ y = s; \; y = s; \; y = 0; \end{cases}$$

gar kein Dreieck geben können. **Wenn also im Sinne unserer Aufgabe ein Maximum existiren sollte, so ist dies nur für die Werthe $x = {}^2/_3 s$, $y = {}^2/_3 s$ möglich.** Eine einfache Betrachtung lehrt aber, **dass wenigstens ein Maximum im Sinne unserer Aufgabe existiren muss; dass also das vierte Paar zusammengehöriger Werthe von x und y in No. 9, nämlich „$x = {}^2/_3 s$ und $y = {}^2/_3 s$" ein Maximum geben.** Da nun $x = {}^2/_3 s$ und $y = {}^2/_3 s$, so ist die dritte Seite gleich $2s - x - y = {}^2/_3 s$, d. h. unser Maximal-Dreieck ist ein gleichseitiges Dreieck, oder mit anderen Worten: **Unter allen Dreiecken von gleichem Umfange (= 2 s) ist das gleichseitige Dreieck das grösste.**

Nach Gleichung 2) ist also

$$z_{max} = \sqrt{s \cdot \frac{s}{3} \cdot \frac{s}{3} \cdot \frac{s}{3}} = \frac{s^2}{9} \cdot \sqrt{3}.$$

Vergl. die Bemerkungen Aufgabe 1 §. 90.

Aufgabe 4. Es ist gegeben: $z = \{m - b\sqrt[5]{(x - c^2})\}(a^2 - y^2)$. Man soll die etwaigen Maxima und Minima von z bestimmen.

Auflösung. Wenn wir die Gleichung für z etwas umformen, so erhalten wir

1) $z = \{m - b(x - c)^{2/5}\}.(n^2 - y^2)$.

Hieraus folgt durch Differentiation

2) $\frac{\partial z}{dx} = -\frac{2b}{5(x - c)^{3/5}} \cdot (n^2 - y^2)$

3) $\frac{\partial z}{dy} = -2\{m - b(x - c)^{2/5}\}y$.

Man erkennt nun leicht, dass

4) $\frac{\partial z}{dx} = \infty$

5) $\frac{\partial z}{dy} = 0$

wenn $x = c$ und $y = 0$.

Es liegt also der Fall vor, welcher in §. 123 besprochen ist. Um zu entscheiden, ob die Werthe „$x = c$ und $y = 0$", z zu einem Maximum oder Minimum machen, setzen wir in Gleichung 1), $x = c + a : y = 0 + k$, wo a und k beliebige positive oder negative aber hinreichend kleine Werthe haben.

Wenn wir dies ausführen, so erhalten wir

6) $z = \{m - b(c + a - c)^{2/5}\} . (n^2 - k^2)$

7) $z = \{m - b . a^{2/5}\} . (n^2 - k^2)$.

Nun leuchtet ein, dass in Gleichung 7), z am grössten ist, wenn a und k gleich Null werden, d. h. unsere Function $z = \{m - b\sqrt[5]{(x - 2)^2}\} . (n^2 - y^2)$ giebt ein Maximum, wenn $x = c$, $y = 0$ und zwar ist $z_{max} = m . n^2$.

Bemerkung.

Man sieht, dass in der vorstehenden Aufgabe z ein Product von zwei Factoren ist, von denen der eine $(m - b\sqrt[5]{(x - c)^2})$ allein von x abhängt, während der andere $(n^2 - y^2)$ allein von y abhängt. Man hätte demnach in diesem Falle die Aufgabe auch dadurch lösen können, dass man untersucht, für welche Werthe von x der erste Factor, und für welche Werthe von y der zweite Factor etwa Maxima oder Minima giebt. Hierdurch wäre unsere Aufgabe zurückgeführt auf die Bestimmung der Maxima und Minima von Functionen mit einer unabhängig veränderlichen Grösse. (Vergl. die letzte Aufgabe in §. 81).

§. 126.

Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

Wenn z eine Function von u, v, w, x, y . . . ist z. B.

1) $z = f(u, v, w, x, y \ldots)$

und wenn ausserdem die Variabeln u, v, w, x, y . . . noch irgend welchen Bedingungen, z. B. den Gleichungen

2) $\varphi(u, v, w, x, y \ldots) = 0$

3) $\psi(u, v, w, x, y \ldots) = 0$

genügen müssen, so nennt man die etwaigen Maxima und Minima unserer Function $z = f(u, v, w, x, y \ldots)$ Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

Bemerkung.

Die betreffenden Maxima und Minima von z sind eben nur deshalb Maxima oder Minima, weil die Variabeln u, v, w, x, y . . an die Bedingungen von Gleichung 2) and 3) gebunden sind. Wären die Variabeln u, v, w, x, y . . . nicht an diese Bedingungen gebunden, so würde z ganz andere Maxima oder Minima haben.

§. 127.

Fortsetzung.

Nehmen wir an, dass

1) $z = f(x, y)$

und dass ausserdem

2) $\varphi(x, y) = 0$,

so ist offenbar wegen der Gleichung 2), y eine Function von x; demnach ist in Gleichung 1), x die einzige unabhängig veränderliche Grösse. Will man jetzt die etwaigen Maxima und Minima von z ermitteln, so ist es in der Regel am einfachsten, mit Hülfe von Gleichung 2), y aus Gleichung 1) zu eliminiren, und darauf die Rechnung nach den früheren Paragraphen, welche über Maxima und Minima handeln, fortzuführen. Es kann jedoch der Fall eintreten, dass die angedeutete Elimination von y entweder sehr schwierig oder gar unmöglich ist. In diesen Fällen ist es oft zweckmässig, $\frac{dy}{dx}$ statt y zu eliminiren. Der Gedankengang ist dann im Wesentlichen folgender:

Wegen der Bedingungsgleichung, $f(x, y) = 0$, ist y eine Function von x; demnach ist in Gleichung 1), $z = f(x, y)$ x die einzige unabhängig Veränderliche. Wenn also ein Maximum oder Minimum stattfinden soll, so muss nach (Capitel XII) $\frac{\partial z}{dx}$ entweder gleich Null oder unendlich gross sein.

Nun ist nach Gleichung 1)

3) $\frac{\partial z}{dy} = \frac{\partial f(x, y)}{dx} + \frac{\partial f(x, y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Ferner ist nach Gleichung 2)

$$4)\ \frac{\partial \varphi(x,y)}{dx} + \frac{\partial \varphi(x,y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \text{ also}$$

$$5)\ \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi(x,y)}{dx}}{\frac{\partial \varphi(x,y)}{dy}}.$$

Schalten wir diesen Werth von $\frac{dy}{dx}$ in Gleichung 3) ein, so folgt

$$6)\ \frac{\partial z}{dx} = \frac{\partial f(x,y)}{dx} - \frac{\partial f(x,y)}{dy} \cdot \frac{\frac{\partial \varphi(x,y)}{dx}}{\frac{\partial \varphi(x,y)}{dy}}.$$

Ermitteln wir nach dieser Gleichung in Verbindung mit Gleichung 2) die Werthe von x und y, für welche $\frac{\partial z}{dx}$ entweder gleich oder unendlich gross wird, so erhalten wir hierdurch die Werthe von x und y, für welche möglicherweise ein Maximum oder Minimum stattfinden kann. Die weitere Untersuchung erfolgt dann nach den früheren Paragraphen über Maxima und Minima. Auch hier ist zu bemerken, dass man in manchen Fällen von vorn herein aus der Natur der vorliegenden Aufgabe erkennen kann, ob ein Maximum oder Minimum stattfindet.

Bemerkung.

Wenn die Function

$$z = f(w, x, y)$$

und die Bedingungsgleichungen

$$\varphi(x, y, z) = 0,\ \psi(x, y, z) = 0$$

gegeben sind, so ist wieder nur eine unabhängige Veränderliche vorhanden.

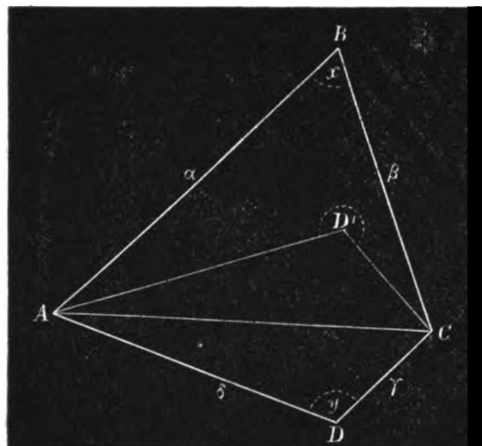
Ist dagegen gegeben $z = f(w, x, y)$ und ausserdem **nur eine Bedingungsgleichung** $\varphi(w, x, y) = 0$, so sind zwei unabhängig veränderliche Grössen vorhanden.

In allen diesen und ähnlichen Fällen ist das Verfahren zur Ermittelung der etwaigen Maxima und Minima analog dem Verfahren,

welches oben gezeigt wurde. Es liegt nicht in unserem Plane, diesen Gegenstand hier ausführlicher zu behandeln.

Aufgabe. Man soll unter allen Vierecken, dessen Seiten resp. gleich α, β, γ und δ sind, dasjenige ermitteln, dessen Inhalt ein Maximum ist.

Fig. 69.



Auflösung. Setzen wir den Winkel ABC $=$ x und Winkel ADC $=$ y, so ist

$\triangle$ ABC $= \frac{1}{2}\,\alpha . \beta \sin x$

$\triangle$ ADC $= \frac{1}{2}\,\gamma\delta . \sin y.$

Soll unser Viereck nun ein Maximum geben, so dürfen keine einspringenden x vorkommen, also setzen wir

$$1)\ \text{Viereck ABCD} = \frac{\alpha\beta . \sin x + \gamma\delta . \sin y}{2}.$$

Ferner ist nach einem bekannten Satze aus der Trigonometrie

$$\overline{AC}^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\,\alpha\beta . \cos x$$

$$\overline{AC}^2 = \gamma^2 + \delta^2 - 2\gamma\delta . \cos y, \text{ also}$$

$$2)\ \alpha^2 + \beta^2 - 2\,\alpha\beta \cos x - \gamma^2 - \delta^2 + 2\gamma\delta . \cos y = 0.$$

Setzen wir nun den Flächen-Inhalt des Vierecks ABCD $=$ z, so erhalten wir nach Gleichung 1)

$$3)\ z = \frac{\alpha\beta . \sin x + \gamma\delta . \sin y}{2}.$$

Unsere Aufgabe ist demnach: **Das etwaige Maximum von z nach Gleichung 3) zu ermitteln, und dabei zu berücksichtigen, dass x und y an die Bedingung der Gleichung 2) gebunden sind.** Aus den Gleichungen 3) und 2) erhalten wir nun durch Differentiation

4) $\frac{\partial z}{dx} = \frac{1}{2}\alpha\beta . \cos x + \frac{1}{2}\gamma\delta \cos y . \frac{dy}{dx}$

5) $2\alpha\beta \sin x - 2\gamma\delta . \sin y \frac{dy}{dx} = 0.$

Aus Gleichung 5) folgt

6) $\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha\beta . \sin x}{\gamma\delta . \sin y}.$

Schalten wir diesen Werth von $\frac{dy}{dx}$ in Gleichung 4) ein, und setzen wir zugleich $\frac{\partial z}{dx} = 0$,*) so erhalten wir

7) $0 = \frac{1}{2} a\beta \cos x + \frac{1}{2}\gamma\delta . \cos y . \frac{\alpha . \beta \sin x}{\gamma\delta . \sin y}$ oder

8) $0 = \cos x . \sin y + \sin y . \cos x.$

Hieraus folgt, dass $\sin(x + y) = 0$, dass also $x + y$ selbst gleich 0,180°, 360° .. etc. sein muss. Da es sich aber um zwei Winkel eines Vierecks handelt, so muss demnach $x + y$ gleich 180° sein, wenn $\frac{\partial z}{dx} = 0$ sein soll. Aus der Natur der Aufgabe ergiebt sich aber ohne Weiteres, dass unsere Function in diesem Falle ein Maximum hat. Wir sind also jetzt zu folgendem Resultate gelangt: **Wenn man aus 4 gegebenen Seiten α, β, γ, δ ein Viereck construirt, so ist das entstandene Viereck ein Maximum, wenn die Summe von je zwei gegenüberliegenden Winkeln $x + y = 180°$ ist, oder wenn sich um das Viereck ein Kreis beschreiben lässt.** Wollen wir nun noch die Werthe von x und y berechnen, so benutzen wir dazu die Gleichung 2). Da wir schon wissen, dass $x + y = 180°$ ist, so ist $\cos y = - \cos x$, also haben wir nach Gleichung 2) für das Maximal-Viereck

9) $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos x - \gamma^2 - \delta^2 - 2\gamma\delta \cos x = 0$

*) Auf einen Werth, für welchen $\frac{\partial z}{dx}$ etwa unendlich gross werden könnte, ist keine Rücksicht genommen.

$$10)\quad 2\cos x(\alpha\beta+\gamma\delta)=\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2$$

$$11)\quad \cos x = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}$$

$$12)\quad x = \arccos\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}.$$

Hieraus ergiebt sich weiter

$$13)\quad y=\arccos\frac{\gamma^2+\delta^2-\alpha^2-\beta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}.$$

Bemerkungen.

1) Wenn es nicht klar sein sollte, dass die gefundenen Werthe von x und y ein Maximum geben, so kann man sich leicht hiervon überzeugen, indem man $\frac{\partial^2 z}{dx^2}$ ermittelt. Wir empfehlen dem Leser, dies auszuführen.

2) Wenn in Fig. 69, $\sphericalangle$ AD'C — ABC = 180° ist, so ist das Viereck ABCD' ein Minimum.

Wie lässt sich dies beweisen?

Anhang.

Fragen und Aufgaben zur Wiederholung.

1) Was ist eine Function? Was ist eine algebraische Function, und was ist eine transcendente Function? Was ist eine implicite Function, und was ist eine explicite Function? — (siehe Einleitung.)

2) Wann ist eine Function continuirlich und wann ist sie discontinuirlich? — (Einleitung.)

3) Welche Bedeutung haben die Gleichungen $y = f(x)$., $y = \varphi x$ etc., und welche Bedeutung haben die Gleichungen $f(x, y) = 0$ und $\varphi(x, y) = 0$ etc.? — (Einleitung.)

4) Wann ist eine Reihe convergent, und welches Kriterium hat man für die Convergenz einer Reihe? — (Hülfssätze aus der algebraischen Analysis.)

5) Wenn die Reihen $A, Bx, Cx^2, Dx^3 \ldots$

$$\alpha, \beta x, \gamma x^2, \delta x^3 \ldots$$

geschlossene Reihen oder wenn sie unendliche convergente Reihen sind, und wenn ausserdem für jeden Werth von x

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots$$

so sind die Coefficienten gleicher Potenzen von x unter sich gleich oder $A = \alpha$, $B = \beta$ etc. Wie kann man dies beweisen? — (Hülfssätze aus der algebraischen Analysis.)

6) Was lässt sich über einen Bruch von der Form $\frac{0}{0}$ im

Allgemeinen sagen? — (Hülfssätze aus der algebraischen Analysis).

7) Was ist ein Differenz-Quotient und was ein Differential-Quotient? — (§. 2 und 2).

8) Es ist gegeben $y = x^5$. Man soll in diesem speciellen Falle zeigen, wie man verfährt, um den Werth von $\frac{dy}{dx}$ zu ermitteln. — (§. 2 bis 4).

9) Es ist $y = fx$. Welche Bedeutung haben die Symbole $f'x$, $f''x \ldots f^n(x)$; ferner $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$ und in welcher Beziehung stehen sie zu einander? — (§. 5—7 und §. 35 und 36.)

10) Was versteht man unter unendlich grossen Grössen, und was versteht man unter unendlich kleinen Grössen? (§. 11—14.)

11) Wodurch wurden wir darauf geführt, die unendlich grossen und die unendlich kleinen Grössen in verschiedene Ordnungen einzutheilen? — (§. 12—14.)

12) Kann man von einer unendlich grossen oder unendlich kleinen Zahl behaupten, dass sie an und für sich einer bestimmten Ordnung angehöre? — (Bemerkung zu §. 12.)

13) Was ist ein Differential, und welchen Sinn hat es, wenn man mit den Differentialen rechnet? — (§. 9 und 10, Bemerkung 3 zu §. 14.)

14) Auf welchen Widerspruch kommen wir dadurch, dass wir die Differentiale dy und dx an und für sich betrachten? — (Bemerkung 5 zu §. 14.)

15) Welches sind die einfachen Functionen, auf deren Differentiation wir die Differentiation aller übrigen Functionen zurückführten? — (§. 18 ff.)

16) Man soll die Differentialquotienten dieser einfachen Functionen entwickeln. — (§. 18 ff.)

17) Man soll die Differentiation von cos x, ctg x, arc cos x

arc ctg x zurückführen auf die Differentiation von resp. sin x, tg x, arc sin x, arc tg x.

Auflösung. Man setze $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ etc. vergl. §. 33.

18) Die Gleichung einer Curve sei $y = f(x)$. Ist es möglich, aus dieser Gleichung der Curve einen Ausdruck abzuleiten, der für jeden Punkt der Curve die Neigung derselben gegen die Abscissenachse angiebt? (§. 7 und 8.)

19) y ist eine Function von u, u eine Function von x. Wie verfährt man, um den Werth von $\frac{dy}{dx}$ zu ermitteln? (§. 24.)

20) y ist eine Function von u und v, während u und v beliebige Functionen von x sind. Wie verfährt man, um den Werth von $\frac{dy}{dx}$ zu bestimmen? — (§. 27 und 28.)

21) Was sind cyclometrische Functionen? — (§. 30.)

22) Was sind abgeleitete Functionen? Von welcher Function werden die höheren Abgeleiteten von einer bestimmten Ordnung an gleich Null? — (Antwort von der Function x^m und $(a + x)^m$, wenn m eine positive ganze Zahl ist; siehe Auflösung 1 und 3 §. 36.)

23) Man soll die 5te Abgeleitete von jeder der folgenden Functionen ermitteln: $\sin x \,.\, \operatorname{arc} \sin x$, $e^x \,.\, lx$; $\sin ax \,.\, \operatorname{tg} x$, $\frac{e^x}{1 + x^2}$. — (§. 36.)

24) Was versteht man unter Taylors und Mac Laurins Reihe? Wodurch unterscheiden sie sich, und worin stimmen sie überein? — (Capitel VI und VII.)

25) Man soll das Verfahren zur Entwickelung von Mac Laurins Reihe an den Functionen $(a + x)^5$ und $\cos(a + bx)$ zeigen. — (Capitel VI und VII.)

26) Wann werden Taylors und Mac Laurins Reihe unbrauchbar zur Entwickelung von Functionen? — (§. 55 ff.)

27) Was versteht man unter dem Restgliede von Taylors und Mac Laurins Reihe? — (§. 56 ff.)

28) Man soll sin x, cos x und e^x in eine Reihe verwandeln. (§. 40 und 41.)

29) Man soll beweisen, dass $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$. — (§. 42.)

30) Welche Formel ist bekannt unter dem Namen Moivre's Formel? — (§. 44.

31) Man soll den Modulus der gemeinen Logarithmen berechnen. — (§. 49.)

32) Welchen Weg kann man einschlagen, um ganz neue Logarithmentafeln zu berechnen, oder die vorhandenen zu erweitern? — (§. 47—50.)

33) Man soll den sin 19° und cos 19° berechnen.

Auflösung. Man bestimme zunächst die Seite des in den Kreis einbeschriebenen regelmässigen Zehnecks, daraus kann man schon den sin 18° und cos 18° bestimmen. Ist dies geschehen, so verfahre man weiter nach §. 51.

34) Man soll den Werth von π auf 8 Decimalen genau berechnen. — (§. 56 ff.)

35) Es ist eine implicite Function gegeben: $f(x, y) = 0$. Wie ermittelt man den Werth von p, q und r? — (Capitel IX.)

36) In der Gleichung $y = f(x)$ wird x abhängig von t durch die Gleichung $x = \varphi(t)$. Welches ist der Werth von q, d. i. $\dfrac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$? — (Capitel X.)

37) Welche geometrische Bedeutung hat es, wenn in der Gleichung $y = f(x)$, y zur unabhängig veränderlichen Grösse wird, und welches ist in diesem Falle der Werth von q? — (§. 73.)

38) Wie wendet man die Vertauschung der unabhängig veränderlichen Grössen an, um die Krümmungshalbmesser von Polar-Curven zu bestimmen? — (§. 103.)

39) Was versteht man unter Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale einer Curve, welche auf rechtwinklige Coordinaten bezogen ist? (§. 74.)

40) Man soll allgemeine Formeln entwickeln für die Werthe von Sn, St, N und T bei Curven, welche auf rechtwinklige Coordinaten bezogen sind? — (§. 74 ff.)

41) Was versteht man unter Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale von Polar-Curven, und wie verfährt man, um allgemeine Formeln für deren Grösse aufzustellen? — (§. 77 ff.)

42) Man soll die Eigenschaften einer Cycloide angeben und nachweisen. — (§. 76, §. 102, Aufg. 3, §. 105, Aufg. 5, §. 108.)

43) Was versteht man unter Maximum und Minimum einer Function? — (Capitel XII und XVII.)

44) Eine Function f(x) hat nur für diejenigen Werthe von x Maxima oder Minima, für welche f'x entweder gleich Null oder unendlich gross (discontinuirlich) ist. Warum? (Capitel XII.)

45) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit eine Function von einer oder mehreren unabhängig veränderlichen Grössen ein Maximum oder Minimum giebt? (Capitel XII und XVII.)

46) Welche Rechnungsvortheile kann man bei der Ermittelung der etwaigen Maxima oder Minima einer Function anwenden? — (§. 38 und Bemerkung zu Aufgabe 1 §. 90.)

47) Wann ist eine Curve concav nach oben, und wann ist sie convex nach oben? — (§. 91 ff.)

48) Was versteht man unter Wendepunkt der Concavität und Convexität? — (§. 91 ff.)

49) Wie verfährt man, um die etwaigen Wendepunkte einer Curve zu ermitteln? — (§. 92 ff.)

50) Die Gleichung einer Curve sei $y = f(x)$. Welche Beziehung findet Statt zwischen den etwaigen Wendepunkten der Curve und den Maxima und Minima von $f' x$? (Capitel XII und XIII.)

51) Wie findet man die Punkte einer Curve, in denen die Neigung derselben gegen die Abscissenachse eine gegebene Grösse hat? — (§. 7 und Aufgabe 2 im §. 98.)

52) Was versteht man unter Berührung erster, zweiter ... n^{ter} Ordnung? — (§. 99 ff.)

53) Was ist ein Krümmungskreis, und was ist ein Krümmungshalbmesser? — (§. 98.)

54) Der Krümmungskreis für irgend einen Punkt einer Curve geht mit der Curve **im Allgemeinen** eine Berührung zweiter Ordnung ein. Beweis? — (§. 99 und 101.)

55) Wenn die Gleichung einer Curve $y = fx$ ist, und wenn in irgend einem Punkte dieser Curve die Neigung gegen die Abscissenachse gering ist, **d. h. wenn für diesen Punkt p klein ist,** so setzt man mit einer gewissen Annäherung $\varrho = \frac{1}{q} = \frac{dx^2}{d^2y}$. Wie lässt sich dies beweisen? — (Gleichung 23 §. 101.)

56) Was ist eine Evolute, was ist eine Evolvente, und was sind aequidistante Curven? — (§. 104 und §. 108.)

57) Man soll die Beziehungen zwischen Evolute und Evolvente ausführlich entwickeln. — (§. 104 ff.)

58) Man soll beweisen, dass die Evoluten aller algebraischen Curven, deren Gleichungen die Form

$$x = A + Bx + Cx^2 + \dots Mx^n \text{ haben}$$

rectificirbar sind. — (§. 107.)

59) Es sind folgende Gleichungen gegeben

$$y = x^2 - 4x - 5; \quad y = x^3 - 2x^2 - 11x + 12;$$
$$y = (x+3).(x-1).(x-4)$$
$$y = \frac{x^3}{8} - 2\frac{x^2}{4} - 11.\frac{x}{2} + 12; \quad y = (x+6).(x+2).(x-1).(x-4)$$
$$y = \left(\frac{x}{4}+6\right).\left(\frac{x}{4}+2\right).\left(\frac{x}{4}-2\right).\left(\frac{x}{4}-6\right);$$
$$y = \frac{1}{4}\sqrt{x^5 - 3x^4}; \quad a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2.$$

Man soll die Curven, welche diesen Gleichungen entsprechen, auf alle ihre Eigenschaften discutiren, und zwar namentlich mit Rücksicht auf:

1) die etwaigen Durchschnittspunkte mit den Coordinaten-Achsen,
2) die Neigung der Curve gegen die Abscissenachse, und deren etwaige Maxima und Minima,
3) die Concavität und Convexität, und die etwaigen Wendepunkte,
4) die Krümmungskreise.

Schliesslich soll man jede dieser Curven und ihre Evolute construiren, und das Resultat der analytischen Untersuchung auf graphischem Wege prüfen.

60) Es sei $z = f(x, y)$. Was versteht man dann unter dem partiellen Differential von z nach x oder y, und wie bezeichnet man dasselbe? Was ist das totale Differential von z? — (§. 109 ff.)

61) Eine krumme Fläche ist gegeben durch die Gleichung $z = f(x, y)$. Man soll durch einen Punkt dieser Fläche an dieselbe eine berührende Ebene legen. — (§. 117.)

62) In einem Punkte einer krummen Fläche soll man eine Normale errichten. — (Die Normale steht rechtwinklig zu der Ebene, welche die krumme Fläche in dem Punkte berührt, in welchem die Normale errichtet werden soll.)

63) Man soll eine Function von mehreren unabhängig veränderlichen Grössen nach Taylors Lehrsatz entwickeln.

64) Man soll untersuchen, ob die Function

$$z = \frac{1}{a}(m + \sqrt{x^2 + y^2})^2$$

Maxima oder Minima hat?

Bemerkung.

Die vorstehende Gleichung ist die Gleichung einer krummen Fläche, welche dadurch entsteht, dass sich eine Parabel um eine Achse dreht, welche in der Ebene der Parabel liegt und || der geometrischen Achse derselben ist (vergl. §. 124).

Leipzig,
Druck von Fischer & Wittig.

Grundriss

der

Differential- u. Integral-Rechnung

mit Anwendungen.

II. Theil. Integral-Rechnung

mit vielen Uebungs-Beispielen und 96 Figuren im Texte, so wie einem Anhange zur Wiederholung und zum Selbst-Studium

von

M. Stegemann, Dr. phil.,

weil. Professor an der Königl. Polytechnischen Schule zu Hannover.

Dritte verbesserte und vervollständigte Auflage

bearbeitet

von

J. Franz Meyer,

Lehrer der Mathematik und Mechanik an der Kgl. Provinzial-Gewerbeschule zu Erfurt.

Hannover.

Helwing'sche Verlags-Buchhandlung.

(Th. Mierzinsky, Kgl. Hofbuchhändler.)

1878.

Hannover. Schrift und Druck von Fr. Culemann.

Vorrede zur dritten Auflage.

Von Seite der Verlagshandlung wurde mir die ehrenvolle Aufforderung, die durch den Tod des Verfassers unterbrochene Herausgabe der III. Auflage der Integralrechnung weiterzuführen. Wenn ich dieser Aufforderung entsprach, so war ich mir wohl bewusst, dass ich meine ganze Kraft und grossen Fleiss würde daran setzen müssen, wollte ich der gestellten Aufgabe auch nur einigermassen gerecht werden. In wie weit letzteres mir gelungen ist, muss ich dem Urtheile des geneigten Lesers anheimgeben.

Die geachtete Stelle, die der verewigte Autor im Gebiete der Mathematik einnahm, veranlassten mich, den eingeschlagenen Lehrgang desselben beizubehalten und auch sonstige Aenderungen nur nach sorgfältiger Prüfung vorzunehmen. Da es jedoch bekannte Thatsache ist, dass auf einen Schüler nichts ermüdender wirkt als die Ableitung von Sätzen und Formeln, von denen er nicht weiss, wozu er sie benutzen kann, so hielt ich es für meine Pflicht, den theoretischen Beispielen allenthalben practische beizufügen.

Erfurt, im Juli 1877.

J. Franz Meyer.

Inhalt.

I. Capitel.

Allgemeine Begriffe und Fundamentalsätze der Integral-Rechnung.

§. 1.

Definition des Integrals.

Die Integralrechnung ist, abgesehen von ihrer Anwendung, **das Umgekehrte der Differential-Rechnung** und hat also die Aufgabe, aus einem gegebenen Differential z. B. aus $3x^2\,dx$ die ursprüngliche oder primitive Function herzuleiten, d. h. diejenige Function, welche differentiirt das gegebene Differential gibt. Das Operationszeichen der Integralrechnung ist ein $\int$ (ein langgezogenes S). Es ist also $\int 3x^2\,dx = x^3$, weil $dx^3 = 3x^2\,dx$.

Das Resultat der Integral-Rechnung heisst **Integral**.

Bemerkung.

Wir werden später sehen, dass man ein Integral auch als Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Grössen auffassen kann. Dieser Auffassung entspricht das Operationszeichen $\int$ (erster Buchstabe des Wortes Summa). Das Operationszeichen „$\int$" ist von Leibnitz eingeführt.

§. 2.

Die Integrations-Constante.

Nach dem Vorstehenden ist die Integration gleichbedeutend mit Aufhebung einer vorangangenen (oder als vorangegangen gedachten) Differentiation, so dass man schreiben kann

$$1)\ \int (dfx) = fx$$ (spr. Integral von dfx ist gleich fx).

Setzen wir nun in Gleichung 1) $f'x\,dx$ statt $d\,fx$, so folgt

$$2)\ \int f'x\,dx = fx.$$

Weil aber $f'x\,dx$ nicht blos das Differential von fx, sondern das Differential einer jeden Summe ist, welche durch Addition von fx mit irgend einer Constanten (C) entsteht, so erhalten wir ganz allein

$$3)\ \int f'x\,dx = fx + C.$$

C bedeutet hier eine constante Grösse, die jeden beliebigen Werth haben kann. Man nennt sie die Integrations-Constante.

Bemerkungen.

1. Offenbar ist in Gleichung 3 der Werth der Integrations-Constanten ganz unbestimmt, so lange **das Integral** ($\int f'x\,dx = fx + C$) **der einzigen Bedingung unterworfen ist, dass sein Differential gleich $f'x\,dx$ sein soll.** In allen Anwendungen der Integral-Rechnung wird der Werth dieser Constanten durch die Natur der Aufgabe bestimmt, und zwar in der Regel dadurch, dass man den Werth des Integrals für einen bestimmten Werth von x kennt. Weiss man z. B., dass

$$1)\ \int 3x^2\,dx = 15, \text{ wenn } x = 2,$$

so lässt sich sehr leicht der Werth der Integrations-Constanten bestimmen. Wir erhalten zunächst

$$2)\ \int 3x^2\,dx = x^3 + C.$$

Setzen wir hierin $x = 2$, so wird $\int 3x^2\,dx = 15$, also

$$3)\ 15 = 2^3 + C, \text{ oder}$$

$$4)\ C = 7.$$

Schalten wir diesen Werth von C in Gleichung 2 ein, so folgt

$$5)\ \int 3x^2\,dx = x^3 + 7.$$

2. So lange in einem Integral die Constante C einen **beliebigen** constanten Werth hat, nennt man das Integral **ein allgemeines Integral.** Wenn dagegen der Werth der Integrations-Constanten bestimmt ist, so heisst das Integral ein **besonderes Integral.** Der Unterschied zwischen dem allgemeinen Integral und dem besondern Integral besteht demnach darin, dass in dem ersten der Werth der Integrations-Constanten ganz unbestimmt ist,

während die Integrations-Constante im besonderen Integral einen ganz bestimmten Werth hat.

3. Von dem allgemeinen Integral und besondern Integral werden wir später noch das bestimmte Integral unterscheiden müssen.

§. 3.

$$\int A f'x\, dx = A. \int f x\, dx.$$

Lehrsatz. Der Werth eines Integrals wird nicht verändert, wenn ein constanter Factor, der sich unter dem Integralzeichen befindet, vor dasselbe gesetzt wird, d. h. es ist

$$\int A . f'x\, dx = A . \int f'x\, dx.$$

Beweis. Es ist

1) $A f'x\, dx = d(A fx + C)$, hieraus folgt

2) $\int A f'x\, dx = A fx + C$. Eerner ist

3) $\int f'x\, dx \quad = \quad fx + C'$, also

4) $A \int f'x\, dx = A fx + AC'$.

Da nun die Werthe der Integrations-Constanten ganz beliebig sind, so kommt es auf dieselben gar nicht an. Wir erhalten demnach aus den Gleichungen 2 und 4

5) $\int Af'x\, dx = A . \int f'x\, dx.$

§. 4.

$$\int (f'x\, dx + \varphi' x\, dx + F'x\, dx) = \int f'x\, dx + \int \varphi' x\, dx + \int F'x\, dx.$$

Lehrsatz. Das Integral einer Summe von Differential-Functionen ist gleich der Summe der Integrale dieser einzelnen Differential-Functionen, oder es ist

$$\int (f'x\, dx + \varphi' x\, dx + F'x\, dx + ..) = \int f'x\, dx + \int \varphi' x\, dx + \int F'x\, dx + ..$$

Beweis. Weil

$$1)\quad f'x\,dx + \varphi'x\,dx + F'x\,dx = d(fx + \varphi x + Fx + C)$$

so ist

$$2)\int(f'x\,dx + \varphi'x\,dx + F'x\,dx) = fx + \varphi x + Fx + C)$$

Ferner ist

$$3)\int f'x\,dx = fx + c'$$

$$4)\int \varphi'x\,dx = \varphi x + c''$$

$$5)\int F'x\,dx = Fx + c'''.$$

Durch Addition der Gleichungen 3, 4 und 5 erhält man

$$6)\int f'x\,dx + \int \varphi'x\,dx + \int F'x\,dx = fx + \varphi x + Fx + c' + c'' + c'''.$$

Die Integrations-Constanten C, c′, c″, c‴ haben auch hier **ganz beliebige Werthe**, so dass wir von ihnen ganz absehen können. Wir erhalten demnach aus den Gleichungen 2 und 6

$$7)\int(f'x\,dx + \varphi'x\,dx + F'x\,dx) = \int f'x\,dx + \int \varphi'x\,dx + \int F'x\,dx.$$

Bemerkung.

Man kann unsern Satz auch auf folgende Art beweisen: Es ist

$$1)\quad d\int(f'x\,dx + \varphi'x\,dx + F'x\,dx) = f'x\,dx + \varphi'x\,dx + F'x\,dx$$

$$2)\quad d\left(\int f'x\,dx + \int\varphi'x\,dx + \int F'x\,dx\right) = d\int f'x\,dx + d\int\varphi'x\,dx + d\int F'x\,dx, \text{ also}$$

$$3\quad d\left(\int f'x\,dx + \int\varphi'x\,dx + \int F'x\,dx\right) = f'x\,dx + \varphi'x\,dx + F'x\,dx$$

In den Gleichungen 1 und 3 stimmen die rechten Seiten überein, demnach müssen auch die linken Seiten dieser Gleichungen übereinstimmen. Es ergiebt sich also aus den Gleichungen 1 und 3

$$4)\quad d\int(f'x\,dx + \varphi'x\,dx + F'x\,dx) = d\left(\int f'x\,dx + \int\varphi'x\,dx + \int F'x\,dx\right).$$

Wir sehen hieraus, dass die Ausdrücke $\int(f'x\,dx + \varphi'x\,dx + F'x\,dx)$ und $\int f'x\,dx + \int\varphi'x\,dx + \int F'x\,dx$ gleiche Differentiale geben, mithin müssen — abgesehen von den Integrations-Constanten — auch diese Ausdrücke gleich sein, d. h. es ist

$$\int(f'x\,dx + \varphi'x\,dx + F'x\,dx) = \int f'x\,dx + \int\varphi'x\,dx + \int F'x\,dx.$$

§. 5.

Fundamentalformeln der Integral-Rechnung.

Kehren wir wieder zu den Paragraphen 1 und 2 zurück, so ergiebt sich das Integral einer vorliegenden Differential-Function ganz von selbst, wenn man die (ursprüngliche) Function kennt, aus der man die vorliegende Differential-Function durch Differentiation entwickeln kann. Weiss man z. B., dass

$$1)\quad d\,(x^3) = 3x^2\,dx,$$

so folgt hieraus

$$2)\quad \int 3x^2\,dx = x^3 + C.$$

Weiss man ferner, dass

$$3)\quad d\sin x = \cos x\,.\,dx,$$

so folgt hieraus

$$4)\quad \int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

Erinnern wir uns nach diesen Erörterungen der Fundamental-Formeln aus der Differential-Rechnung (D.-R. Seite 62), so gelangen wir ohne Weiteres zu den Fundamental-Formeln der Integral-Rechnung.

$$1)\quad \int dx = x + C$$

$$2)\quad \int A\,dx = Ax + C$$

$$3)\quad \int f'x\,dx = fx + C$$

$$4)\quad \int A\,f'x\,dx = A\int f'x\,dx = A\,fx + C$$

$$5)\quad \int (f'x\,dx + \varphi'x\,dx + F'x\,dx) = \int f'x\,dx + \int \varphi'x\,dx + \int F'x\,dx = fx + \varphi x + Fx + C$$

$$6)\quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$7)\quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{la} + C$$

$$8)\ \int e^x\,dx = e^x + C$$

Der Anfänger wird wohl thun, die Formeln 1 bis 15 dem Gedächtnisse fest einzuprägen.

$$9)\ \int \frac{dx}{x} = lx + C$$

$$10)\ \int \cos dx = \sin x + C$$

$$11)\ \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$12)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tg\,x + C$$

$$13)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$$

$$14)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x + C$$
$$= -arc\cos x + C$$

$$15)\ \int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,x + C$$
$$= -arc\,ctg\,x + C.$$

Bemerkungen.

1. Bei der Formel 6 ist der Fall bemerkenswerth, dass $n = -1$ wird. Wir erhalten in diesem Falle nach jener Formel

$$1)\ \int x^{-1}\,dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} \text{ oder}$$

$$2)\ \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{0} + C.$$

Da nun $\frac{1}{0} = \infty$, so sollte man denken, dass $\int \frac{dx}{x}$ ebenfalls unendlich gross sein müsste. Hiergegen ist aber zunächst zu bemerken, dass man die Integrations-Constante gleich $-\infty$ setzen kann. In diesem Fall hätte das Integral $\int \frac{dx}{x}$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$. Um den Werth dieser unbestimmten Form zu ermitteln, können wir ausgehen von der allgemeinen Formel

$$3)\ \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Da C nun eine willkürliche Grösse ist, so darf man offenbar $C = -\frac{a^{n+1}}{n+1}$ setzen, wo a eine beliebige positive constante Zahl bedeutet.

Hierdurch erhalten wir aus Gleichung 3

$$4)\ \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

$$5)\ \int x\ \ dx = \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $n = -1$, so kömmt die rechte Seite auf die Form $\frac{0}{0}$. Den Werth derselben können wir nach D.-R. Capitel VIII ermitteln. Differentiiren wir nämlich Zähler und Nenner in Bezug auf n, so erhalten wir

$$6)\quad \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = \frac{0}{0} = \frac{x^{n+1}lx - a^{n+1}la}{1}.$$

Combiniren wir nun die Gleichungen 5 und 6, so folgt

$$7)\quad \int x^{-1}\,dx = lx - la.$$

Da nun la wieder jede beliebige Constante darstellen kann, so folgt aus Gleichung 7

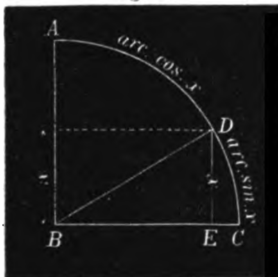
$$8)\quad \int x^{-1}\,dx = lx + C,$$

ein Resultat, welches mit Formel 9 übereinstimmt.

2. Es könnte dem Anfänger auffallen, dass nach No. 14 der Fundamental-Formeln $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, und dass auch

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C \text{ sein soll.}$$

Fig. 1.



Wir bemerken desshalb, dass sowohl die Differentiation von $\arcsin x + C$ als die Differentiation von $-\arccos + C$ den Ausdruck $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zum Resultat giebt.

Man kann aber auch leicht zeigen, dass $\arcsin x$ und $-\arccos x$ sich nur um eine constante Grösse $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ unterscheiden. Zu dem Ende betrachte man nebenstehende Figur 1.

Hier ist $\left\{\begin{array}{l}\arcsin x = CD \\ \arccos x = AD\end{array}\right\}$, also

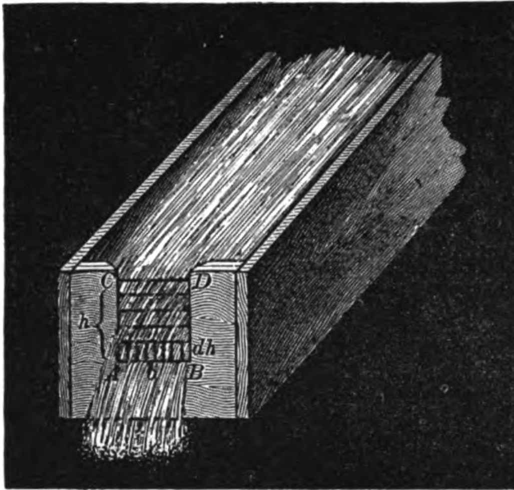
$$\arcsin x - (-\arccos x) = CD + \frac{\pi}{2}.$$

Eine analoge Bemerkung gilt in Bezug auf die beiden Werthe für $\int \frac{dx}{1+x^2}$ in No. 15 Seite 6.

§. 6.

Anwendungen.

Fig. 2.



1) Wie gross ist die Ausflussmenge pro Secunde aus neben aufgezeichnetem Ueberfall ABCD.

Bekanntlich ist die Ausflussmenge für Horizontalmündungen gleich einem Prisma, dessen Grundfläche die Oeffnung und dessen Höhe die Ausflussgeschwindigkeit ist, also

$$Q = Fv = F.\sqrt{2gh} \quad (F = \text{Mündung}, \ v = \text{Geschwindigkeit}).$$

Anders verhält es sich, wenn die Oeffnung eine Neigung gegen den Horizont hat, z. B. wie obenstehende Figur zeigt, in der Seitenwand angebracht ist. Denn für diesen Fall fliessen die in verschiedenen Tiefen befindlichen Elemente mit verschiedenen Geschwindigkeiten aus und kann deshalb die Wassermenge nicht als Prisma angesehen werden.

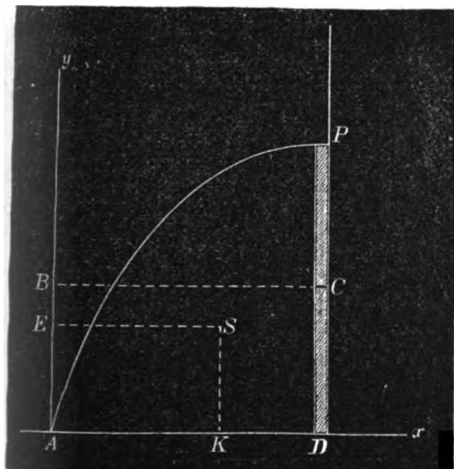
Man denke sich deshalb die Oeffnung in unendlich kleine Streifen getheilt, so dass man innerhalb eines jeden gleiche Geschwindigkeit annehmen kann. Ist nun $AB = b$, $AC = h$, so ist die Fläche eines solchen Elementes $dF = bdh$ und folglich die Ausflussmenge aus demselben $dQ = bdh.\sqrt{2gh} = b\sqrt{2g}. h^{1/2}dh$. Die Ausflussmenge aus dem ganzen Rechteck ist aber gleich der Summe der Ausflussmengen aus den einzelnen Elementen, also

$$Q = \int b \,.\, \sqrt{2g} \,.\, h^{1/2}\, dh = b \,.\, \sqrt{2g} \int h^{1/2}\, dh = b \,.\, \sqrt{2g} \,.\, \frac{h^{1/2+1}}{1/2+1}$$

$$= \frac{2}{3} \,.\, b \sqrt{2g} \,.\, h^{3/2} = {}^2/_3\, bh \sqrt{2gh} = {}^2/_3\, Fv.$$

2) Es soll der Schwerpunct irgend einer Fläche, d. i. der Abstand desselben von den Abscissen- und Ordinatenaxe bestimmt werden.

Fig. 3.



Die gegebene Fläche ADP sei F, ihre Abscisse AD = x, ihre Ordinate PD = y.

Denkt man sich F in unendlich kleine Elemente von dem Inhalte dF = ydx getheilt, so ist das Moment eines solchen z. B. von DCP in Bezug auf die Ordinatenaxe Ay:

BC . dF = AD . dF = x . y dx. Sei nun S der Schwerpunct der ganzen Fläche und bezeichnen wir seinen Abstand von Ay als ES = AK mit z, so ist ihr Moment in Bezug auf Ay gleich Fz. Das Moment der ganzen Fläche ist aber gleich der Summe der Momente der einzelnen Elemente, folglich ist

$$F \,.\, z = \int xydx; \quad 1)\ z = \frac{\int xydx}{F} = \frac{\int xydx}{\int ydx}.$$

Da der Schwerpunct eines Rechteckes in der Mitte liegt, man aber die Flächenelemente als unendlich kleine Rechtecke ansehen kann, so wird der Schwerpunct C des Elementes DCP eine Entfernung von AX gleich $^1/_2\,y$ haben und es ist in Folge

dessen sein Moment in Bezug auf diese Axe: CD . dF $= \frac{1}{2}$ ydF $= \frac{1}{2}y \cdot y \cdot dx = \frac{1}{2}y^2\,dx$. Bezeichnen wir die Entfernung des Schwerpunctes S von dieser Axe, nämlich SK mit Z′, so ist das Moment der ganzen Fläche in Bezug auf Ax gleich $Fz' = \int \frac{1}{2}y^2\,dx$ und daraus

$$2)\quad z' = \frac{\int \frac{1}{2}y^2\,dx}{F} = \frac{\int \frac{1}{2}x^2\,dx}{\int y\,dx}.$$

Aus diesen 2 Formeln lässt sich nun leicht die Lage des Schwerpunctes für verschiedene Flächen berechnen. Für die Parabel gilt z. B. die Gleichung $y^2 = px$, voraus folgt $y = x^{1/2}\sqrt{p}$ folglich ist für dieselbe

$$z = \frac{\int x \,.\, x^{1/2}\sqrt{p}\,.\,dx}{\int x^{1/2}\sqrt{p}\,dx} = \frac{\int x^{3/2}dx}{\int x^{1/2}dx} = \frac{\frac{x^{3/2+1}}{3/2+1}}{\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}} = \frac{2/5\,x^{5/2}}{2/3\,x^{3/2}} = 3/5\,x$$

also ES $= 3/5$ AD.

$$z' = \frac{\int 1/2\,px\,dx}{\int x^{1/2}\sqrt{p}\,dx} = \frac{1}{2}\sqrt{p}\,.\,\frac{\int x\,dx}{\int x^{1/2}dx} = \frac{1}{2}\sqrt{p}\,.\,\frac{\frac{x^{1+1}}{2}}{\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{p}\cdot\frac{1/2\,x^2}{2/3\,x^{3/2}} = 3/8\sqrt{px} = 3/8\,y, \text{ also SK} = 3/8\,\text{DP}.$$

§. 7.

Aufgaben zur Einübung des Vorhergehenden.

1. Es ist gegeben $x^3\,dx$.

Setzen wir in Formel 6) $n = 3$, so folgt ohne Weiteres

$$\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C.$$

2. Man soll $7x^3\,dx$ integriren.

Nach §. 3 und Formel 6 in §. 5 erhalten wir

$$\int 7x^3\,dx = 7\,.\int x^3\,dx = 7\,.\,\frac{x^4}{4} + C.$$

3. Man soll $\sqrt[3]{x}\,dx$ integriren.

Es ist $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$; hieraus ergiebt sich, dass

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}\,dx = \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + C = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C \text{ oder}$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = 3/4\,\sqrt[3]{x^4} + C.$$

4. Man soll folgende Differential-Functionen integriren.

$$\frac{dx}{x^3},\quad \sqrt[3]{x^5}\,.\,dx,\quad \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}},\quad 4\sqrt[3]{x}\,dx,\quad \frac{4\,dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

Wir erhalten

I. $$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

II. $$\int \sqrt[3]{x^5}.dx = \int x^{5/3}\,dx = \frac{x^{5/3+1}}{5/3+1} + C = \frac{x^{8/3}}{8/3} + C = 3/8\sqrt[3]{x^8} + C.$$

III. $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} = \int x^{-5/3}\,dx = \frac{x^{-5/3+1}}{-5/3+1} + C = \frac{x^{-2/3}}{-2/3} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} = -\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + C.$$

IV. $$\int 4\,.\,\sqrt[3]{x}\,dx = 4\,.\int \sqrt[3]{x}\,dx = 4\,.\int x^{1/3}\,dx = 4\,.\,\frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + C.$$

$$\int 4\,.\,\sqrt[3]{x}\,dx = 4\,.\,\frac{x^{4/3}}{4/3} + C = 3\sqrt[3]{x^4} + C.$$

V. $$\int \frac{4}{\sqrt[3]{x}}\,dx = 4\,.\int x^{-1/3}\,dx = 4\,.\,\frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} + C = 4\,.\,\frac{x^{2/3}}{2/3} + C.$$

$$\int \frac{4}{\sqrt[3]{x}}\,dx = 4\,.\,3/2\sqrt[3]{x^2} + C = 6\sqrt[3]{x^2} + C.$$

5. Man soll die Differential-Function

$$\left(x^4 + 7\,.\,\sqrt[3]{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6}\right) dx \textbf{ integriren.}$$

Nach §. 4 ergiebt sich

$$1\int\left(x^4 + 7\sqrt{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6}\right)dx$$

$$= \int x^4\,dx + \int 7\sqrt[3]{x}\,dx - \int\frac{11}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx + \int\frac{5}{x^6}dx$$

Hieraus folgt

$$\int\left(x^4 + 7\sqrt[2]{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6}\right)dx$$

$$= \int x^4\,dx + 7\int x^{1/2}\,dx - 11\,.\int x^{-5/3}\,dx + 5\int x^{-6}\,dx.$$

Wenn wir nun die Integrationen, welche auf der rechten Seite dieser Gleichung angedeutet sind, nach No. 6 §. 5 ausführen, und dabei die 4 entstehenden Integrations-Constanten in eine einzige Constante zusammenfassen, so giebt dies

$$\int\left(x^4 + 7\sqrt[2]{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6}\right)dx$$

$$= \frac{x^{4+1}}{4+1} + 7\,.\,\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - 11\,.\,\frac{x^{-5/3+1}}{-5/3+1} + 5\,.\,\frac{x^{-6+1}}{-6+1} + C$$

$$= \frac{x^5}{5} + 7\,.\,\frac{x^{3/2}}{3/2} - 11\,.\,\frac{x^{-2/3}}{-2/3} + 5\,.\,\frac{x^{-5}}{-5} + C$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{14}{3}\sqrt{x^3} + \frac{33}{2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^5} + C.$$

6. Man soll den Ausdruck $\int\left(\frac{x^3}{4} - 7\sqrt[5]{x^9} + \frac{4}{7}x^4 - \frac{4}{3x^2}\right)dx$ **entwickeln.**

Wir erhalten zunächst

$$\int\left(\frac{x^3}{4} - 7\sqrt[5]{x^9} + \frac{4}{7}x^4 - \frac{4}{3x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int x^3\,dx - 7\int x^{9/5}.\,dx + \frac{4}{7}\int x^4\,dx - \frac{4}{3}\int x^{-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1} - 7\,.\,\frac{x^{9/5+1}}{9/5+1} + \frac{x^{4+1}}{4+1} - \frac{4}{3}\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C.$$

Dies giebt

$$\int\left(\frac{x^4}{4}-7\sqrt[5]{x^9}+\frac{4}{7}x^4-\frac{4}{3x^2}\right)dx=\frac{x^4}{16}-\frac{35}{14}\sqrt[5]{x^{14}}+\frac{4}{35}x^5+\frac{4}{3x}+C.$$

7. **Man soll den Ausdruck** $\int(a\sin x + b\,.\cos x + c\,e^x)\,dx$ **entwickeln.**

Wenn wir die Formeln No. 8, 10 und 11 Seite 6 anwenden, so erhalten wir

$$\int(a\sin x + b\cos x + c\,e^x)\,dx = -a\cos x + b\sin x + c\,.\,e^x + C.$$

8. **Man soll den Ausdruck** $\int\left(m\,a^x\,dx + n\,\frac{dx}{x} + p\,\frac{dx}{\cos^2 x}\right)$ **entwickeln.**

Hierzu wenden wir die Formeln No. 7, 9 und 12 Seite 5 und 6 an, und erhalten dann

$$\int\left(m\,a^x\,dx + n\,\frac{dx}{x} + p\,\frac{dx}{\cos^2 x}\right) = m\,.\,\frac{a^x}{la} + n\,.\,lx + p\,\mathrm{tg}\,x + C.$$

9. **Man soll den Ausdruck** $\int\left(\frac{dx}{1+x^2} + a\,\frac{dx}{\sin^2 x} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ **entwickeln.**

Wir wenden die Formeln No. 15, 13 und 14 Seite 6 an. Dann ergiebt sich

$$\int\left(\frac{dx}{1+x^2} + a\,\frac{dx}{\sin^2 x} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \mathrm{arc\,tg}\,x - a\,\mathrm{ctg}\,x + \mathrm{arc\,sin}\,x + C.$$

Bemerkung.

Statt des vorstehenden Resultates hätten wir auch setzen können

$$\int\left(\frac{dx}{1+x^2} + a\,\frac{dx}{\sin^2 x} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\,\mathrm{arc\,ctg}\,x - a\,.\,\mathrm{ctg}\,x - \mathrm{arc\,cos}\,x + C.$$

Von der Richtigkeit dieser beiden Resultate kann man sich leicht überzeugen, dadurch, dass man in beiden Fällen das Resultat differentiirt. Wenn die Resultate richtig sind, so muss in beiden Fällen ihr Differential gleich dem Ausdruck unter dem Integralzeichen sein (vergl. übrigens S. 5, Bemerkung 2).

§. 8.

Fortsetzung.

Man soll folgende Integrale auflösen

1) $\int \frac{-a}{2\sqrt{x^3}} dx$

2) $\int \frac{-2a}{3b\sqrt[3]{x^5}} dx$

3) $\int \frac{mq}{np} \sqrt[p]{x^{q-p}} . dx$

4) $\int - \frac{mq}{np} \frac{dx}{\sqrt[p]{x^{q+p}}}$

5) $\int \frac{mq - mp}{np\, q} \sqrt[pq]{x^{q-p-pq}} . dx$

6) $\int (4x^3 + 36x^2 - 58x - 61) . dx$

7) $\int (3x^2 dx - 10x dx + 8dx)$

8) $\int \left(\frac{6}{2\sqrt{x}} dx + \frac{c}{x^2} dx\right)$

9) $\int \left(- \frac{a}{2\sqrt{x^3}} + \frac{c}{2\sqrt{x}} - m\right) dx.$

10) $\int \left(- \frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2m}{x^3}\right) dx.$

Wegen der Auflösungen der vorstehenden Integrale sehe man D.-R. Seite 45 No. 11—20.

§. 9.

Integration durch Substitution.

In den Eällen, welche in den vorigen Paragraphen behandelt sind, war es möglich, die Integration durch directe Anwendung unserer Fundamentalformeln zu vollbringen. Sind die zu integrirenden Differential-Functionen complicirter, so kommt die Integration derselben im Wesentlichen darauf

hinaus, jene Differential-Functionen auf unsere Fundamental-Formeln zurückzuführen. Dies erreicht man sehr häufig dadurch, dass man statt x eine neue Variable (u) einführt. Wenn z. B. die Function Fx . dx nicht direct mit Hülfe unserer Fundamentalformeln integrirt werden kann, so ist es in vielen Fällen möglich, durch Einführung einer neuen Variablen u die Function Fx . dx auf eine unserer Fundamental-Formen zu bringen, um dadurch die Integration einzuleiten. Ist z. B. $Fx \, . \, dx = f'u \, . \, du$, so ist $\int Fx \, . \, dx = \int f'u \, . \, du = fu + C$. Drückt man nun in dem Ausdrucke $fu + C$ die Grösse u wieder durch x aus, so ist die Integration zu Ende geführt.

Die folgenden Beispiele mögen das Vorstehende noch weiter erläutern.

§. 10.

Fortsetzung. Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll das Integral $\int \cos (a + bx) \, . \, b \, dx$ entwickeln.

Auflösung. Zunächst haben wir zu untersuchen, ob das vorliegende Integral sich unter unsern Fundamentalformeln befindet, oder auf welche von unsern Fundamentalformeln sich dasselbe wohl zurückführen lässt.

Wir finden nun, dass unser Integral $\int \cos (a + bx) \, . \, bdx$ sich allerdings nicht unter den Fundamentalformeln befindet, indessen lässt sich doch leicht erkennen, dass man es auf die Form $\int \cos u \, du$ zurückführen kann.

Setzen wir nämlich

1) $a + bx = u$, so ist

2) $b \, dx = du$.

Substituiren wir diese neuen Werthe von $a + bx$ und $b\,dx$ in das vorliegende Integral, so erhalten wir nach Formel 10 Seite 6

$$3) \int \cos(a + bx) \,.\, b\,dx = \int \cos u\,du$$

$$4) \int \cos(a + bx) \,.\, b\,dx = \sin u + C.$$

Setzen wir hierin für u seinen Werth nach Gleichung 1, so folgt

$$5) \int \cos(a + bx) \,.\, b\,dx = \sin(a + bx) + C.$$

Wie gross ist das Differential von $\sin(a + bx) + C$?
Wie kann man durch dieses Differential die vorstehende Integration prüfen?

Aufgabe 2. Man soll das Integral $\int \cos(a + bx)\,dx$ entwickeln.

Auflösung. Wir setzen wieder

1) $a + bx = u$, daraus folgt

2) $b\,dx = du$

3) $dx = \frac{1}{b}\,du.$

Schalten wir den Werth von $a + bx$ und dx nach den Gleichungen 1 und 3 in das gegebene Integral ein, so folgt

$$4) \int \cos(a + bx) \,.\, dx = \int \cos u \,.\, \frac{1}{b}\,du.$$

Hieraus ergiebt sich nach §. 3 und Formel 10 Seite 6

$$5) \int \cos(a + bx) \,.\, dx = \frac{1}{b}\int \cos u\,du = \frac{1}{b}\sin u + C.$$

Setzen wir hierin den Werth von u nach Gl. 1, so folgt

$$6) \int \cos(a + bx) \,.\, dx = \frac{1}{b}\sin(a + bx) + C.$$

Prüfung durch Differentiation!

Aufgabe 3. Man soll das Integral $\int m \,.\, e^{a+bx}\,dx$ auflösen.

Auflösung. Wenn wir unser Integral mit den Fundamentalformen von Seite 5 und 6 vergleichen, so ergiebt sich, dass man dasselbe auf die Form $\int e^u\, du$ zurückführen kann. Zu dem Ende setzen wir

$$1)\quad a + bx = u, \text{ dann ist}$$

$$2)\quad dx = \frac{1}{b}\, du.$$

Setzen wir nach diesen beiden Gleichungen die Werthe von $a + bx$ und dx in das vorliegende Integral ein, so ergiebt sich nach §. 3 und Formel 8 Seite 6

$$3)\quad \int m \,.\, e^{a+bx}\, dx = \int m \,.\, e^u \,.\, \frac{du}{b} = \frac{m}{b} \int e^u\, du.$$

$$\int m \,.\, e^{a+bx}\, dx = \frac{m}{b}\, e^u + C.$$

Setzen wir hierin für u seinen Werth nach Gleichung 1, so ergiebt sich

$$4)\quad \int m \,.\, e^{a+bx}\, dx = \frac{m}{b}\, e^{a+bx} + C.$$

In ähnlicher Weise gelangt man zu folgenden Resultaten:

$$5)\quad \int (a + bx)^3 \,.\, b\, dx = \frac{(a + bx)^4}{4} + C.$$

Man setze $a + bx = u$, und vergl. No. 6 Seite 5.

$$6)\quad \int 15\, (a + bx)^4\, dx = 3\, \frac{(a + bx)^5}{b} + C.$$

$a + bx = u$ gesetzt und vergl. No. 6 Seite 5.

$$7)\quad \int \sqrt[5]{(a + bx)^3} \,.\, dx = \frac{5}{8} \,.\, \frac{\sqrt[5]{(a + bx)^8}}{b} + C.$$

Man setze $a + bx = u$, und vergl. Formel 6 Seite 5.

$$8)\quad \int \frac{A\, dx}{\sqrt[7]{(a + bx)^4}} = \frac{7A}{3b} \sqrt[7]{(a + bx)^3} + C.$$

Man setze $a + bx = u$, und vergl. Formel 6 Seite 5.

$$9)\quad \int a^{m+nx}\, dx = \frac{1}{n \,.\, la} \,.\, a^{m+nx} + C.$$

Man setze $m + nx = u$, und verfahre nach Formel 7 S. 5.

10) $\int \frac{dx}{\cos^2(a+bx)} = \frac{1}{b}\,\mathrm{tg}\,(a+bx) + C$

nach Formel 12 Seite 6.

11) $\int \frac{b\,dx}{1+(a+bx)^2} = \mathrm{arc\,tg}(a+bx) + C$

nach Formel 15 Seite 6.

Man hätte auch schreiben können

$$\int \frac{b\,dx}{1+(a+bx)^2} = -\,\mathrm{arc\,ctg}\,(a+bx) + C.$$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(a+bx)^2}} = \frac{1}{b}\,\mathrm{arc\,sin}\,(a+bx) + C$

nach Formel 14 Seite 6.

13) $\int (a+bx+cx^2)^4.(b+2cx)\,dx = \frac{(a+bx+cx^2)^5}{5} + C.$

Um zu diesem Resultate zu gelangen, setzen wir

$a+bx+cx^2 = u$, so ist

$(b+cx)\,dx = du$, also

$$\int (a+bx+cx^2)^4\,(b+2cx)\,dx = \int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + C \text{ etc.}$$

14) $\int \frac{b+2cx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\,dx = 2\sqrt{a+bc+cx^2} + C.$

Man setze $a+bx+cx^2 = u$ und verfahre nach Formel 6 Seite 5.

15) $\int m^{a+bx+cx^2}.(b+2cx)\,dx = m^{a+bx+cx^2}\,\frac{1}{lm} + C$

nach Formel 7 Seite 6.

16) $\int \frac{b+2cx}{a+bx+cx^2}\,dx = l\,(a+bx+cx^2)$

nach Formel 8 Seite 5.

17) $\int \cos(a+bx+cx^2).(b+2x)dx = \sin(a+bx+cx^2) + C$

nach Formel 10 Seite 6.

18) Man soll den Ausdruck $\int \frac{xdx}{a^2+x^2}$ entwickeln.

Auflösung. Man erkennt sehr leicht, dass — abgesehen von einem constanten Factor — der Zähler gleich dem Diffe-

rential des Nenners ist, das also unser Integral sich auf die Form $\int \frac{du}{d}$ bringen lässt. Setzen wir zu dem Ende

1) $a^2 + x^2 = u$, so ist
2) $2x\,dx = du$, also
3) $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$.

Schalten wir nun nach den Gleichungen 1 und 3 die Werthe von $a^2 + x^2$ und $x\,dx$ in das gegebene Integral ein, so erhalten wir nach Formel 9 Seite 6

$$4) \int \frac{xdx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\,lu + C.$$

Setzen wir hierin für u seinen Werth nach Gleichung 1, so folgt

$$5) \int \frac{xdx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2}\,l\,(a^2 + x^2) + C = l\sqrt{a^2 + x^2} + C.$$

19. **Man soll den Ausdruck $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ entwickeln.**

Um das vorliegende Integral zu lösen, vergleichen wir dasselbe mit unsern Fundamentalformeln. Es stellt sich dann heraus, dass wir unsern Ausdruck auf die Form $\int \frac{du}{1 + u^2}$ bringen, und darauf nach No. 15 der Fundamentalformeln integriren müssen.

Wir schreiben demnach

$$1) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{1}{a^2} \cdot \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Setzen wir hierin

2) $\frac{x}{a} = u$, so folgt
3) $dx = a\,du$.

Schalten wir hiernach die Werthe von $\frac{x}{a}$ und dx in Gleichung 1 ein, so folgt

$$4) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a\,du}{1+u^2} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{1+u^2}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} u + C.$$

Setzen wir hierin den Werth von u nach Gleichung 2 ein, so folgt

$$5) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C.$$ Gleichung 5 enthält eine sehr wichtige Formel.

20. Man soll folgende Ausdrücke entwickeln:

$$\text{I.} \int \frac{dx}{\sqrt{-a^2x^2}}, \quad \text{II.} \int \frac{dx}{\sqrt{1-bx^2}}, \quad \text{III.} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \text{IV.} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Auflösung I. Setzen wir $ax = u$, so ist $dx = \frac{du}{a}$, hiernach folgt nach Formel 14 Seite 6

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \int \frac{1}{a} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{a} \arcsin u + C.$$

Setzen wir hierin für u seinen Werth, so folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \frac{1}{a} \arcsin ax + C.$$

Auflösung II. Wir setzen $x \,.\, \sqrt{b} = u$, also $dx = \frac{du}{\sqrt{b}}$, so erhalten wir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin (x \,.\, \sqrt{b}) - C.$$

Auflösung III. Wir schreiben zunächst

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \int \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}.$$

Setzen wir hierin $\frac{x}{a} = u$, also $\frac{dx}{a} = du$, so folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C,$$

oder wenn wir für u seinen Werth setzen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc cin } \frac{x}{a} + C.$$

Auflösung IV. Es ist leicht einzusehen, dass der Ausdruck $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ auf die Form $\int u^m du$ gebracht werden kann.

Wir setzen zu dem Ende

1) $a^2 - x^2 = u$, so ist

2) $x\,dx = -\frac{1}{2} du$.

Hiernach erhalten wir

3) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{-\frac{1}{2} du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = -\sqrt{u} + C.$

Setzen wir hierin für u seinen Werth nach Gleichung 1, so ergiebt sich

4) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$

21. Es sind noch folgende Integrale zu entwickeln

$\int \sqrt[3]{(1+x^3)^5}\, x^2 dx.$ **(Man setze $1+x^3=u$ und verfahre nach Formel 6, S. 5.)**

$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{(1+x^3)^5}}.$ **(Man setze $1+x^3=u$ und verfahre nach Formel 6, S. 5.)**

$\int \frac{x^3\,dx}{a+x^4}.$ **(Man setze $a+x^4=u$ und verfahre nach Formel 9, S. 6.)**

$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x}.$ **(Man setze $\sin x=u$ und verfahre nach Formel 9, S. 6.)**

$\int e^{a^2+x^2} . x\,dx.$ **(Man setze $a^2+x^2=u$ und verfahre nach Formel 8, S. 6.)**

Bemerkung.

Bei den letzten Aufgaben sind keine Lösungen gegeben. Der Leser kann die Richtigkeit der Resultate leicht durch Differentiation prüfen; wie wir dies zum Ueberfluss noch an folgendem Beispiele zeigen wollen.

Es sei gegeben $\frac{\cos x\,dx}{\sin x}$. Um diesen Ausdruck zu integriren, setzen wir $\sin x = u$, so ist $\cos x\,dx = du$, also $\frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \frac{du}{u}$, also

$$1) \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \int \frac{du}{u} = l u + C \quad \text{oder}$$

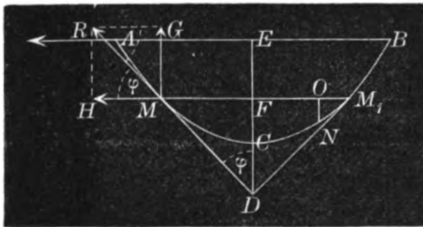
$$2) \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = l \sin x + C.$$

Wollte man jetzt die Richtigkeit des Resultates prüfen, so brauchte man nur die rechte Seite von Gleichung 2 zu differentiiren. Wir erhalten dadurch $d(l \sin x + C) = \frac{d \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x\, dx}{\sin x}$. **Wir haben also durch Differentiation des Resultats diejenige Differentialfunction wieder erhalten, die wir integrirt haben.** — (Wir sehen hieraus, dass die Integration richtig war).

§. 11.

Anwendung. Entwicklung der Gleichung für die Kettenlinie.

Fig. 4.



Ein an 2 Puncten aufgehängtes biegsames Seil bildet eine krumme Linie, die sogenannte Kettenlinie. Bezeichnet γ das Gewicht eines Kettenstückes von 1^m Länge, ferner l den Bogen $MC = M_1C$, so ist das Gewicht dieses Kettenstückes $G = l\gamma$. Setzt man endlich die Länge eines Kettenstückes, deren Gewicht gleich der Horizontalspannung H ist, gleich λ, so ist $H = \lambda\gamma$. In Folge dessen hat man für den Neigungswinkel φ die Gleichung $\operatorname{tg} \varphi = \frac{MF}{FD}$

$$= \frac{G}{H} = \frac{l\gamma}{\lambda\gamma} = \frac{l}{\lambda},$$

nun ist aber $\sqrt{\varphi}$ auch gleich dem $\sqrt{OM_1N}$, welchen ein Bogenelement dl mit einem Element $OM_1 = dy$, der Ordinate $FM_1 = FM = y$ bildet und ist in Folge dessen $\frac{l}{\lambda} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{ON}{OM} = \frac{dx}{dy}$ oder auch 1) $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{l^2}{\lambda^2}$, wenn wir ON als Element der Abscisse $DF = x$ betrachten.

Nach dem Pythagoräischen Lehrsatz ist aber $dy^2 = dl^2 - dx^2$, setzt man diesen Werth in 1) ein, so folgt

2) $\frac{dl^2 - dx^2}{dx^2} = \frac{\lambda^2}{l^2}$ und durch weitere Entwicklung

$dx^2 ((\lambda^2 - l^2) = l^2 . dl^2$ oder

3) $dx = \frac{l\, dl}{\sqrt{\lambda^2 - l^2}}$. Setzt man nun $\lambda^2 + l^2 = v$, also $2l\, dl = dv$,

so erhalten wir

$$dx = \frac{1/_2\, dv}{v^{1/_2}} = 1/_2\, v^{-1/_2}\, dv, \text{ folglich}$$

4) $x = 1/_2 \int v^{-1/_2}\, dv + C = 1/_2 . \frac{v^{-1/_2+1}}{-1/_2+1} + C = 1/_2 \frac{v^{1/_2}}{1/_2} + C$

$= \sqrt{v} + C = \sqrt{\lambda^2 + l^2} + C$. Ist nun $x = o$, so ist es auch l und man kann deshalb setzen

$O = \sqrt{\lambda^2} + C$, woraus folgt $C = -\lambda$. Diesen Werth für C in Gleichung 4 gesetzt, giebt

$$x = \sqrt{l^2 + \lambda^2} \quad - \lambda \text{ oder}$$

$$l = \sqrt{(x+\lambda)^2 - \lambda^2} = \sqrt{x^2 + 2x\lambda} \text{ und}$$

$$\lambda = \frac{l^2 - x^2}{2x}.$$

Wird also eine 8^m lange und 24 Kgr. schwere Kette ACB so aufgehangen, dass die Bogenhöhe $CE = 3^m$ ist, so hat man $\gamma = \frac{24}{8} = 3K$ und $\lambda = \frac{l^2 - x^2}{2x} = \frac{4^2 - 3^2}{2 . 3} = 7/_6$, folglich bringt die Kette eine Horizontalspannung von $H = \lambda\gamma = 3 . 7/_6 = 7/_2 = 3{,}5$ Kgr. hervor.

§. 12.

Integration durch Zerlegung.

Wenn die vorhin gezeigten Methoden allein nicht genügen, um eine Differential-Function (Fx dx) zu integriren, so kann man dies zuweilen dadurch erreichen, dass man die Function

(Fx dx) in mehrere Summaden zerlegt, welche man integriren kann. Ist z. B.

$$Fx\,dx = f'x\,dx + \varphi'x\,dx, \text{ so folgt hieraus}$$

$$\int Fx\,dx = \int f'x\,dx + \int \varphi'x\,dx$$

$$\int Fx\,dx = fx + \varphi x + C.$$

Einige Beispiele mögen dies erläutern.

$$1)\ \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$$

Wir setzen $\frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{dx\,(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Hieraus folgt nach Formel 12 und 13 Seite 6

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

$$2)\ \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x}.$$

Wir setzen $\frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin x\,dx}{\cos x} + \frac{\cos x\,dx}{\sin x}$.

Hieraus folgt nach Formel 9, 10 und 11 Seite 6

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos . x} + \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} - l \cos x + l \sin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = l\,\frac{\sin x}{\cos x} + C = l\,\operatorname{tg} x + C.$$

$$3)\ \frac{dx}{\sin x}.$$

Wir setzen $\frac{dx}{\sin x} = \frac{2\,d\,\frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{d\,\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}$.

Setzen wir hierin $\frac{x}{2} = u$, so folgt $\frac{dx}{\sin x} = \frac{du}{\sin u \cdot \cos u}$.

Hieraus ergiebt sich analog wie in Aufgabe 2

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{du}{\sin u \cdot \cos u} = l\,\operatorname{tg} u + C.$$

Setzen wir hierin für u seinen Werth, so ergiebt sich

$$\int \frac{dx}{\sin x} = l \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

$$4) \frac{1+x}{1+x^2} dx.$$

Setzen wir $\frac{1+x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}$, so ist

$$\int \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Hieraus folgt nach Formel 15 und 9 Seite 6

$$\int \frac{1+x}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \tfrac{1}{2} l(1+x^2) + C.$$

Bemerkungen.

1) Wir empfehlen dem Anfänger, die Richtigkeit der Resultate durch Differentiation zu prüfen.

2) Die Integration durch Zerlegung findet besonders bei der Integration der rational gebrochenen Functionen Anwendung.

§. 13.

Theilweise Integration.

Wenn u und v zwei beliebige Functionen von x sind, so ist bekanntlich

$$1)\ d(u.v) = u\,dv + v\,du$$

und hieraus folgt wieder durch Integration

$$2)\ u.v + c' = \int u\,dv + c'' + \int v\,du + c''' \text{ oder}$$

$$3) \int u\,dv = uv + c' - c'' - \int v\,du - c'''.$$

Offenbar kann man den Werth von $c' - c'' - c'''$ gleich irgend einer beliebigen Constanten, C, setzen, so ergiebt sich demnach aus Gleichung 3

$$4) \int u\,dv = uv - \int v\,du + C.$$

Mit Hülfe der Gleichung 4 ist die Integration der Differential-Function u dv zurückgeführt auf die Integration von v du.

Das Integrations-Verfahren, das sich hierauf stützt, heisst theilweise Integration.

Beispiel I. Es sei gegeben lx . dx.

Wenn wir diese Function integriren wollen, so können wir zunächst untersuchen, ob $\int lx\,dx$ unter unsern Fundamentalformeln (Seite 5 u. 6) vorkommt. Nachdem wir hier vergeblich gesucht haben, können wir uns bemühen, unser Integral mit Hülfe der Substitutionsmethode oder durch Zerlegung (§. 10 u. 12) zu entwickeln. Auch hier werden wir nicht auf eine einfache Weise zum Ziele kommen.

Wir machen deshalb den Versuch, ob wir $\int lx\,dx$ nicht durch theilweise Integration (nach Gleichung 4) **lösen können.** Zu dem Ende setzen wir

$$5)\quad lx = u,\ dx = dv.$$

$$6)\quad \frac{dx}{x} = du,\ x = v.$$

Hiernach ergiebt sich mit Hülfe von Gleichung 4

$$7)\quad \int \underbrace{lx\,.\,dx}_{u\,.\,dv} = \underbrace{lx\,.\,x}_{u\,.\,v} - \int \underbrace{x\,.\,\frac{dx}{x}}_{v\,.\,du} + C.$$

$$8)\quad \int \underbrace{lx\,.\,dx}_{u\,.\,dv} = \underbrace{lx\,.\,x}_{u\,.\,v} - \int \underbrace{dx}_{v\,du} + C.$$

$$9)\quad \int lx\,.\,dx = x\,.\,lx - x + C.$$

Bemerkung.

Um die Richtigkeit der Integration zu prüfen, differentiiren wir das Resultat. Wir erhalten alsdann

$$1)\quad d(x\,.\,lx - x + C) = x\,.\,dlx + lx\,.\,dx - dx$$

$$2)\quad d(x\,.\,lx - x + C) = x\,.\,\frac{dx}{x} + lx\,.\,dx - dx.$$

Dies giebt aber

$$3)\quad d(x\,.\,lx - x + C) = lx\,.\,dx.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit Gleichung 9, so erkennt man ohne Weiteres, dass das Resultat der vorstehenden Integration richtig ist.

§. 14.

Fortsetzung.

Bedenken wir, dass nach Gleichung 4 §. 13 die Integration der Function u dv auf die Integration der Function v du zurückgeführt ist, so ergiebt sich, **dass die theilweise Integration nur dann zur Entwickelung von $\int$ u dv angewendet werden kann, wenn $\int$ v du entweder unmittelbar mit Hülfe unserer Fundamentalformeln** (Seite 6) **entwickelt werden kann, oder wenigstens doch einfacher ist als $\int$ u dv.**

Bei der Anwendung der theilweisen Integration auf eine gegebene Differential-Function kömmt es also vor **allen Dingen darauf an, die Werthe von u und dv zweckmässig zu bestimmen.** — Ein Beispiel mag dies erläutern.

Soll man z. B. die Function $\int e^x . x\,dx$ entwickeln, so kann man auf dreifache Art die theilweise Integration einleiten.

I. Fall. Man setze $e^x . x = u$, also $dx = dv$
II. Fall. Man setze $e^x = u$, also $x\,dx = dv$
III. Fall. Man setze $x = u$, also $e^x . dx = dv$.
In allen drei Fällen wird $e^x . x\,dx = u\,dv$.

Wir wollen nun versuchen, ob es möglich ist, die Entwickelung von $\int e^x x\,dx$ in den genannten 3 Fällen auszuführen.

I. Versuch. Setzen wir $e^x . x = u$, $dx = dv$, so ergiebt sich

$$\int \underbrace{e^x x}_{u} . \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{e^x x}_{u} . \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{x}_{v} . \underbrace{(e^x\,dx + x\,e^x\,dx)}_{du}$$

$$\int e^x x . dx = e^x x^2 \quad - \int e^x x\,dx - \int x^2 e^x\,dx$$

oder bringen wir nun den Ausdruck $\int e^x x\,dx$, der sich rechts in unserer Gleichung befindet, auf die linke Seite, so erhalten wir

$$2 \,.\int e^x x \,.\, dx = e^x \,.\, x^2 - \int x^2 e^x \, dx.$$

$$\int e^x x \,.\, dx = \frac{e^x \,.\, x^2 - \int x^2 e^x \, dx}{2}.$$

Wir haben also die Lösung von $\int e^x x \, dx$ zurückgeführt auf die Lösung von $\int e^x x^2 \, dx$. Da nun aber das letzte Integral schwieriger zu lösen ist, wie das ursprünglich gegebene, **so sind wir auf diesem Wege dem Ziele nicht näher gekommen.**

II. Versuch. Setzen wir $e^x = u$ und $x \, dx = v$, so erhalten wir

$$\int \underbrace{e^x}_{u} \,.\, \underbrace{x\,dx}_{dv} = \underbrace{\frac{e^x \,.\, x^2}{2}}_{u \;.\; v} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} \,.\, \underbrace{e^x \, dx}_{du}.$$

Hieraus folgt wieder

$$\int e^x \,.\, x \, dx = \frac{e^x \,.\, x^2 - \int x^2 \,.\, e^x \, dx}{2}.$$

Wir sind also auch auf diesem Wege dem Ziele nicht näher gekommen.

III. Versuch. Setzen wir endlich $x = u$ und $e^x \, dx = dv$, so folgt

$$\int e^x \,.\, x \, dx = \int \underbrace{x}_{u} \,.\, \underbrace{e^x \, dx}_{dv} = \underbrace{x \,.\, e^x}_{u \,.\, v} - \int \underbrace{e^x \, dx}_{u \;.\; dv}, \text{ also}$$

$$\int e^x \,.\, x \, dx = x \,.\, e^x - e^x + C.$$

Auf diesem Wege ist es also gelungen, die Entwickelung von $\int e^x x \, dx$ zu Ende zu führen, während wir auf den Wegen, die beim ersten und zweiten Versuche eingeschlagen wurden, nicht zum Ziele gelangen konnten. Wir finden demnach das bestätigt, was zu Anfang dieses Paragraphen gesagt ist.

§. 15.

Fortsetzung.

In manchen Fällen gelingt die Entwickelung eines vorliegenden Integrals dadurch, dass man die theilweise Integration wiederholt anwendet. Setzen wir z. B. in dem Ausdruck $\int x^2 e^x dx$

1) $x^2 = u$, $e^x dx = dv$, so ist

2) $\int \underbrace{x^2 e^x dx}_{u\ .\ dv} = \underbrace{x^2 e^x}_{u\ .\ v} - \int \underbrace{e^x . 2x dx}_{v\ .\ du}$

3) $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$

Aus Gleichung 3 ersieht man, dass das $\int x^2 e^x dx$ zurückgeführt ist auf das einfache Integral $\int x e^x dx$. Um dieses zu entwickeln, setzen wir

4) $x = u$, $e^x dx = dv$, dann ergiebt sich

5) $\int \underbrace{x . e^x dx}_{u\ .\ dv} = \underbrace{x e^x}_{u\ .\ v} - \int \underbrace{e^x . dx}_{v\ .\ du}$. also

6) $\int x . e^x dx = x . e^x - e^x + C.$

Schalten wir diesen Werth von $\int x . e^x dx$ in Gl. 3 ein, so folgt 7) $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + C$

$$= e^x (x^2 - 2x + 2) \qquad + C.$$

Wäre dagegen die Function $\int x^3 e^x dx$ zu entwickeln, so erhielten wir durch dreimalige Anwendung der theilweisen Integration

8) $\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx$

9) $\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \left\{ x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \right\}$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx$$

10) $\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x \,.\, e^x - 6 e^x + C$

11) $\int x^3 e^x dx = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) \qquad + C.$

Bemerkung.

Wir empfehlen dem Anfänger, sich durch Differentiation von der Richtigkeit der Resultate in den Gleichungen 7 und 11 zu überzeugen.

§. 16.

Fortsetzung.

In einzelnen Fällen erhält man durch Anwendung der theilweisen Integration Gleichungen, welche auf beiden Seiten dasselbe Integral mit entgegengesetzten Vorzeichen haben. Ist z. B. $\int fx\, dx$ zu entwickeln, so kann es sich ereignen, dass man auf folgende Gleichung kömmt

1) $\int fx\, dx = Fx - m \int fx\, dx$; hieraus folgt

2) $(m+1) \int fx\, dx = Fx + C$, also

3) $\int fx\, dx = \frac{Fx}{(m+1)} + C'$.

Hier ist $C' = \frac{C}{m+1}$; weil C eine willkürliche Constante ist, so kann C' ebenfalls jeden beliebigen Werth haben.

Aufgabe 1. Man soll die Function $\int \sin^2 x\, dx$ entwickeln.

Auflösung. Schreiben wir $\sin x \,.\, \sin x\, dx$ statt $\sin^2 x\, dx$, so erhalten wir

1) $\int \sin^2 x\, dx = \int \sin x \,.\, \sin x\, dx = - \int \underbrace{\sin x}_{u} \,.\, \underbrace{d \cos x}_{dv}$

$= - \left\{ \underbrace{\sin x}_{u} \,.\, \underbrace{\cos x}_{v} - \int \underbrace{\cos x}_{v} \,.\, \underbrace{d \sin x}_{du} \right\}$

2) $\int \sin^2 x\, dx = - \sin x \,.\, \cos x + \int \cos x\, d \sin x.$

Nun ist $d \sin x = \cos x \, dx$, also

$$3) \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \, . \cos x + \int \cos^2 x \, . \, dx.$$

Setzen wir hierin $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, so folgt

$$4) \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \, . \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$5) \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \, . \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx.$$

Wir haben also hier rechts und links $\int \sin^2 x \, dx$.

Bringen wir nun die Function $\int \sin^2 x \, dx$ von der rechten Seite unserer Gleichung nach der linken Seite, so folgt

$$6) \; 2 \int \sin^2 x \, dx = x - \sin x \, . \cos x + C$$

$$7) \int \sin^2 x \, dx = \frac{x - \sin x \, . \cos x}{2} + C'.$$

Aufgabe 2. Man soll die Function $\int \sin^m x \, dx$ entwickeln.

Auflösung. Zunächst ist

$$1) \int \cos^m x \, dx = \int \cos^{m-1} x \, . \cos x \, dx.$$

Setzen wir hierin $\cos^{m-1} x = u$ und $\cos x \, dx = dv$, so erhalten wir

$$2) \int \cos^m x \, dx = \int \underbrace{\cos^{m-1} x}_{v} \, . \underbrace{\cos x \, dx}_{dv}$$

$$= \underbrace{\cos^{m-1} x}_{u} \, . \underbrace{\sin x}_{v} - \int \underbrace{\sin x}_{v} \, . \underbrace{d \cos^{m-1} x}_{du}$$

$$3) \int \cos^m x \, dx = \cos^{m-1} x \sin x + \int (m-1) \, . \cos^{m-2} x \, . \sin^2 x \, dx.$$

Weil aber $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, so folgt aus Gleichung 3

$$4) \int \cos^m x \, dx = \cos^{m-1} x \, . \sin x + (m-1) \int \cos^{m-2} x (1 - \cos^2) \, dx$$

$$= \cos^{m-1} x \, . \sin x + (m-1) \left\{ \int \cos^{m-2} x \, dx - \int \cos^m x \, dx \right\}$$

5) $\int \cos^m x\,dx$

$$= \cos^{m-1}x.\sin x + (m-1)\int \cos^{m-2}x\,dx - (m-1)\int \cos^m x\,dx.$$

Wir haben also wieder auf beiden Seiten unserer Gleichung dasselbe Integral. Bringen wir nun den Ausdruck $(m-1).\int \cos^m x\,dx$ von der rechten Seite auf die linke Seite, so folgt

6) $m\int \cos^m x\,dx = \cos^{m-1}x.\sin x + (m-1).\int \cos^{m-2}x.dx$ oder

7) $$\int \cos^m x\,dx = \frac{\cos^{m-1}x.\sin x}{m} + \frac{m-1}{m}.\int \cos^{m-2}x.dx.$$

Bemerkungen.

1) Um die Formel in Gleichung 7 anzuwenden, wollen wir uns die Aufgabe stellen, das Integral von $\cos^5 x\,dx$ zu bestimmen. Wir setzen zu dem Ende in Gleichung 7, $m = 5$, so erhalten wir

8) $$\int \cos^5 x\,dx = \frac{\cos^4 x.\sin x}{5} + \frac{4}{5}\int \cos^3 x\,dx.$$

Setzen wir ferner in Gleichung 7, $m = 3$, so folgt

9) $$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\cos^2 x.\sin x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx$$

$$= \frac{\cos^2 x.\sin x}{3} + \frac{2}{3}\sin x + C.$$

Schalten wir nun den Werth von $\int \cos^3 x\,dx$ nach Gleichung 9 in Gleichung 8 ein, so ergiebt sich

10) $$\int \cos^5 x\,dx = \frac{\cos^4 x.\sin x}{5} + \frac{4}{5}\,\frac{\cos^2 x.\sin x}{3} + \frac{4.2}{5.3}\sin x + C.$$

2) Wie würde man mit Hülfe von §. 45 der Differential-Rechnung die Function $\cos^5 x\,dx$ integriren können?

3) Man soll die Richtigkeit der Gleichung 10 durch Differentiation prüfen.

Aufgabe 3. Man soll die Function $\int \sin x.e^x\,dx$ entwickeln.

Auflösung. Wir setzen

1) $\sin x = u$, $e^x\,dx = dv$, dann folgt

2) $$\int \underbrace{\sin x}_{u}.\underbrace{e^x\,dx}_{dv} = \underbrace{\sin x}_{u}.\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\underbrace{\cos x.dx}_{du}$$

Ferner ist

3) $\int e^x \cos x\, dx = \int \underbrace{\cos x}_{u} . \underbrace{e^x\, dx}_{dv} = \underbrace{\cos x}_{u} . \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v} . \underbrace{(-\sin x\, dx)}_{du}$

4) $\int e^x \cos x\, dx = \cos x . e^x + \int \sin x . e^x\, dx.$

Setzen wir den Werth von $\int e^x \cos x\, dx$ nach Gleichung 4 in Gleichung 2 ein, so folgt

5) $\int \sin x . e^x\, dx = \sin x . e^x - \cos x . e^x = \int \sin x . e^x\, dx$

Hieraus ergiebt sich weiter

6) $2 . \int \sin x . e^x\, dx = \sin x . e^x - \cos x\, e^x + C$

7) $\int \sin x . e^x\, dx = e^x . \frac{\sin x - \cos x}{2} + C'.$

Die Richtigkeit von Gleichung 7 ist durch Differentiation zu prüfen.

§. 17.

Uebungs-Aufgaben.

1. $\int \frac{11\, dx}{10 + 3x}.$

Man setze $10 + 3x = u$, also $dx = \frac{du}{3}$, so folgt

$$\int \frac{11\, dx}{10 + 3x} = \int \frac{11 . \frac{du}{3}}{u} = \frac{11}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{11}{3}\, lu + C.$$

$$\int \frac{11\, dx}{10 + 3x} = \frac{11}{3}\, l\,(10 + 3x) + C.$$

2. $\int 13x^2 \sqrt[5]{(4 + 7x^3)^{11}} . dx.$

Man setze $4 + 7x^3 = u$, also $x^2\, dx = \frac{1}{21}\, du$, dann erhält man

$$\int 13\, x^2 \sqrt[5]{(4 + 7x^3)^{11}} . dx = \frac{13}{21} \int u^{11/5} . du.$$

Hieraus folgt nach Formel 6 Seite 6

$$\int 13\,x^2 \sqrt[5]{(4+7x^3)^{11}}\,.\,dx = \frac{13}{21} \cdot \frac{u^{11/5+1}}{\frac{11}{5}+1} + C.$$

Setzen wir hierin für u seinen Werth, so folgt

$$\int 13\,x^2 \sqrt[5]{(4+7x^3)^{11}}\,.\,dx = \frac{13}{21} \cdot \frac{5}{16} \sqrt[5]{(4+7x^3)^{16}} + C.$$

$$3.\quad \int \frac{a^2 x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Wir setzen $a^2 - x^2 = u$, also $x\,dx = -\frac{du}{2}$, so ist

$$\int \frac{a^2\,x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{a^2}{2}\int u^{-1/2}\,du = -\frac{a^2}{2}\,2u^{1/2} + C.$$

Hierin für u seinen Werth gesetzt, giebt

$$\int \frac{a^2\,x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -a^2 \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

$$4.\quad \int \frac{3x^3\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Aus der Auflösung von Aufgabe 3 erkennt man sehr leicht, dass $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C$ ist. Theilen wir nun die Function $\frac{3x^3\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ in die Factoren $3x^2$ und $\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ und setzen demnach $3x^2 = u$, $\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = dv$, so ergiebt sich durch theilweise Integration

$$1)\int \frac{3x^3\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \underbrace{3x^2\,.\,\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}_{u\;.\;dv}$$

$$= \underbrace{3x^2\,.\,(-\sqrt{a^2-x^2})}_{u\;.\;v} - \int \underbrace{(-\sqrt{a^2-x^2})\,.\,6x\,dx}_{v\;.\;du}$$

$$2)\int \frac{3x^3\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -3x^2\,.\,\sqrt{a^2-x^2} + 6\int \sqrt{a^2-x^2}\,.\,x\,dx.$$

Setzen wir nun $a^2 - x^2 = u$, also $x\,dx = -\frac{du}{2}$, so ergiebt sich

$$3) \int \sqrt{a^2 - x^2} \, . \, x\,dx = -\int u^{1/2} \frac{du}{2}$$
$$= -\frac{1}{3} u^{3/2} = -\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}{3}$$

Wenn der Werth von $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, . \, x\,dx$ nach Gleichung 3 in Gleichung 2 eingeschaltet wird, so erhalten wir

$$4) \int \frac{3x^3\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -3x^2 \sqrt{a^2 - x^2} - 2\sqrt{(a^2 - x^2)^3} + C$$
$$= -\sqrt{a^2 - x^2}\,(3x^2 + 2a^2 - 2x^2) + C.$$
$$= -\sqrt{a^2 - x^2}\,(x^2 \quad + 2a^2) \qquad + C$$

$$5. \int \frac{x \, . \, (a^2 - 3x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx.$$

Durch Zerlegung erhalten wir

$$\int \frac{x \, . \, (a^2 - 3x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int \frac{a^2 x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{3x^3\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

In den beiden letzten Beispielen haben wir die Werthe derjenigen Integrale entwickelt, welche auf der rechten Seite unserer Gleichung stehen. Danach erhalten wir

$$\int \frac{x \, . \, (a^2 - 3x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = -a^2 \, . \, \sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}\,(x^2 + 2a^2) + C$$

$$\int \frac{x \, . \, (a^2 - 3x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \sqrt{a^2 - x^2}\,(-a^2 + x^2 + 2a^2) + C$$
$$= (a^2 + x^2) \, . \, \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Vergleiche D.-R. Seite 63 No. 6.

$$6. \int x \, . \cos x\,dx.$$

$$\int \underbrace{x \, . \cos x}_{v \;.\; dv}\,dx = \underbrace{x \, . \sin x}_{u \;.\; v} - \int \underbrace{\sin x\,dx}_{v \;.\; du} = x \, . \sin x + \cos x + C.$$

$$7.\ \int x \,.\, \sin x\, dx.$$

$$\int x \,.\, \sin x\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

$$8.\ \int \operatorname{arc\,tg}.\, x\, dx.$$

$$\int \underbrace{\operatorname{arc\,tg} x}_{u} \,.\, \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x \,.\, \operatorname{arc\,tg} x}_{v\ .\ u} - \int \underbrace{\frac{x\,dx}{1+x^2}}_{v\ .\ du}.$$

$$= x \,.\, \operatorname{arc\,tg} x - {}^1\!/_2\, l\,(1+x^2) + C.$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \,.\, dx = x \,.\, \operatorname{arc\,tg} x - l \sqrt{1+x^2} + C.$$

$$9.\ \int \operatorname{arc\,tg} e^x \,.\, e^x\, dx.$$

Wir setzen $e^x = u$. Die Rechnung ist dann der vorigen analog. Wir erhalten demnach

$$\int \operatorname{arc\,tg} e^x \,.\, e^x\, dx = e^x \,.\, \operatorname{arc\,tg} e^x - l \sqrt{1+e^{2x}} + C.$$

$$10.\ \int \operatorname{arc\,sin} x\, dx.$$

$$\int \operatorname{arc\,sin} x \,.\, dx = x \,.\, \operatorname{arc\,sin} x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x \,.\, \operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$11.\ \int \operatorname{tg} x\, dx \text{ und } \int \operatorname{ctg} x\, dx.$$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -l \cos x + C = l\, \frac{1}{\cos x} + C.$$

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = l \sin x + C.$$

$$12.\ \frac{dx}{\sin x} \text{ und } \int \frac{dx}{\cos x}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2\, d\,\frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \,.\, \cos \frac{x}{2}}.$$

Setzt man hierin $\frac{x}{2} = u$, so folgt

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{du}{\sin u \,.\, \cos u} = \int \frac{(\cos^2 u + \sin^2 u)\, du}{\sin u \,.\, \cos u}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\cos u \, du}{\sin u} + \int \frac{\sin u \, du}{\cos u}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = l \sin u - l \cos u = l \operatorname{tg} u + C.$$

Hierin für u seinen Werth $\left(\frac{x}{2}\right)$ gesetzt, giebt

$$\int \frac{dx}{\sin x} = l \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

Um den Werth von $\int \frac{dx}{\cos x}$ zu finden, setzen wir

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos u, \text{ also } dx = - du.$$

Demnach ist

$$\int \frac{dx}{\cos x} = - \int \frac{du}{\sin u} = - l \operatorname{tg} \frac{u}{2} + C = l \operatorname{ctg} \frac{u}{2} + C.$$

Schalten wir hierin für u seinen Werth $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ein, so folgt

$$\int \frac{dx}{\cos x} = l \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C = l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

II. Capitel.

Integration der rationalen algebraischen gebrochenen Functionen.

§. 18.

Die rationalen algebraischen gebrochenen Functionen im Allgemeinen.

Die rationalen algebraischen gebrochenen Functionen lassen sich stets auf die Form

$$1)\quad \frac{Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots Gx + H}{ax^m + bx^{m-1} + cx^{n-2} + \ldots px + q}$$

bringen. Hierbei ist vorausgesetzt, dass A, B, C, a, b etc. beliebige constante Zahlen (Null eingeschlossen), und dass m und n beliebige **positive ganze Zahlen** sind.

Man theilt die rationalen algebraischen gebrochenen Functionen ein in **echt gebrochene** und **unecht gebrochene Functionen. Eine echt gebrochene rationale algebraische Function ist eine solche rationale algebraische Function, bei welcher der höchste Exponent im Zähler kleiner ist, als der höchste Exponent im Nenner; dagegen ist eine unecht gebrochene rationale algebraische Function eine solche rationale algebraische Function, bei welcher der höchste Exponent im Zähler so gross oder grösser ist als der höchste Exponent im Nenner.** Hiernach ist die Function $\frac{Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots Gx + H}{ax^m + bx^{m-1} + \ldots px + q}$ eine echt gebrochene Function, wenn $n < m$, ist aber $n = m$ oder $n > m$, so ist sie eine unecht gebrochene Function.

§. 19.

Fortsetzung.

Jede unecht gebrochene rationale algebraische Function

lässt sich in die Summe einer ganzen und einer recht gebrochenen Function verwandeln. Ist z. B.

$$\frac{x^3 + 9x^2 + 12x - 16}{x^2 + 2x - 3}$$

gegeben, so erhalten wir durch Division

$$x^3 + 9x^2 + 12x - 16 : x^2 + 2x - 3 = x + 7 + \frac{x + 5}{x^2 + 2x - 3}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 3x \\ \hline 7x^2 + 15x - 16 \\ 7x^2 + 14x - 21 \\ \hline x + 5 \end{array}.$$

§. 20.

Zerlegung der echt gebrochenen rationalen algebraischen Functionen in Partialbrüche.

Wenn 1) $Fx = x^m + kx^{m-1} + \ldots px + q$

eine rationale ganze Function ist, und wenn ausserdem $r . s \ldots w$ die m Wurzeln der Gleichung

2) $0 = x^m + kx^{m-1} + \ldots px + q$

sind, so ist nach der Theorie der Gleichungen

3) $Fx = x^m + kx^{m-1} + \ldots px + q = (x-r).(x-s)\ldots(x-w)$.

Ist nun Fx der Nenner einer echt gebrochenen Function

4) $\frac{fx}{Fx} = \frac{Kx^n + Lx^{n-1} + \ldots . Px + Q}{x^m + kx^{m-1} + \ldots . px + q}$,

so kann man auch schreiben

5) $\frac{fx}{Fx} = \frac{Kx^n + Lx^{n-1} + \ldots . Px + Q}{(x - r) . (x - s) \ldots . (x - w)}$.

Hieraus folgt aber weiter, dass der Bruch $\frac{fx}{Fx}$ als eine Summe von Brüchen aufgefasst werden kann, deren Nenner als Factoren in dem General-Nenner $Fx = (x - r) . (x - s) \ldots (x - w)$ enthalten sein müssen. Es muss demnach auch möglich sein, den Bruch $\frac{fx}{Fx}$ wieder in seine Partialbrüche zu zerlegen. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Fall. Die Wurzeln r, s . . . w der Gleichung $Fx = 0$ sind alle von einander verschieden.

II. Fall. Die Wurzeln sind nicht alle von einander verschieden.

In jedem dieser beiden Fälle kann man noch wieder unterscheiden, ob die Wurzeln alle reell sind oder nicht, **so dass hiernach 4 verschiedene Fälle** eintreten können. Wir wollen jeden dieser Fälle an einem Zahlen-Beispiele erörtern.

Aufgabe 1. Man soll den Bruch $\frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Wir setzen den Nenner gleich Null, und erhalten dadurch die Gleichung

$$1)\quad x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = 0.$$

Zerlegen wir dass Glied ohne x, also 42 in seine Primfactoren 7, 3 und 2 und setzen diese der Reihe nach, sowohl mit positivem als negativem Vorzeichen für x in die Gleichung ein, so sehen wir, dass derselben die Werthe $+7$, -3 und $+2$ genügen.

Nach der Theorie der Gleichungen ist also

$$3)\quad x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = (x - 7) . (x + 3) . (x - 2).$$

Hieraus folgt

$$4)\quad \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} = \frac{15x^2 - 70x - 95}{(x - 7) . (x + 3) . (x - 2)}.$$

Hiernach können wir den Bruch $\frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42}$ als die Summe dreier Brüche auffassen, deren Nenner resp. $(x - 7)$, $(x + 3)$, $(x - 2)$ sind. Da wir nun die Zähler dieser Brüche nicht kennen, so fingiren wir dieselben einstweilen nach der Methode der unbestimmten Coefficienten, und setzen für dieselben resp. A, B und C. Hiernach ist

$$5)\quad \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} = \frac{A}{x - 7} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 2}.$$

Um die Werthe von A, B und C zu ermitteln, bringen wir die Brüche auf der rechten Seite unserer Gleichung auf den gemeinschaftlichen Nenner $(x-7).(x+3).(x-2)$ und addieren sie. Hierdurch ergiebt sich die Gleichung

$$6)\quad \frac{15x^2-70x+95}{x^3-6x^2-13x+42} = \frac{A(x+3).(x-2)+B(x-7).(x-2)+C(x-7).(x+3)}{(x-7).(x+3).(x-2)}$$

oder

$$7)\quad \frac{15x^2-70x-95}{x^3-6x^2-13x+42} = \frac{x^2(A+B+C)+x(A-9B-4C)+(-6A+14B-21C)}{x^3-6x^2-13x+42}.$$

Die Nenner auf beiden Seiten unserer Gleichung 7 sind gleich, also müssen auch die Zähler gleich sein, mithin ist

$$8)\quad 15^2-70x-95=x^2(A+C+C)+x(A-9B-4C)+(-6A+14B-21C).$$

Diese Gleichung gilt für jeden Werth von x, also ist nach D. R. Hüfssätze aus der algebraischen Analysis No. 9

$$9)\quad A+B+C=15$$
$$10)\quad A-9B-4C=-70$$
$$11)\quad -6A+14B-21C=-95.$$

Lösen wir diese Gleichungen für A, B und C auf, so erhalten wir

$$12)\quad A=3,\ B=5,\ C=7.$$

Setzen wir diese Werthe von A, B und C in Gleichung 5 ein, so erhalten wir

$$13)\quad \frac{15x^2-70x-95}{x^3-6x^2-13x+42}=\frac{3}{x-7}+\frac{5}{x+3}+\frac{7}{x-2}.$$

Bemerkungen.

1. Die Lösung der Gleichungen (9 bis 11), aus denen wir die Werthe der Coefficienten (A, B, C) bestimmten, wird umbequem, wenn die Zahl der Coefficienten etwas grösser wird. In diesem Falle ist ein Verfahren vorzuziehen, welches wir in dem Nachstehenden zeigen wollen.

I. Fall. Die Wurzeln r, s . . . w der 5
sind alle von einander verschieden.

II. Fall. Die Wurzeln sind nicht
schieden.

In jedem dieser beiden Fälle).
scheiden, ob die Wurzeln alle gt
hiernach 4 verschiedene Fäl
jeden dieser Fälle an einen

Aufgabe 1. Man s

Partialbrüche zerleger

Auflösung. W

halten dadurch di ...nnt. Man kann denselben da-

1) x ...eichung 15 setzt

Zerlegen ...so nach D. R. Capitel VIII.

factoren 7, ?,

mit positiv ... $= F'(7)$.

ein, so s ... diesen Werth von $\varphi(7)$ in Gleichung 19 ein, so erhal-

genüge ... 1)

$F'(7)$.

... ganz ähnlicher Weise ergiebt sich

$$B = \frac{f(-3}{F'(-3}$$

$$C = \frac{f(2)}{F'(2)}.$$

Setzen wir in die Gleichungen 21 bis 23 die Werthe für f(7), F'(7), f(—3) etc. ein, so folgt

$$24)\ A = \frac{f(7)}{F'(7)} = \frac{15 \cdot 7^2 - 70 \cdot 7 - 95}{3 \cdot 7^2 - 6 \cdot 2 \cdot 7 - 13} = \frac{150}{50} = 3$$

$$25)\ B = \frac{f(-3)}{F'(-3)} = \frac{15 \cdot 9 - 70\,(-3) - 95}{3 \cdot 9 - 6 \cdot 2 \cdot (-3) - 13} = \frac{250}{50} = 5$$

$$26)\ C = \frac{f(2)}{F'(2)} = \frac{15 \cdot 4 - 70 \cdot 2 - 95}{3 \cdot 4 - 6 \cdot 2 \cdot 2 - 13} = \frac{-175}{-25} = 7.$$

2. Das Verfahren ist im Wesentlichen dasselbe, wenn einzelne Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$ complexe Grössen sind.

Man soll die Function $\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65}$

...en.

...n wieder den Nenner gleich Null und

...ng

...x — 65.

... so erhalten wir die Wurzeln

...$2\sqrt{-1}$.

...egebenen Bruches

41

A, B und C zu ermitteln, bringen

Seite unserer Gleichung auf

).(x+3).(x−2) und

...leichung

$- (3 + 2\sqrt{-1})\}.\{x-(3-2\sqrt{-1})\}.$

...actoren sind complexe Grössen. Wollen ...n Grössen ganz vermeiden, so müssen wir ...omplexen Factoren zu einem einzigen Factor zu...uziehen. Dadurch erhalten wir

$$x^3 - 11x^2 + 43x - 65 = (x - 5) . (x^2 - 6x + 13).$$

Wir können also den Bruch $\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65}$ als die Summe zweier Brüche ansehen, deren Nenner resp. $x - 5$ und $x^2 - 6x + 13$ sind. Da wir die Zähler derselben noch nicht kennen, so setzen wir sie vor der Hand resp. gleich A und $B + Cx$. Hierdurch erhalten wir die Gleichung

5) $$\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B + Cx}{x^2 - 6x + 13},$$

also auch

6) $$\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{A(x^2 - 6x + 13) + (x - 5).(B + Cx)}{(x - 5).(x^2 - 6x + 13)}$$

7) $$\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{x^2(A+C) + x(-6A-5C+B) + (13A-5B)}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65}.$$

Aus Gleichung 7 folgt

8) $$13x^2 - 68x + 95 = x^2(A+C) + x(-6A-5C+B) + (13A-5B),$$

also

9) $$A + C \quad = 13$$

Es sei wieder $\frac{fx}{Fx} = \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42}$; dann ist nach Gleichung 5

$$14)\ \frac{fx}{Fx} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2}.$$

Um nun den Werth von A zu bestimmen, setzen wir

$$15)\ \frac{fx}{Fx} = \frac{A}{x-7} + \frac{\varphi x}{\psi x}\left(\text{wo } \frac{\varphi x}{\psi x} = \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2} = \frac{B(x-2)+C(x+3)}{(x+3).(x-2)}\right).$$

und $\varphi x = B(x-2) + C(x+3)$; $\psi x = (x+3).(x-2)$. Hieraus folgt

$$16)\ \frac{fx}{Fx} = \frac{A.\psi x + (x-7)\varphi x}{(x-7).\psi x} = \frac{A\psi x + (x-7)\varphi x}{Fx}.$$

Hieraus folgt ferner

$$17)\ fx = A\psi x + (x-7)\varphi x,$$

$$18)\ f(7) = A.\psi(7),$$

$$19)\ A = \frac{f(7)}{\psi(7)}.$$

Der Werth von $\psi(7)$ ist noch unbekannt. Man kann denselben dadurch bestimmen, dass man nach Gleichung 15 setzt

$$\psi x = \frac{Fx}{x-7}, \text{ also nach D. R. Capitel VIII.}$$

$$20)\ \psi(7) = \frac{0}{0} = \frac{F'(7)}{1} = F'(7).$$

Schalten wir diesen Werth von $\psi(7)$ in Gleichung 19 ein, so erhalten wir

$$21)\ A = \frac{f(7)}{F'(7)}.$$

In ganz ähnlicher Weise ergiebt sich

$$22)\ B = \frac{f(-3}{F'(-3}$$

$$23)\ C = \frac{f(2)}{F'(2)}.$$

Setzen wir in die Gleichungen 21 bis 23 die Werthe für $f(7)$, $F'(7)$, $f(-3)$ etc. ein, so folgt

$$24)\ A = \frac{f(7)}{F'(7)} = \frac{15.7^2 - 70.7 - 95}{3.7^2 - 6.2.7 - 13} = \frac{150}{50} = 3$$

$$25)\ B = \frac{f(-3)}{F'(-3)} = \frac{15.9 - 70(-3) - 95}{3.9 - 6.2.(-3) - 13} = \frac{250}{50} = 5$$

$$26)\ C = \frac{f(2)}{F'(2)} = \frac{15.4 - 70.2 - 95}{3.4 - 6.2.2 - 13} = \frac{-175}{-25} = 7.$$

2. Das Verfahren ist im Wesentlichen dasselbe, wenn einzelne Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$ complexe Grössen sind.

Aufgabe 2. Man soll die Function $\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Wir setzen wieder den Nenner gleich Null und erhalten dadurch die Gleichung

1) $0 = x^3 - 11x^2 + 43x - 65.$

Lösen wir diese Gleichung auf, so erhalten wir die Wurzeln

2) $x = 5,\ x = 3 + 2\sqrt{-1},\ x = 3 - 2\sqrt{-1}.$

Demnach ist der Nenner unseres gegebenen Bruches

3) $x^3 - 11x^2 + 43x - 65$

$$= (x - 5 \,.\, \{x - (3 + 2\sqrt{-1})\} \,.\, \{x - (3 - 2\sqrt{-1})\}.$$

Die beiden letzten Factoren sind complexe Grössen. Wollen wir die imaginären Grössen ganz vermeiden, so müssen wir die beiden complexen Factoren zu einem einzigen Factor zusammenzuziehen. Dadurch erhalten wir

4) $x^3 - 11x^2 + 43x - 65 = (x - 5) \,.\, (x^2 - 6x + 13).$

Wir können also den Bruch $\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65}$ als die Summe zweier Brüche ansehen, deren Nenner resp. $x - 5$ und $x^2 - 6x + 13$ sind. Da wir die Zähler derselben noch nicht kennen, so setzen wir sie vor der Hand resp. gleich A und $B + Cx$. Hierdurch erhalten wir die Gleichung

5) $\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B + Cx}{x^2 - 6x + 13},$

also auch

6) $\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{A(x^2 - 6x + 13) + (x - 5) \,.\, (B + Cx)}{(x - 5) \,.\, (x^2 - 6x + 13)}$

7) $\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{x^2(A + C) + x(-6A - 5C + B) + (13A - 5B)}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65}.$

Aus Gleichung 7 folgt

8) $13x^2 - 68x + 95 = x^2(A + C) + x(-6A - 5C + B) + (13A - 5B),$

also

9) $A + C \quad = 13$

10) $-6A - 5C + B = -68.$

11) $13A - 5B = 95.$

Lösen wir diese Gleichungen, so ergiebt sich

12) $A = 10, \ B = 7, \ C = 3.$

Setzen wir diese Werthe von A, B und C in Gleichung 5 ein, so ergiebt sich

13) $$\frac{13x^2 - 68x + 95}{x^3 - 11x^2 + 43x - 65} = \frac{13x^2 - 68x + 95}{(x-5)(x^2-6x+13)} = \frac{10}{x-5} + \frac{7+3x}{x^2-6x+13}.$$

Bemerkung.

Hätten wir unsere Aufgabe nach der Methode gelöst, welche in Bemerkung 1 zu Aufgabe 1 gezeigt ist, so hätten wir zunächst drei Partialbrüche erhalten, deren Nenner resp. $x-5$, $x-(3+2\sqrt{-1})$ und $x-(3-2\sqrt{-1})$ gewesen wären. Hätten wir die beiden letzten Brüche dann wieder zu einem Bruch vereinigt, dessen Nenner $\{x-(3+2\sqrt{-1})\} \cdot \{x-(3-2\sqrt{-1})\} = x^2 - 6x + 13$ ist, so wären wir zu dem Resultate gelangt, welches in Gleichung 13 vorliegt.

Aufgabe 3. Man soll den Bruch $\frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7) \cdot (x-5)^3}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Obgleich man den Nenner

1) $(x-7) \cdot (x-5)^3 = (x-7) \cdot (x-5) \cdot (x-5) \cdot (x-5)$

setzen kann, so leuchtet doch ein, dass man unsern Bruch $\frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7) \cdot (x-5)^3}$ nicht als eine Summe von Brüchen auffassen darf, deren Nenner $x-7$, $x-5$, $x-5$, $x-5$ sind. Man erkennt vielmehr, dass unser Bruch gleich der Summe von 4 Brüchen ist, deren Nenner resp. gleich $x-7$, $x-5$, $(x-5)^2$ und $(x-5)^3$ sind. Bezeichnen wir die Zähler dieser Brüche durch A, B, C und D, so folgt

2) $$\frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7) \cdot (x-5)^3} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x-5} + \frac{C}{(x-5)^2} + \frac{D}{(x-5)^3}$$

3) $$\frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7) \cdot (x-5)^3}$$
$$= \frac{A(x-5^3 + B(x-7) \cdot (x-5)^2 + C(x-7) \cdot (x-5) + D(x-7)}{(x-7) \cdot (x-5)^3}.$$

Hieraus folgt

$$4)\ \frac{4x^3-63x^2+338x-619}{(x-7).(x-5)^3}$$

$$=\frac{x^3(A+B)+x^2(-15A-17B+C)+x(75A+95B-12C+D)+(-125A-175B+35C-7D)}{(x-7).(x-5)^3}.$$

Da die Nenner gleich sind, **so sind auch die Zähler gleich, und zwar sind sie gleich für jeden Werth von x.** Wir erhalten hiernach folgende 4 Bestimmungsgleichungen für A, B, C und D, nämlich

$$5)\ A+B=4$$

$$6)\ -15A-17B+C=-63$$

$$7)\ 75A+95B-12C+D=338$$

$$8)\ -125A-175B+35C-7D=-619.$$

Lösen wir diese Gleichungen für A, B, C und D auf, so ergiebt sich

$$9)\ A=4,\ B=0,\ C=-3,\ D=2.$$

Setzen wir diese Werthe von A, B, C und D in Gleichung 2 ein, so erhalten wir

$$10)\ \frac{4x^3-63x^2+338x-619}{(x-7).(x-5)^3}=\frac{4}{x-7}-\frac{3}{(x-5)^2}+\frac{2}{(x-5)^3}.$$

Aufgabe 4. Man soll den Bruch $\frac{x+1}{(x^2+1)^2.(x-1)}$ in Partialbrüche zerlegen.

Auflösung. Wir setzen

$$1)\ \frac{x+1}{(x^2+1)^2.(x-1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{E}{x-1}.$$

Hieraus folgt

$$2)\ \frac{x+1}{(x^2+1)^2.(x-1)}$$

$$=\frac{(Ax+B).(x-1)+(Cx+D).(x^2+1).(x-1)+E(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2.(x-1)}$$

$$3)\ \frac{x+1}{(x^2+1)^2.(x-1)}$$

$$= \frac{x^4(E+C)+x^3(D-C)+x^2(2E+C-D+A)+x(D-C+B-A)+(E-B-D)}{(x^2+1)^2.(x-1)}$$

Hieraus ergiebt sich die Gleichung

$$4)\ x+1=x^4(E+C)+x^3(D-C)+x^2(2E+C-D+A)+x(D-C+B-A)+(E-B-D).$$

Aus dieser Gleichung folgen die Bestimmungsgleichungen für A, B, C, D und E, nämlich

$$5)\ E+C=0$$

$$6)\ D-C=0$$

$$7)\ 2E+C-D+A=0$$

$$8)\ D-C+B-A=1$$

$$9)\ E-B-D=1.$$

Lösen wir diese Gleichungen auf, so erhalten wir

$$10)\ A=-1;\ B=0;\ C=-\tfrac{1}{2};\ D=-\tfrac{1}{2};\ E=\tfrac{1}{2}.$$

Schalten wir diese Werthe von A, B, C, D und E in Gleichung 1 ein, so folgt

$$11)\ \frac{x+1}{(x^2+1)^2.(x-1)} = -\frac{x}{(x^2+1)^2} - \tfrac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{x-1}.$$

1. Welcher Unterschied findet zwischen den Aufgaben 3 und 4 Statt?

2. Man wird erkennen, dass die Zerlegung eines Bruches in Partial-Brüche davon abhängt, ob man die Wurzeln der Gleichung — welche entsteht, wenn man den Nenner gleich Null setzt — ermitteln kann.

§. 21.

Integration der Functionen $\frac{A}{x-a}dx$ und $\frac{A}{(x-a)^n}dx$.

Die Integration dieser beiden Functionen ist schon im vorigen Capitel abgemacht; setzen wir nämlich $x-a=u$, so erhalten wir nach Formel 9 und 6 Seite 6 und 5 ohne Weiteres

$$1)\ \int\frac{A}{x-a}dx = A\,l\,(x-a)+C$$

$$2)\ \int\frac{A}{(x-a)^m}dx = A\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C.$$

§. 22.

Integration der Functionen $\frac{dx}{x^2 - a^2}$ und $\frac{dx}{x^2 + a^2}$.

I. Integration von $\frac{dx}{x^2 - a^2}$.

Der Nenner des Bruches $\frac{1}{x^2 - a^2}$ lässt sich in die Factoren $x + a$ und $x - a$ zerlegen. Setzen wir demnach

$$1)\quad \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x + a} + \frac{B}{x - a},$$ so folgt weiter

$$2)\quad \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A(x - a) + B(x + a)}{x^2 - a^2}$$

$$3)\quad 1 = x(A + B) + a(B - A).$$

Aus Gleichung 3 ergeben sich die beiden Bestimmungsgleichungen für A und B, nämlich

$$4)\quad A + B = 0$$

$$5)\quad a(B - A) = 1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$6)\quad A = -\frac{1}{2a}$$

$$7)\quad B = \frac{1}{2a}.$$

Setzen wir nach diesen beiden Gleichungen die Werthe von A und B in Gleichung 1 ein, so folgt

$$8)\quad \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left\{-\frac{1}{x + a} + \frac{1}{x - a}\right\}.$$

Hieraus folgt weiter

$$9)\quad \int\frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left\{-\int\frac{dx}{x + a} + \int\frac{dx}{x - a}\right\}$$

$$10)\quad \int\frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left\{-l(x + a) + l(x - a)\right\} + C.$$

$$11)\quad \int\frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\, l\,\frac{x - a}{x + a} + C$$ {Diese Formel ist dem Gedächtniss einzuprägen, weil sie sehr oft Anwendung findet.}

II. Integration von $\frac{dx}{x^2+a^2}$.

Dieses Integral ist schon Seite 17 behandelt. Wir fanden dort

$$12)\ \int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C.$$

§. 23.

Folgende Differential-Functionen sollen integrirt werden:

$$\text{I. }\int\frac{x^2-8x+7}{x-7}\,dx.$$

Auflösung: Da der Grad des Nenners kleiner ist als der des Zählers, so führe man die Division aus und erhält dadurch:

$$\begin{array}{l} x^2-8x+7 \mid x-7=x-1 \\ +x^2-7x \\ -\quad + \\ \hline \qquad -x+7 \\ \qquad -x+7 \\ \qquad +\quad - \\ \hline \end{array}$$

Wir können also setzen

$$\int\frac{x^2-8x+7}{x-7}\,dx=\int(x-1)dx=\int x\,dx-\int dx=\frac{x^2}{2}-x=\frac{x(x-2)}{2}$$

$$\text{II. }\int\frac{x^3-5x^2-16x+140}{x^2-12x+35}\,dx.$$

Auflösung: Dividiren wir den Zähler durch den Nenner, so ergiebt sich:

$$\begin{array}{l} x^3-5x^2-16x+140 : x^2-12x+35=x+7 \\ x^3-12x^2+35x \\ -\quad +\quad - \\ \hline \qquad 7x^2-51x+140 \\ \qquad 7x^2-84x+245 \\ \qquad -\quad +\quad - \\ \hline \qquad \text{Rest: } 33x-105, \end{array}$$

folglich ist

1) $\int \frac{x^3 - 5x^2 - 16x + 140}{x^2 - 12x + 35} dx = \int \left(x + 7 + \frac{33x - 105}{x^2 - 12x + 35}\right) dx =$

$\int x\,dx + \int 7dx + \int \frac{33x - 105}{x^2 - 12x + 35} = \frac{x^2}{2} + 7x + \int \frac{33x - 105}{x^2 - 12x + 35}.$

Um das letzte Integral aufzulösen, setzen wir $x^2 - 12x + 35 = 0$. Durch Auflösung dieser Gleichung erhalten wir $x_1 = 7$; $x_{11} = 5$, woraus folgt, dass $x^2 - 12x + 35 = (x - 7)(x - 5)$. Es ist daher

$\int \frac{33x - 105}{x^2 - 12x + 35} dx = \int \frac{33x - 105}{(x - 5)(x - 7)} dx.$ Setzt man nun

$$\alpha) \quad \frac{33x - 105}{(x-5)(x-7)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-7} = \frac{A(x-7)+B(x-5)}{(x-5)(x-7)} \text{ oder}$$

$$\frac{33x - 105}{(x-5)(x-7)} = \frac{x(A + B) - (7A + 5B)}{(x - 5)(x - 7)}$$

und vergleicht die beiden Zähler mit einander, so folgt

$$A + B = 33$$
$$7A + 5B = 105$$

und durch Auflösung dieser Gleichungen

$$A = -30; \quad B = 63.$$

Setzt man nun diese Werthe für A und B in Gleichung α) ein, so ergiebt sich

$$\beta) \quad \frac{33x - 105}{(x - 5)(x - 7)} = \frac{-30}{x - 5} + \frac{63}{x - 7} \text{ und folglich ist}$$

$$\int \frac{33x - 105}{(x-5)(x-7)} dx = \int \left(\frac{-30}{x-5} + \frac{63}{x-7}\right) dx = -30 \int \frac{dx}{x-5} + 63 \int \frac{dx}{x-7}$$
$$= -30 \,.\, l \,.\, (x - 5) + 63\, l\, (x - 7) + C.$$

Infolge dessen ist

2) $\int \frac{x^3 - 5x^2 - 16x + 140}{x^2 - 12x + 35} = \frac{x^2}{2} + 7x + \int \frac{33x - 105}{x^2 - 12x + 35} dx$

$= \frac{x^2}{2} + 7x - 30 l(x-5) + 63 l(x-7) + C = l(x-7)^{63} - l(x-5)^{30}$

$+ \frac{x(x + 14)}{2} + C = l \frac{(x - 7)^{63}}{(x - 5)^{30}} + \frac{x(x + 14)}{2} + C.$

$$\text{III.} \int \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42}\, dx.$$

Auflösung. Der Factor von dx ist eine echt gebrochene Function. Wir müssen demnach damit beginnen, den Bruch $\frac{15x^3 - 70x - 95}{x^2 - 6x^2 - 13x + 42}$ in Partialbrüche zu zerlegen. Dies ist indessen schon §. 20 Aufgabe 1 (Seite 35) geschehen. Wir fanden dort

$$1) \quad \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} = \frac{3}{x-7} + \frac{5}{x+3} + \frac{7}{x-2}$$

Demnach ist

$$2) \int \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42}\, dx = 3\int \frac{dx}{x-7} + 5\int \frac{dx}{x+3} + 7\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= 3\,l(x-7) + 5\,l(x+3) + 7\,l(x-2) + C$$

$$= l\{(x-7)^3 . (x+3)^5 . (x-2)^7\} + C.$$

$$\text{IV.} \int \frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7)(x-5)^3}\, dx.$$

Auflösung. Nach §. 20 Aufgabe 3 (Seite 44) ist

$$1) \quad \frac{4x^3 - 63x^3 + 338x - 619}{(x-7) . (x-5)^3} = \frac{4}{x-7} - \frac{3}{(x-5)^2} + \frac{2}{(x-5)^3}$$

Demnach ist

$$2) \int \frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7) . (x-5)^3}\, dx = \int \frac{4}{x-7}\, dx - \int \frac{3}{(x-5)^2}\, dx + \int \frac{2}{(x-5)^3}\, dx.$$

Nun ist nach Gleichung 6 und 9 Seite 5 und 6

$$3) \int \frac{4}{x-7}\, dx = 4 . \int \frac{dx}{x-7} = 4\,l(x-7) + C'$$

$$4) \int \frac{3}{(x-5)^2}\, dx = 3 . \int \frac{dx}{(x-5)^2} = 3 . \frac{-1}{x-5} = -\frac{3}{x-5} + C''$$

$$5) \int \frac{2}{(x-5)^3}\, dx = 2 . \int \frac{dx}{(x-5)^3} = 2 . \frac{-\frac{1}{2}}{(x-5)^2} = -\frac{1}{(x-5)^2} + C'''$$

Setzen wir die Werthe von $\int \frac{4}{x-7}\,dx$, $\int \frac{3}{(x-5)^2}\,dx$ und $\int \frac{2}{(x-5)^3}\,dx$ nach den Gleichungen 3, 4 und 5 in Gleichung 2 ein, und ziehen wir die drei Constanten C′, C″ und C‴ in eine einzige Constante (C) zusammen, so ergiebt sich

$$6) \int \frac{4x^3 - 63x^2 + 338x - 619}{(x-7).(x-5)}\,dx = 4\,l(x-7) + \frac{3}{x-5} - \frac{1}{(x-5)^2} + C.$$

$$\text{V.} \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2.(x-1)}\,dx.$$

Auflösung. Nach §. 20 Aufgabe 4 (Seite 45) ist

$$1) \frac{x+1}{(x^2+1)^2.(x-1)} = -\frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}$$
$$= -\frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}$$

Hiernach ist

$$2) \int \frac{(x+1)^2\,dx}{(x^2+1)^2.(x-1)} = -\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}$$

Ferner ist

$$3) \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + C' \quad \text{nach Gl. 6 Seite 5.}$$

$$4) \int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\,l(x^2+1) + C'' \quad \text{Formel 9 Seite 6.}$$

$$5) \int \frac{dx}{x^2+1} = \text{arc tg}\,x + C''' \quad \text{Formel 15 Seite 6.}$$

$$6) \int \frac{dx}{x-1} = l(x-1) + C'''' \quad \text{Formel 9 Seite 6.}$$

Setzen wir nun für die Integrale auf der rechten Seite

4*

von Gleichung 2 ihre Werthe nach den Gleichungen 3 bis 6, so folgt

$$7)\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2\cdot(x-1)}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4}\,l\,(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\,l\,(x-1) + C.$$

Bemerkung.

Wir empfehlen dem Anfänger, die Lösungen der vorstehenden Aufgaben durch Differentiation zu prüfen.

§. 24.

Integration der Function $\frac{dx}{x^2+px+q}$.

Wir setzen $x^2+px+q = x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q$ oder

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Demnach ist

$$1)\quad \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}.$$

Die Form des Integrals dieser Function hängt besonders von dem Werthe der Grösse $q-\frac{p^2}{4}$ ab. In dieser Beziehung können 3 Fälle eintreten

I. $q-\frac{p^2}{4}$ **ist positiv,**

II. $q-\frac{p^2}{4}$ **ist negativ,**

III. $q-\frac{p^2}{4}$ **ist gleich Null.**

In dem ersten Falle, d. h. in dem Falle, dass $q-\frac{p^2}{4}>0$, **führen wir die Integration zurück auf die Formel**

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C.$$

Zu dem Ende setzen wir

2) $x + \frac{p}{2} = u,\ dx = du$

3) $q - \frac{p^2}{4} = a^2,\ a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$

und erhalten dann nach Gleichung 1

4) $\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C$

Setzen wir in diese Gleichung für u und a ihre Werthe nach den Gleichungen 2 und 3, so erhalten wir

5) $\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

In dem zweiten Falle, d. h. wenn $q - \frac{p^2}{4}$ negativ ist, **führen wir die Integration von** $\frac{dx}{x^2 + px + q}$ **zurück auf die Formel** $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} l \frac{x - a}{x + a}$. Zu dem Ende setzen wir

6) $x + \frac{p}{2} = u,\ dx = du$

7) $\frac{p^2}{4} - q = a^2,\ a = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Hierdurch erhalten wir

8) $\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}$

$$= \int \frac{du}{u^2 - a^2}$$

also

$$9) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{2a} l \frac{u - a}{u + a} + C.$$

Setzen wir hierin für u und a ihre Werthe nach den Gleichungen 6 und 7, so folgt

$$10) \int \frac{dx}{x^2 + px + p} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} . l \frac{x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}{x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} . l \frac{2x + p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2x + p + \sqrt{p^2 - 4p}} + C$$

Multipliciren wir in dem Bruche $\frac{2x + p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2x + p - \sqrt{p^2 - 4q}}$ Zähler und Nenner mit $2x + p - \sqrt{p^2 - 4q}$, so erhalten wir

$$11) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} . l \frac{(2x + p - \sqrt{p^2 - 4q})^2}{(2x + p)^2 - (p^2 - 4p)} + C$$

$$12) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} . l \frac{(2x + p^2 - \sqrt{p^2 - 4q})^2}{4x^2 + 4px + 4p} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} . l \frac{\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2}{x^2 + px + q} + C.$$

In dem dritten Falle, d. h. wenn $q - \frac{p^2}{4}$ gleich Null ist, wird

$$13) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Setzen wir hierin $x + \frac{p}{2} = u$, also $dx = du$, so folgt nach Formel 6 Seite 5

$$14) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = -\frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)} + C.$$

Resultat.

I. Wenn $q - \frac{p^2}{4}$ **positiv ist,** so ist

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \text{arc tg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} \qquad + C.$$

II. Wenn $q - \frac{p^2}{4}$ **negativ ist,** so ist

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} \cdot l \frac{\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2}{x^2 + px + q} + C.$$

III. Wenn $q - \frac{p^2}{4}$ **gleich Null ist,** so ist

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + p} = -\frac{1}{x + \frac{p}{2}} + C = -\frac{2}{p + 2x} + C.$$

Bemerkung.

Streng genommen gelten die Resultate I. und II. für jeden Werth von $q - \frac{p^2}{4}$; indessen werden beide Resultate unbestimmt, wenn $q - \frac{p^2}{4} = 0$ ist, ferner giebt das Resultat I. eine imaginäre Form, wenn $q - \frac{p^2}{4} < 0$, und ebenso giebt das Resultat II. eine imaginaire Form, wenn $q - \frac{p^2}{4} > 0$ ist.

§. 25.

Integration der Function $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx.$

Zunächst ist

$$1) \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x + \frac{2B}{A}}{x^2 + px + q}$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p + \frac{2B}{A} - p}{x^2 + px + q} dx$$

$$2)\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+p}dx$$

$$+\frac{A}{2}\int\frac{\frac{2B}{A}-p}{x^2+px+q}.dx$$

Hieraus folgt

$$3)\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}l(x^2+px+q)$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right).\int\frac{dx}{x^2+px+q}$$

Bemerkungen.

1. Das Integral $\int\frac{dx}{x^2+px+q}$ wird nach §. 24 entwickelt.

2. Die Integrale der Functionen $\frac{dx}{(x^2+px+q)^m}$ und $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$ werden in einem andern Zusammenhange vorgeführt werden.

§. 26.

Uebungs-Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll folgende Differential-Functionen integriren.

$\frac{7}{x^2-6x+13}dx$, $\frac{7}{x^2-6x+5}dx$, $\frac{7}{x^2-6x+9}dx$. (vgl. §. 24.)

Auflösung.

$$\text{I. }\int\frac{7}{x^2-6x+13}dx.$$

Durch eine einfache Umformung erhalten wir

$$1)\int\frac{7}{x^2-6x+13}dx=7\int\frac{dx}{(x^2-6x+9)+4}$$

$$=7\int\frac{dx}{(x-3)^2+2^2}$$

Setzen wir hierin $x-3=u$, also $dx=du$, so folgt

$$2)\int\frac{7}{x^2-6x+13}dx=\frac{7}{2}\text{arc tg}\frac{x-3}{2}+C.$$

$$\text{II.} \int \frac{7}{x^2 - 6x + 5}\, dx.$$

Durch eine einfache Umformung erhalten wir hier

$$3) \int \frac{7}{x^2 - 6x + 5}\, dx = \int \frac{dx}{(x^2 - 6x + 9) - 4}$$

$$= \int \frac{dx}{(x-3)^2 - 2^2}$$

Setzen wir hierin $x - 3 = u$, also $dx = du$, so erhalten wir nach §. 22 Gleichung 11

$$4) \int \frac{7}{x^2 - 6x + 5}\, dx = \frac{7}{2.2}\, l\, \frac{(x-3) - 2}{(x-3) + 2} + C.$$

$$5) \int \frac{7}{x^2 - 6x + 5}\, dx = \frac{7}{4}\, l\, \frac{x-5}{x-1} + C$$

$$= l \sqrt[4]{\left(\frac{x-5}{x-1}\right)^7} + C.$$

$$\text{III.} \int \frac{7}{x^2 - 6x + 9}\, dx.$$

Beachten wir, dass der Nenner ein vollständiges Quadrat ist, so ergiebt sich

$$6) \int \frac{7}{x^2 - 6x + 9}\, dx = 7 \int \frac{dx}{(x-3)^2}$$

Setzen wir hierin $x - 3 = u$, also $dx = du$, so folgt

$$7) \int \frac{7}{x^2 - 6x + 9}\, dx = 7 \int \frac{du}{u^2} + C = -\frac{7}{u} + C.$$

Schalten wir hierin für u seinen Werth „$x - 3$“ ein, so ergiebt sich

$$8) \int \frac{7}{x^2 - 6x + 9}\, dx = -\frac{7}{x-3} + C.$$

Wodurch unterscheiden sich die Lösungen der Integrale I, II und III?

Aufgabe 2. Man soll folgende Differential-Functionen integriren.

$$\frac{22x - 59}{x^2 - 6x + 13}\, dx, \quad \frac{2x + 43}{x^2 + x - 12}\, dx, \quad \frac{22x - 59}{x^2 - 6x + 9}\, dx.$$

Auflösung.

$$\text{I.} \int \frac{22x - 59}{x^2 - 6x + 13} dx.$$

Eine aufmerksame Betrachtung des vorstehenden Integrals lehrt, dass wir dasselbe in zwei Integrale zerlegen können, von denen das eine auf die Form $\int \frac{du}{u}$ und das andere auf die Form $\int \frac{du}{u^2 + a^2}$ gebracht werden kann. Wir setzen deshalb

$$1) \int \frac{22x - 59}{x^2 - 6x + 13} dx = \int \frac{(22x - 66) + 7}{x^2 - 6x + 13} dx$$

$$2) \int \frac{22x - 59}{x^2 - 6x + 13} dx = \int \frac{22x - 66}{x^2 - 6x + 13} dx + \int \frac{7\,dx}{(x^2 - 6x + 9) + 4}$$

$$3) \int \frac{22x - 69}{x^2 - 6x + 13} dx = 11 \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 13} dx + 7 \int \frac{dx}{(x - 3)^2 + 2^2}$$

Setzen wir nun $x^2 - 6x + 13 = u$, also $(2x - 6)\,dx = du$, so erhalten wir

$$4) \int \frac{(2x - 6)\,dx}{x^2 - 6x + 13} = lu + C = l\,(x^2 - 6x + 13) + C.$$

Eerner ist nach Seite 48 Gl. 12

$$5) \int \frac{dx}{(x - 3)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \text{ arc tg} \frac{x - 3}{2} + C.$$

Setzen wir die Werthe von $\int \frac{(2x - 6)\,dx}{x^2 - 6x + 13}$ und $\int \frac{dx}{(x - 3)^2 + 2^2}$ nach den Gl. 4 und 5 in Gl. 3 ein, so ergiebt sich

$$6) \int \frac{22x - 59}{x^2 - 6x + 13} dx = 11\, l\,(x^2 - 6x + 13) + \frac{7}{2} \text{ arc tg} \frac{x - 3}{3} + C.$$

Wäre es zweckmässig gewesen, den Bruch $\frac{22x - 59}{x^2 - 62 - 13}$ in Partial-Brüche zu zerlegen, etc.?

$$\text{II.} \int \frac{22x - 59}{x^2 - 6x + 9}\, dx.$$

Weil der Nenner ein vollständiges Quadrat ist, so können wir unser Integral in zwei andere zerlegen, welche sich resp. auf die Form $\int \frac{du}{u}$ und $\int \frac{du}{u^2}$ zurückführen lassen. Wir setzen deshalb

$$7) \int \frac{22x - 59}{x^2 - 6x + 9}\, dx = \int \frac{11\,(2x - 6) + 7}{x^2 - 6x + 6}\, dx$$

$$8) \int \frac{22x - 59}{x^2 - 6x + 9}\, dx = 11 \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 9} \,.\, dx + 7 \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9}.$$

Nun ist

$$9) \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 9}\, dx = l\,(x^2 - 6x + 9) + C.$$

(Vergl. Gleichung 4.)

$$10) \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9} = \int \frac{dx}{(x - 3)^2} = -\frac{1}{x - 3} + C.$$

(Vergl. Gleichung 8 Aufgabe 1.)

Setzen wir nach den Gleichungen 9 und 10 die Werthe von $\int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 9}\, dx$ und $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9}$ in Gleichung 8 ein, so folgt

$$11) \int \frac{22x - 59}{x^2 - 6x + 9}\, dx = 11\, l\,(x^2 - 6x + 9) - \frac{7}{x - 3} + C.$$

§. 27.

Fortsetzung.

Wenn der Nenner einer gebrochenen Function von einem höhern Grade ist, so kann es oft schwierig oder unmöglich werden, dieselbe in Partialbrüche zu zerlegen (vergl. §. 20 Bemerk. 2). In diesem Falle wird man das Verfahren nicht anwenden können, welches uns bei der Lösung der letzten Auf-

gaben zum Ziele führte. Indessen gelingt die Integration dann noch häufig durch zweckmässige Substitutionen oder Umformungen. Einige Beispiele mögen dies erläutern.

Aufgabe 1. Man soll die Function $\frac{dx}{x(1+x^3)}$ integriren.

Auflösung. Man setze

1) $x = \frac{1}{u}$, also $dx = -\frac{du}{u^2}$, so ist

2) $$\int\frac{dx}{x.(1+x^3)} = -\int\frac{u^4}{u^3+1}\cdot\frac{du}{u^2} = -\int\frac{u^2du}{u^3+1}$$
$$= -\frac{1}{3}\,l\,(u^3+1)+C.$$

Setzt man hierin für u seinen Werth nach Gleichung 1, so folgt

3) $$\int\frac{dx}{x.(1+x^3)} = -\frac{1}{3}\,l\left(\frac{1}{x^3}+1\right)+C = -\frac{1}{3}\,l\,\frac{1+x^3}{x^3}+C.$$
$$= \frac{1}{3}\,l\,\frac{x^3}{1+x^3}+C = l\,\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}+C.$$

Bemerkung.

Man kann auch auf folgendem Wege zum Ziele gelangen. Man setze

$$\frac{1}{x.(1+x^3)} = \frac{1+x^3-x^3}{x(1+x^3)} = \frac{1+x^3}{x.(1+x^3)} - \frac{x^3}{x(1+x^3)},$$ dies giebt

$$\frac{1}{x(1+x^3)} = \frac{1}{x} - \frac{x^2}{1+x^3}$$

Hieraus folgt

$$\int\frac{dx}{x(1+x^3)} = \int\frac{dx}{x} - \int\frac{x^2\,dx}{1+x^3}$$
$$= l\,x - \frac{1}{3}\,l\,(1+x^3)+C = lx - l\,\sqrt[3]{1+x^3}+C.$$
$$= l\,\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}+C.$$

Aufgabe 2. Man soll $\int\frac{dx}{x.(1+x^4)}$ entwickeln.

Auflösung. Man setze

1) $x = \frac{1}{u}$, also $dx = -\frac{du}{u^2}$, so ist

2) $\int \frac{dx}{x.(1+x^4)} = -\int \frac{u^5}{1+u^4} \cdot \frac{du}{u^2} = -\int \frac{u^3\,du}{1+u^4}$

$= -\frac{1}{4}\, l\,(1+u^4) + C.$

Setzt man hierin für u seinen Werth nach Gleichung 1, so folgt

3) $\int \frac{dx}{x.(1+x^4)} = -\frac{1}{4}\, l\left(1+\frac{1}{x^4}\right) + C$

$= -l\sqrt[4]{\frac{1+x^4}{x^4}} + C$

$= l\,\frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}} + C.$

Bemerkung.

Setzt man $\frac{1}{x.(1+x^4} = \frac{(1+x^4)-x^4}{x.(1+x^4)} = \frac{1}{x} - \frac{x^3}{1+x^4}$, so ergiebt sich

$\int \frac{dx}{x.(1+x^4)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^3\,dx}{1+x^4}$

$= lx - \frac{1}{4}\, l\,(1+x^4) + C.$

$= lx - l\sqrt[4]{1+x^4} + C = l\,\frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}} + C.$

Aufgabe 3. Man soll die Function $\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ integriren.

Auflösung. Um die Integration einzuleiten setzen wir

1) $\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$

Hieraus folgt

2) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}$

Nun ist weiter nach Gleichung 15 Seite 6

$$3)\int\frac{dx}{x^2+1}=\text{arc tg}\,x+C.$$

Ferner ist nach §. 13 Seite 25 ff.

$$4)\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}=\int\underbrace{\frac{x}{2}\cdot\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}}_{u\;.\;dv}$$

$$=\underbrace{\frac{x}{2}\cdot\left(-\frac{1}{(x^2-1)}\right)}_{u\;.\;v}-\int\underbrace{\frac{-1}{(x^2+1)}\cdot\frac{dx}{2}}_{v\;.\;du}$$

$$5)\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,x+C.$$

Setzen wir die Werthe von $\int\frac{dx}{x^2+1}$ und $\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}$ nach den Gleichungen 3 und 5 in Gleichung 2 ein, so folgt

$$6)\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\text{arc tg}\,x+\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,x+C.$$

$$=\frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,x+\frac{x}{2(x^2+1)}+C.$$

Prüfung durch Differentiation.

III. Capitel.

Integration der irrationalen algebraischen Differential-Functionen.

§. 28.

Allgemeine Bemerkungen.

In den vorigen Paragraphen (vergl. z. B. §. 6 Aufgabe 3 bis 6 §. 9 Aufgabe 20) haben wir schon einige irrationale Differential-Functionen integrirt, und zwar solche, deren Integrale wir mit leichter Mühe auf die Form $\int u^n du$ oder $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, d. i. auf die Fundamentalformen Nr. 6 und 14 Seite 5 und 6 zurückführen konnten.

In Betreff der übrigen irrationalen Differential-Functionen ist zu bemerken, das verhältnissmässig nur eine sehr geringe Anzahl derselben integrirt werden kann. Das Verfahren besteht natürlich darin, dass man die gegebenen Differential-Functionen auf Formen zurückführt, von denen man weiss, dass sie integrabel sind. In manchen Fällen gelingt dies dadurch, dass man die gegebenen irrationalen Functionen in rationale verwandelt. —

Wir werden in dem Folgenden nur die einfachsten Fälle besprechen.

§. 29.

Integration der algebraischen Differential-Functionen von der Form

$$f\left\{x, \left(\frac{a+bx}{A+Bx}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a+bx}{A+Bx}\right)^{\frac{p}{q}} \ldots \right\} dx.$$

Nehmen wir an, dass die vorstehende Function eine algebraische Function ist, **welche blos dadurch irrational wird,** dass die Exponenten der Potenzen von $\frac{a+bx}{A+Bx}$ $\left(\text{d. i. } \frac{m}{n}, \frac{p}{q} \text{ etc.}\right)$ gebrochene Zahlen sind, so kann man die Function unter allen Umständen dadurch in eine rationale Function verwandeln, dass man setzt $\frac{a+bx}{A+Bx} = u^k$, **wo k eine Zahl ist, in welcher sämmtliche Nenner der Brüche $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}$ etc. als Factoren enthalten sind.**

Aufgabe 1. Man soll die Function $\left(\frac{a+bx}{A+Bx}\right)^{\frac{m}{n}} . dx$ in eine rationale Function verwandeln.

Auflösung. Setzen wir

1) $\frac{a+bx}{A+Bx} = u^n$, so ist

2) $a + bx = Au^n + Bx\,u^n$

3) $bx - Bx\,u^n = Au^n - a$

4) $x(b - Bu^n) = Au^n - a$

5) $x = \frac{Au^n - a}{b - Bu^n}$

Um noch den Werth von dx durch u auszudrücken, können wir ausgehen von Gleichung 5 oder von Gleichung 2. Wir

wollen von Gleichung 2 ausgehen, und erhalten demzufolge nach D. R. Capitel IX

$$6)\ b\,.\,dx = A\,.\,n\,u^{n-1}\,du + Bx\,.\,^{n-1}\,du + Bu^n\,dx$$

$$7)\ b\,dx - Bu^n\,dx = n\,Au^{n-1}\,du + n\,Bx\,u^{n-1}\,du$$

$$8)\ (b - Bu^n)\,dx = n\,(A + Bx)\,u^{n-1}\,du$$

$$9)\ dx = n\,.\,\frac{A + Bx}{b - Bu^n}\,u^{n-1}\,du$$

Setzen wir hierin den Werth von x nach Gleichung 5, so folgt

$$10)\ dx = n\,\frac{A + B\,\frac{Au^n - a}{b - Bu^n}}{b - Bu^n}\,.\,u^{n-1}\,du$$

$$dx = n\,.\,\frac{Ab - Ba}{(b - Bu^n)^2}\,u^{n-1}\,du$$

Aus den Gleichungen 1 und 10 ergiebt sich weiter

$$11)\ \left(\frac{a + bx}{A + Bx}\right)^{\frac{m}{n}} dx = (u^n)^{\frac{m}{n}}\,.\,n\,\frac{Ab - Ba}{(b - Bu^n)^2}\,u^{n-1}\,du$$

$$12)\ \left(\frac{a + bx}{A + Bx}\right)^{\frac{m}{n}} dx = n\,.\,\frac{Ab - Ba}{(b - Bu^n)^2}\,u^{m+n-1}\,du.$$

Bemerkung.

Die Integration der irrationalen Function $\sqrt[n]{\left(\frac{a + bx}{A + Bx}\right)^m}\,.\,dx$ $= \left(\frac{a + bx}{A + Bx}\right)^{\frac{m}{n}} dx$ lässt sich demnach auf die Integration der rationalen Function $n\,\frac{Ab - Ba}{(b - Bu^n)^2}\,u^{m+n-1}\,du$ zurückführen.

Aufgabe 2. Man soll die Function $x^p\,.\left(\frac{a + bx}{A + Bx}\right)^{\frac{m}{n}} dx$ in eine rationale Function verwandeln.

Auflösung. Wir setzen wieder

$$1)\ \frac{a + bx}{A + bx} = u^n$$

dann ergiebt sich nach den Gleichungen 1, 5 und 10 der vorigen Aufgabe

$$2)\ \left(\frac{a+bx}{A+Bx}\right)^{\frac{m}{n}} = u^m$$

$$3)\ x^p \qquad = \left(\frac{Au^n - a}{b - Bu^n}\right)^p$$

$$4)\ dx \qquad = n\,\frac{Ab - Ba}{(b - Bu^n)^2}\,u^{n-1}du$$

Setzen wir hiernach die Werthe von $\left(\frac{a+bx}{A+Bx}\right)^{\frac{m}{n}}$, x^p und dx in dem Ausdruck $x^p\left(\frac{a+bx}{A+Bx}\right)^{\frac{m}{n}}dx$ ein, so wird derselbe dadurch rational.

§. 30.

Fortsetzung. Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Function $\frac{\sqrt{x}}{x-1}dx$ integriren.

Auflösung. Wir beginnen damit, die vorliegende Function rational zu machen. Zu dem Ende setzen wir

1) $x = u^2$, also
2) $dx = 2u\,.\,du$.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$3)\ \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx = \frac{u}{u^2-1}\,.\,2u\,du = 2\,\frac{u^2}{u^2-1}\,du$$

$$4)\ \int\frac{\sqrt{x}}{x-1}dx = 2\int\frac{u^2}{u^2-1}\,du.$$

Die Integration der irrationalen Differential-Function $\frac{\sqrt{x}}{x-1}dx$ ist hiernach zurückgeführt auf die Integration der

rationalen Function $\frac{u^2}{u^2-1}du$. Diese Function ist eine unächt gebrochene Function. Wir setzen deshalb nach §. 19 S. 38

5) $\frac{u^2}{u^2-1} = 1 + \frac{1}{u^2-1}$

Hiernach ist

6) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx = 2\int \frac{u^2}{u^2-1}du = 2\left\{\int du + \int \frac{du}{u^2-1}\right\}$.

Nun ist aber $\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{u-1}{u+1} + C$, also ist

7) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx = 2u + l\, \frac{u-1}{u+1} + C.$

Setzen wir in Gleichung 7 für u seinen Werth nach Gleichung 1, so folgt

8) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx = 2\sqrt{x} + l\, \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + C.$

Bemerkungen.

1. Setzen wir in der Function $\frac{1}{x-1}\cdot\left(\frac{a+bx}{A+Bx}\right)^{1/2}$ $a=0$, $b=1$, $A=1$ und $B=0$, so wird $\frac{1}{x-1}\cdot\left(\frac{a+bx}{A+Bx}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

2. Wie findet man $\int \frac{1}{x-1}\sqrt{\frac{a+bx}{A+Bx}}\,dx$?

Aufgabe 2. Man soll die Function $\frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}dx$ **integriren**

Auflösung. Wir setzen

1) $x = u^3$, also $dx = 3u^2\,du$.

Hieraus folgt

2) $\frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}dx = \frac{u}{u^3-1}\cdot 3u^2\,du$

3) $\frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}dx = 3\frac{u^3}{u^3-1}du = 3\left\{1 + \frac{1}{u^3-1}\right\}du.$

Hieraus folgt weiter

$$4) \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}\,dx = 3\int du + 3\int \frac{du}{u^3-1}$$

Wir haben also wieder die Integration der irrationalen Function $\frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}\,dx$ auf die Integration der rationalen Functionen du und $\frac{du}{u^3-1}$ zurückgeführt.

Der Nenner $u^3 - 1$ lässt sich uun in die Factoren $u - 1$ und $u^2 + u + 1$ zerlegen. Wir setzen demnach

$$5) \frac{1}{u^3-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{Bu+C}{u^2+u+1} \text{ also}$$

$$6) \frac{1}{u^3-1} = \frac{A(u^2+u+1)+(Bu+C).(u-1)}{(u-1).(u^2+u+1)}$$

$$7) \frac{1}{u^3-1} = \frac{u^2(A+B)+u(A-B+C)+(A-C)}{u^3-1}$$

$$8) \quad 1 \quad = u^2(A+B)+u(A-B+C)+(A-C).$$

Weil Gleichung 8 für jeden Werth von u gilt, so ergiebt sich aus dieser Gleichung nach D. R. Hülfssätze aus der algebraischen Analysis Nr. 9

$$9) \; A+B = 0$$

$$10) \; A-B+C = 0$$

$$11) \; A-C = 1.$$

Löst man diese Gleichungen für A, B und C auf, so folgt

$$12) \; A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = -\frac{2}{3}.$$

Setzen wir nach Gleichung 12 die Werthe von A, B und C in Gleichung 5 ein, so folgt

$$13) \frac{1}{u^3-1} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{u-1} - \frac{u+2}{u^2+u+1}\right\}$$

$$14) \int \frac{du}{u^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{3}\int \frac{u+2}{u^2+u+1}\,du.$$

Da nun $\left(u+\frac{1}{2}\right)du$ gleich dem halben Differential des Nenners u^2+u+1 ist, so schreiben wir statt der Gleichung 14

$$15)\int\frac{du}{u^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u-1}-\frac{1}{3}\int\frac{\left(u+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}{u^2+u+1}du$$

$$=\frac{1}{3}l(u-1)-\frac{1}{3}\int\frac{\left(u+\frac{1}{2}\right)}{u^2+u+1}du-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+u+1}$$

$$=\frac{1}{3}l(u-1)-\frac{1}{6}l(u^2+u+1)-\frac{1}{2}\int\frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}l(u-1)-\frac{1}{6}l(u^2+u+1)$$

$$-\frac{1}{2.\sqrt{\frac{3}{4}}}.\operatorname{arc\,tg}\frac{u+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}+C$$

$$=\frac{1}{3}l(u-1)-\frac{1}{6}l(u^2+u+1)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Diesen Werth von $\int\frac{du}{u^3-1}$ schalten wir in Gleichung 4 ein, und erhalten dadurch

$$16)\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}dx=3u+l(u-1)-\tfrac{1}{2}l(u^2+u+1)$$

$$-\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=3u+l\frac{u-1}{\sqrt{u^2+u+1}}-\sqrt{3}.\operatorname{arc\,tg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Nach Gleichung 1 ist $u=\sqrt[3]{x}$ also ist

$$17) \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1} dx = 3 \sqrt[3]{x} + l \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}}$$

$$- \sqrt{3} . \operatorname{arc\,tg} \frac{2 \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Bemerkungen.

1. In Aufgabe 1 wurde die irrationale Function dadurch irrational, dass wir $x = u^2$ setzten. In Aufgabe 2 dagegen wurde die gegebene Differential-Function dadurch rational, dass wir $x = u^3$ setzten.

2. Der aufmerksame Leser wird jetzt leicht folgende Integrale lösen $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx, \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+1} dx.$ — Die Richtigkeit des Resultates lässt sich hinterher durch Differentiation prüfen.

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Function $x\, dx \sqrt{a+x}$ integriren.

Auflösung. Wir setzen

$$1) \quad a + x = u^2, \text{ also } x = u^2 - a, \; dx = 2u\, du$$

dann ist

$$2) \int x\, dx . \sqrt{a+x} = \int (u^2 - a) . 2u\, du . u$$

$$= \int 2\, u^4\, du - \int 2\, a\, u^2\, du$$

$$= \frac{2}{5} u^5 - \frac{2}{3} a\, u^3 + C.$$

Setzen wir hierin für u seinen Werth nach Gleichung 1, so folgt

$$3) \int x\, dx . \sqrt{a+x} = \frac{2}{5} \sqrt{(a+x)^5} - \frac{2}{3} a \sqrt{(a+x)^3} + C.$$

Bemerkung.

Man hätte die Integration auch in folgender Weise ausführen können: Wir setzen

$$4) \; x \sqrt{a+x} = (a + x - a) . \sqrt{a+x} = (a+x)^{3/2} - a\, (a+x)^{1/2}$$

also

$$5)\ \int x\,.\sqrt{a+x}\,.\,dx = \int (a+x)^{3/2}\,dx - a\int (a+x)^{1/2}\,dx$$

Dies giebt nach Formel 6 Seite 5

$$6)\ \int x\,.\sqrt{a+x}\,.\,dx\,. = \frac{2}{5}\sqrt{(a+x)^5} - \frac{2}{3}a\sqrt{(a+x)^3} + C.$$

Aufgabe 4. Man soll die Differential-Function $(a-x)\sqrt[3]{(b-x)^2}\,dx$ integriren.

Auflösung. Wir setzen $(b-x) = u^3$ und verfahren dann in ähnlicher Weise wie bei den vorigen Aufgaben. Dadurch erhalten wir

$$\int (a-x)\sqrt[3]{(b-x)^2}\,.\,dx = -\frac{3\,.\sqrt[3]{(b-x)^8}}{8} - \frac{3(a-b)\,.\sqrt[3]{(b-x)^5}}{5} + C.$$

Bemerkung.

Wir hätten die Integrale auch dadurch einleiten können, dass wir gesetzt hätten

$$\begin{aligned}(a-x)\sqrt[3]{(b-x)^2} &= (a-x)\,.\,(b-x)^{2/3} = (b-x+a-b)\,.\,(b-x)^{2/3}.\\ &= (b-x)\,.\,(b-x)^{2/3} + (a-b)\,.\,(b-x)^{2/3}.\\ &= (b-x)^{5/3} + (a-b)\,.\,(b-x)^{2/3}.\ \text{etc.}\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Man soll die Differential-Function $\frac{dx}{x\,.\sqrt{x+a}}$ integriren.

Auflösung. Unsere Differential-Function wird durch die Anwesenheit des Ausdruckes $\sqrt{x+a}$ irrational. Wir können dieselbe deshalb dadurch rational machen, dass wir setzen

$$x + a = u^2$$

Wenn wir auf dem angedeuteten Wege weiter fortgehen, so erhalten wir nach Gleichung 11 Seite 47

$$\int \frac{dx}{x\,.\sqrt{x+a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,l\,\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}} + C.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\,l\,\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a})^2}{x} + C.$$

Aufgabe 6. Man soll die Differential-Function $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$ **integriren.**

Auflösung. Wir suchen die vorliegende Function in eine rationale Function zu verwandeln. Zu dem Ende setzen wir nach §. 29 Seite 64

$$1)\quad \frac{a+x}{a-x} = u^2, \text{ hieraus folgt weiter}$$

$$2)\quad a+x = u^2(a-x)$$

$$3)\quad x(1+u^2) = a(u^2-1)$$

$$4)\quad x = a\frac{u^2-1}{u^2+1}$$

$$5)\quad dx = \frac{4\,a\,u\,du}{(u^2+1)^2}$$

Aus den Gleichungen 1 und 5 folgt jetzt

$$6)\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = \int\frac{4\,a\,u^2\,du}{(u^2+1)^2} = \int\underbrace{2\,a\,u}_{u}\,.\,\underbrace{\frac{2\,u\,du}{(u^2+1)^2}}_{dv}$$

$$7)\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = \underbrace{2\,a\,u}_{u}\,.\,\underbrace{\left(-\frac{1}{u^2+1}\right)}_{v} - \int\underbrace{-\frac{1}{u^2+1}}_{v}\,.\,\underbrace{2\,a\,du}_{du}$$

$$= -\frac{2\,a\,u}{1+u^2} + \int 2a\frac{du}{1+u^2}$$

$$= -\frac{2\,a\,u}{1+u^2} + 2\,a\,.\,\mathrm{arc\,tg}\,u + C.$$

Nach Gleichung 1 ist nun $u = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$. Setzen wir diesen Werth von u in Gleichung 7 ein, so folgt

$$8)\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,.\,dx = -\frac{2\,a\,.\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}}{1+\frac{a+x}{a-x}} + 2\,a\,.\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

$$= -\frac{2\,a\,.\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,(a-x)}{a-x+a+x} + 2a\,.\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

$$9)\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,.dx = -\frac{2a\sqrt{a^2-x^2}}{2a} + 2a\,.\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

$$= -\sqrt{a^2-x^2} + 2a\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

$$= 2a\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Bemerkungen.

1. Man kann das vorstehende Integral auch in anderer Weise lösen. Wir setzen zu dem Ende

$$10)\ \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \sqrt{\frac{(a+x)^2}{(a-x).(a+x)}} = \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Hieraus folgt

$$11)\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = \int\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Wir erhalten also nach Auflösung III und IV Seite 20 und 21

$$12)\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = a\,\text{arc sin}\,\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

2. Die Ausdrücke, welche wir in den Gleichungen 8 und 11 für $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$ erhalten haben, weichen in der Form von einander ab. Man kann sich indessen leicht überzeugen, dass beide Gleichungen richtig sind.

§. 31.

Rationalisation der Functionen von der Form $f(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C})\,.\,dx$.

D. h. derjenigen Functionen, in denen keine andere irrationale Grösse vorkömmt, als die Grösse $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$.

Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

I. A ist positiv
II. C ist positiv

(Der Fall, dass A und B beide positiv sind, kann nach Belieben unter den Fall I und II untergebracht werden.)

III. A und C sind beide negativ.

Wenn A positiv ist, so setze man

$$1)\ \sqrt{Ax^2+Bx+C} = u + x\sqrt{A}$$

Quadrirt man dann die beiden Seiten dieser Gleichung, so folgt

2) $Ax^2 + Bx + C = u^2 + 2ux\sqrt{A} + Ax^2$

3) $\qquad Bx + C = u^2 + 2ux.\sqrt{A}$

4) $Bx - 2ux\sqrt{A} = u^2 - C$

5) $x(B - 2u\sqrt{A}) = u^2 - C$

6) $x \qquad = \frac{u^2 - B}{B - 2u\sqrt{A}}$

Um den Werth von dx zu finden, differentiiren wir Gleichung 6. Wir erhalten dadurch

7) $dx = \frac{(B - 2u\sqrt{A}).2u\,du + 2(u^2 - C)\sqrt{A}\,du}{(B - 2u\sqrt{A})^2}$

8) $dx = -2.\frac{u^2\sqrt{A} - Bu + C\sqrt{A}}{(B - 2u\sqrt{A})^2}du$

Schalten wir ferner noch den Werth von x nach Gleichung 6 in Gleichung 1 ein, so folgt

9) $\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = u + \frac{u^2 - C}{B - 2u\sqrt{A}}\sqrt{A}.$

Wenn jetzt die Werthe von x, $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ und dx nach den Gleichungen 6, 8 und 9 in die Function $f(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C}\,dx$ eingeschaltet werden, **so ist diese Function dadurch rational gemacht und die etwa verlangte Integration kann nach den früheren §§. angeführt werden.**

Bemerkungen.

1. Zu welchem Resultate wären wir gelangt, wenn statt Gl. 1 gesetzt wäre: $\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = u - x\sqrt{A}$?

2. Wegen der Wurzelgrösse $\sqrt{A}$ ist die oben stehende Methode der Rationalisation nicht zweckmässig, wenn A negativ ist.

§. 32.

Fortsetzung.

Wenn in der Function „$f(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C}).dx$" C positiv ist, so setze man

1) $\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = xu + \sqrt{C}.$

Hieraus folgt

$$2)\ Ax^2 + Bx + C = x^2 u^2 + 2xu\sqrt{C} + C$$

$$3)\ Ax^2 + Bx = x^2 u^2 + 2xu\sqrt{C}.$$

$$4)\ Ax + B = xu^2 + 2u\sqrt{C}.$$

$$5)\ Ax - xu^2 = 2u\sqrt{C} - B.$$

$$6)\ x = \frac{2u\sqrt{C} - B}{A - u^2}$$

Schalten wir diesen Werth von x in Gleichung 1 ein, so folgt

$$7)\ \sqrt{Ax^2 + Bx + C} = u.\frac{2u\sqrt{C} - B}{A - u^2} + \sqrt{C}$$

$$= \frac{2u^2\sqrt{C} - Bu + A\sqrt{C} - u^2\sqrt{C}}{A - u^2}$$

$$= \frac{u^2\sqrt{C} - Bu + A\sqrt{C}}{A - u^2}$$

Differentiiren wir nun noch x nach Gleichung 6, so folgt

$$8)\ dx = \frac{(A - u^2).2\sqrt{C} + 2u(2u\sqrt{C} - B)}{(A - u^2)^2}du$$

$$9)\ dx = \frac{2A\sqrt{C} - 2u^2\sqrt{C} + 4u^2\sqrt{C} - 2Bu}{(A - u^2)^2}du$$

$$10)\ dx = 2.\frac{u^2\sqrt{C} - Bu + A\sqrt{C}}{(A - u^2)^2}du$$

Werden die Werthe von x, $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ und dx nach den Gleichungen 6, 7 und 10 in die Function $f(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C}).dx$ eingeschaltet, **so ist diese Function wieder rational gemacht.**

Bemerkung.

1. Weil in den Gleichungen 6, 7 und 10 die Wurzelgrösse $\sqrt{C}$ vorkommt, so ist die vorstehende Methode zur Rationalisirung der Function $f(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C})\,dx$ nicht geeignet, wenn C negativ ist.

2. Wir machen darauf aufmerksam, dass in den beiden vorigen §§. für $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ solche Substitutionen $(u + x\sqrt{A}$ und $xu + \sqrt{C})$ gemacht sind, dass die hieraus entstehenden Gleichungen in Bezug auf x vom ersten Grade waren.

§. 33.

Fortsetzung.

Wenn in der Function $f(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C})\,dx$. sowohl A als auch C negativ sind, und ausserdem $B^2 > 4AC$, so verwandle man $Ax^2 + Bx + C$ in ein Product mit zwei reellen Factoren von der Form $(\alpha x + \beta)$, $(\gamma x + \delta)$ (vergl. Bem. 2). Hieraus erhalten wir

$$1)\quad Ax^2 + Bx + C = (\alpha x + \beta) \cdot (\gamma x + \delta)$$

Nun setzen wir

$$2)\quad \sqrt{Ax^2 + Bx + C} = u \cdot (\alpha x + \beta)$$

Daraus folgt die Gleichung

$$3)\quad Ax^2 + Bx + C = u^2 (\alpha x + \beta)^2$$

Aus den Gleichungen 1 und 3 folgt weiter

$$4)\quad (\alpha x + \beta) . (\gamma x + \delta) = u^2 (\alpha x + \beta)^2$$

$$5)\quad (\alpha x + \beta) . (\gamma x + \delta) = u^2 . (\alpha x + \beta)^2$$

$$6)\quad \gamma x + \delta = u^2 (\alpha x + \beta)$$

$$7)\quad \gamma x - u^2 \alpha x = u^2 \beta - \delta$$

$$8)\quad x (\gamma - a u^2) = u^2 \beta - \delta$$

$$9)\quad x = \frac{u^2 \beta - \delta}{\gamma - \alpha u^2}$$

Durch Differentiation erhalten wir hieraus

$$10)\quad dx = \frac{(\gamma - \alpha u^2) 2 u \beta + (u^2 \beta - \delta) 2 \alpha u}{(\gamma - \alpha u^2)^2} du$$

$$11)\quad dx = \frac{2 \beta \gamma u - 2 \alpha \beta u^3 + 2 \alpha \beta u^3 - 2 \alpha \delta u}{(\gamma - \alpha u^2)^2} du$$

$$12)\quad dx = 2 \frac{\beta \gamma - \alpha \delta}{(\gamma - \alpha u^2)^2} u\, du$$

Setzt man nun die Werthe von x, $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ und dx nach den Gleichungen 3, 9 und 12 in die Function $f(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C})\,dx$ ein, **so ist dieselbe dadurch in eine rationale Function verwandelt.**

Bemerkungen.

1. Wenn A und C beide negativ sind, und ausserdem $B^2 < 4AC$, so ist der Ausdruck $Ax^2 + Bx + C$ für jeden Werth von x negativ, also die Function $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ für jeden Werth von x imaginär. In diesem Falle wird das Integral derselben auch für jeden Werth von x imaginär sein (vergl. Bemerk. 2). Man setzt deshalb

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = \sqrt{-1} \, . \sqrt{-Ax^2 - Bx - C}$$

und kann dann nach einem der letzten §§. weiter verfahren.

2. Um an einem Zahlen-Beispiel zu zeigen, dass sich die Function $Ax^2 + Bx + C$ in ein Product von zwei reellen Factoren zerlegen lässt, wenn A und C negativ sind, und ausserdem $B^2 > 4AC$ ist, verweisen wir auf die folgenden Gleichungen.

$$1) \; -14x^2 - 84x - 70 = (-2x - 2)\,(7x + 35)$$

$$2) \; -14x^2 + 84x - 70 = (2x - 2)\,.\,(35 - 7x).$$

§. 34.

Integration der irrationalen Functionen von der Form $f(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C})\,.\,dx$.

Wir haben in den §§. 31—33 gesehen, dass sich die irrationalen Functionen von der Form $f(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C})\,dx$ in rationale algebraische Functionen umformen lassen, sodass die Integration derselben auf die Integration von rationalen algebraischen Functionen zurückgeführt werden kann. Indessen kann man in manchen Fällen die Integration mit Vortheil in einer andern Weise ausführen. Wir wollen deshalb die wichtigsten Fälle, welche bei der Integration der Function $f(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C})\,dx$ eintreten können, in dem Folgenden ausführlich behandeln.

§. 35.

Fortsetzung.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, . \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Aufgabe 1. Man soll die Function $\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ integriren.

Auflösung. Diese Aufgabe ist schon einmal auf Seite 20 Auflösung III gelöst worden, worauf wir hiermit verweisen. Man kann sie indessen auch folgender Massen lösen.

Man setze

1) $x = a \cdot \sin u$, also

2) $dx = a \cdot \cos u\, du$.

Hieraus folgt

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a \cos u\, du}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u}} = \int \frac{a \cos u}{a \cos u} du$$

$$4) \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int du = u + C.$$

Nun ist nach Gleichung 1 $\sin u = \frac{x}{a}$ also $u = \text{arc} \sin \frac{x}{a}$ mithin nach Gleichung 4

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc} \sin \frac{x}{a} + C.$$

Bemerkungen.

1. Wir können diese Aufgabe auch dadurch lösen, dass wir die Function $\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ nach §. 32 rational machen, und dann nach den Regeln für die Integration der rationalen Function weiter verfahren. In diesem Falle setzen wir

1) $\sqrt{a^2 - x^2} = xu + a$, dadurch erhalten wir

2) $a^2 - x^2 = x^2 u^2 + 2axu + a^2$

3) $-x^2 = x^2 u^2 + 2axu$

4) $-x = xu^2 + 2au$

5) $-xu^2 - x = 2au$

$$6) \quad x = -\frac{2au}{1 + u^2}$$

$$7) \quad dx = -\frac{2a(1 + u^2) - 4au^2}{(1 + u^2)^2} du$$

$$8) \quad dx = 2a \frac{u^2 - 1}{(1 + u^2)^2} du$$

Setzen wir nun den Werth von x nach Gleichung 6 in Gleichung 1 ein, so folgt

$$9) \sqrt{a^2 - x^2} = -\frac{2au^2}{1 + u^2} + a$$

$$10) \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{-2au^2 + a + au^2}{1 + u^2} = a \cdot \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

Jetzt ergiebt sich nach den Gleichungen 8 und 10

$$11)\ \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{2a \cdot \frac{u^2-1}{(1+u^2)^2}}{a \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2}} du = 2a \cdot \frac{u^2-1}{(1+u^2)^2} du \cdot \frac{1+u^2}{a(1-u^2)}$$

$$12)\ \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -2 \cdot \frac{du}{1+u^2}$$ also nach Formel 15 Seite 6.

$$13)\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -2 \operatorname{arc\,tg} u + C.$$

Nun ist nach Gleichung 1

$$14)\ u = \frac{\sqrt{a^2-x^2}-a}{x},$$ also nach Gleichung 13

$$15)\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{a^2-x^2}-a}{x} + C.$$

2. Wir machen darauf aufmerksam, dass die Resultate, welche wir in Gleichung 5 des Haupttextes und Gleichung 15 der Bemerkung 1 für $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ erhalten haben, in der Form sehr von einander abweichen; dass sie indessen im Wesentlichen übereinstimmen müssen. Wir empfehlen dem Anfänger die Uebereinstimmung dieser beiden Resultate zu prüfen.

3. Welches Resultat würde man erhalten haben, wenn man in Gleichung 1 $\sqrt{a^2-x^2} = -xu + a$ gesetzt hätte?

Aufgabe 2. Man soll die Function $\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ integriren.

Auflösung. Nach §. 34 setzt man

$$1)\ \sqrt{x^2-a^2} = x + u, \text{ dann ist}$$

$$2)\ x^2 - a^2 = x^2 + 2xu + u^2$$

$$3)\ -a^2 = 2xu + u^2$$

$$4)\ 2xu = -(a^2+u^2)$$

$$5)\ x = -\frac{a^2+u^2}{2u}$$

$$6)\ dx = -\frac{4u^2 - 2(a^2+u^2)}{(2u)^2} du$$

$$7)\ dx = \frac{a^2-u^2}{2u^2} du.$$

Setzen wir ferner den Werth von x nach Gleichung 5 in die rechte Seite von Gleichung 1 ein, so folgt

$$8)\ \sqrt{x^2 - a^2} = -\frac{a^2 + u^2}{2u} + u = \frac{-a^2 - u^2 + 2u^2}{2u}$$

$$9)\ \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{u^2 - a^2}{2u}$$

Vereinigen wir die Gleichungen 7 und 9, so folgt

$$10)\ \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\frac{a^2 - u^2}{2u^2}\,du}{\frac{u^2 - a^2}{2u}} = -\frac{du}{u}$$

$$11)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = -\int \frac{du}{u} = l\,\frac{1}{u} + C.$$

Nun ist nach Gleichung 1

$$12)\ u = \sqrt{x^2 - a^2} - x$$

demnach folgt aus Gleichung 11

$$13)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = l\,\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2} - x} + C. = l\{\sqrt{x^2 - a^2} + x\} + C'.$$

Bemerkungen.

1) Man kann die Aufgabe auf folgende Weise etwas einfacher lösen. Zunächst gehen wir wieder aus von der Gleichung

1) $\sqrt{x^2 - a^2} = x + u$, hieraus folgt wieder

2) $x^2 - a^2 = x^2 + 2xu + u^2$

3) $-a^2 = 2xu + u^2$.

Differentiiren wir diese Gleichung nach den Regeln von D. R. Seite 112 ff., so folgt

$$4)\ 0 = (2x + 2u)\,du + 2u\,dx, \text{ also}$$

$$5)\ 2u\,dx = -2(x + u)\,du$$

$$6)\ dx = -\frac{x + u}{u}\,du.$$

Aus den Gleichungen 1 und 6 ergiebt sich

$$7)\ \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{\frac{x + u}{u}\,du}{x + u} = -\frac{du}{u}$$

$$8)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = -\int \frac{du}{u} = -l\,\frac{1}{u} + C.$$

Nun ist nach Gleichung 1

$$9)\ u = \sqrt{x^2 - a^2} - x.$$

Setzen wir diesen Werth von u in Gleichung 8 ein, so folgt

$$10)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = l\,\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2} - x} + C.$$

2. Man kann die Integration auch dadurch einleiten, dass man setzt $\sqrt{x^2 - x^2} = x - u$.

3. Man kann auch das Integral von $\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ bestimmen, wenn man setzt

21) $x = a \,.\, \sec u$

22) $x^2 = a^2 \,.\, \sec^2 u$

23) $x^2 - a^2 = a^2 (\sec^2 u - 1) = a^2 \operatorname{tg}^2 u$ etc.

Wir empfehlen dem Leser auf diesem Wege fortzugehen bis das Integral von $\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ ermittelt ist.

§. 36.

Fortsetzung.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}; \int \frac{dx}{\sqrt{-a^2 - x^2}}.$$

Aufgabe 1. Man soll das Integral von $\frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ bestimmen.

Auflösung. Man setze

1) $\sqrt{a^2 + x^2} = u + x$, so ist

2) $a^2 + x^2 = u^2 + 2ux + x^2$

3) $a^2 = u^2 + 2ux$

4) $0 = 2u\,du + 2x\,du + 2u\,dx$

5) $u\,dx = -(u + x)\,du$

6) $dx = -\frac{u + x}{u}\,du$

Verbinden wir Gleichung 1 und 6, so folgt

7) $\frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{\frac{u + x}{u}\,du}{u + x} = -\frac{du}{u}$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = -\int \frac{du}{u} = -l\,u + C = l\,\frac{1}{u} + C.$

Nun ist nach Gleichung 1

9) $u = \sqrt{a^2 + x^2} - x$, also

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = l\{\sqrt{a^2 + x^2} + x\} + C.$$

Bemerkungen.

1. Welche Uebereinstimmung ist zwischen der Lösung der Integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ und $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$?

2. Kann man $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ auf einem andern Wege lösen, als auf dem Wege, der in der vorstehenden Auflösung eingeschlagen ist?

Aufgabe 2. Man soll $\int \frac{dx}{\sqrt{-a^2 - x^2}}$ bestimmen.

Auflösung. Es ist klar, dass für alle reellen Werthe von x $\sqrt{-a^2 - x^2}$ imaginär bleibt, demnach muss $\int \frac{dx}{\sqrt{-a^2 - x^2}}$ auch für jeden reellen Werth von x imaginär sein. Aus diesem Grunde schreiben wir

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{-a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-1} . \sqrt{a^2 + x^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Hierzu erhalten wir nach der Auflösung von Aufgabe 1 Gleichung 10

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{-a^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} . l\{\sqrt{a^2 + x^2} + x\} + C.$$

§. 37.

Fortsetzung.

$\int \sqrt{a^2 - x^2} . dx$ und $\int \sqrt{x^2 - a^2} . dx$.

Aufgabe 1. Man soll das Integral von $\sqrt{a^2 - x^2} . dx$ bestimmen.

Auflösung. Wir setzen

1) $\sqrt{a^2 - x^2} = u\,x$, so ist

2) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx = \int u\,x\,dx$

Hieraus folgt nach §. 13 Seite 25 ff.

3) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx = \frac{u\,x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\,du.$

Um nun den Werth von $\int \frac{x^2}{2}\,du$ zu ermitteln, bestimmen wir zunächst den Werth von x nach Gleichung 1. Wir finden nach dieser Gleichung

4) $a^2 - x^2 = u^2 x^2$

5) $a^2 \quad = x^2 (1 + u^2)$

6) $x^2 \quad = \frac{a^2}{1 + u^2}$

Setzen wir nach Gleichung 6 den Werth von x^2 in Gleichung 3 ein, so folgt

7) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{u\,x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \int \frac{du}{1 + u^2}$

also nach Formel 15 Seite 6

8) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{u\,x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,u + C.$

Nach Gleichung 1 ist $u = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$ also

9) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x\,.\,\sqrt{a^2 - x^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C.$

Bemerkungen.

1. Man kann die vorstehende Aufgabe noch in anderer Weise lösen. Setzen wir z. B.

10) $x = a\,.\,\sin u$, also $dx = a \cos u\,du$, so folgt

11) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u}\,.\,a \cos u\,du$

12) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\;\;dx = \int a^2 \cos^2 u\,du = a^2 \int \cos^2 u\,du.$

Nun ist $\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$ also ist

13) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2u)\, du$

14) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2 u}{2} + \frac{a^2 . \sin 2u}{4}$

Um aus dieser Gleichung u zu eliminiren, setze man nach Gleichung 10

15) $\sin u = \frac{x}{a}$ also $\cos u = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}$

16) $\sin 2u = 2 \sin u . \cos u = \frac{2x \sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}$

Ferner ist nach Gleichung 15

17) $u = \text{arc} \sin \frac{x}{a}$, also ist nach den Gleichungen 14, 16 und 17

18) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} . \text{arc} \sin \frac{x}{a} + \frac{x . \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C.$

2. Wie würde man $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ mit Hülfe von §. 32 lösen können?

3. Das Integral $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ findet Anwendung bei der Berechnung des Flächen-Inhaltes einer Ellipse.

Aufgabe 2. Man soll die Function $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ integriren.

Auflösung. Wir setzen

1) $\sqrt{x^2 - a^2} = u x$, dann ist nach §. 13 Seite 25 ff.

2) $\int \sqrt{x^2 - a^2} . dx = \int u . x\, dx = \frac{u x^2}{2} - \int \frac{u^2}{2} du.$

Nun folgt aus Gleichung 1

3) $x^2 = \frac{a^2}{1 - u^2}$, also folgt aus Gleichung 2

4) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{u x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \int \frac{du}{1 - u^2}.$

Hieraus ergiebt sich

5) $\sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{u x^2}{2} - \frac{a^2}{4} l \frac{1 + u}{1 - u} + C.$

Setzen wir hierin, nach Gleichung 1, $u = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$ so folgt

6) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x . \sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{4} l \frac{1 + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}}{1 - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}} + C.$

$$7)\ \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\,.\,\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{4}\,l\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}} + C.$$

$$8)\ \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\,.\,\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{4}\,l\,\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2}}{a^2} + C$$

$$= \frac{x\,.\,\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\,.\,l\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} + C.$$

Bemerkungen.

1. Man kann die Lösung unserer Aufgabe auch dadurch einleiten, dass man die Function $\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ nach §. 31 Seite 73 rational macht. Wie würde man dann weiter verfahren können?

2. Die Lösung der vorstehenden Aufgabe findet Anwendung bei Berechnung des Flächen-Inhaltes einer Hyperhel.

§. 38.

Fortsetzung.

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,.\,dx,\ \int\sqrt{-a^2-x^2}\,dx.$$

Aufgabe 1. Man soll die Function $\sqrt{a^2+x^2}\,.\,dx$ integriren.

Auflösung. Wir setzen

1) $\sqrt{a^2+x^2} = u\,x$. und finden dann

2) $\int\sqrt{a^2+x^2}\,.\,dx = \int u\,x\,dx$

3) $\int\sqrt{a^2+x^2}\,.\,dx = \frac{u\,x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2\,du$

Ermitteln wir nun den Werth von x^2 nach Gleichung 1 und verfahren wir weiter nach Analogie der Auflösung von Aufgabe 2 §. 37, so ergiebt sich

$$4)\ \int\sqrt{a^2+x^2}\,.\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\,.\,\sqrt{a^2-x^2} - a^2\,l\,\frac{\sqrt{a^2+x^2}-x}{a}\right\} + C.$$

Bemerkung.

Man kann die Lösung dieser Aufgabe auch dadurch einleiten, dass man $\sqrt{a^2+x^2}\,.\,dx$ nach §. 31 oder 32 Seite 73 ff. rationalisirt. Wie ist das Verfahren dann weiter?

Aufgabe 2. Man soll die Function $\sqrt{-a^2-x^2}\,.\,dx$ integriren.

Auflösung. Wir setzen $\sqrt{-a^2-x^2}\,dx = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{a^2+x^2}\,dx$, dadurch erhalten wir

$$\int\sqrt{-a^2-x^2}\,.\,dx = \sqrt{-1}\,.\int\sqrt{a^2+x^2}$$

Die Auflösung dieser Aufgabe ist demnach zurückgeführt auf die Auflösung von Aufgabe 1 und man erkennt, dass **das Resultat für jeden reellen Werth von x imaginär sein muss.**

§. 39.

Fortsetzung.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Aufgabe 1. Man soll die Function $\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ integriren, wenn a und b beliebige positive oder negative, **c aber eine absolute Zahl ist.**

Auflösung. Wir setzen

1) $\sqrt{a+bx+cx^2} = u + x\sqrt{c}$, dann ist

2) $a+bx+cx^2 = u^2+2ux\sqrt{c}+cx^2$

3) $a+bx = u^2+2ux\sqrt{c}$

4) $b\,dx = 2u\,du + 2x\sqrt{c}\,du + 2u\sqrt{c}\,dx$

5) $(b-2u\sqrt{c})\,dx = 2\,(u+x\sqrt{c})\,du$

6) $$dx = 2\frac{u+x\sqrt{c}}{b-2u\sqrt{c}}\,du$$

Verbinden wir nun die Gleichungen 1 und 6, so folgt

7) $$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{2\dfrac{u+x\sqrt{c}}{b-2u\sqrt{c}}\,du}{u+x\sqrt{c}} = 2\frac{du}{b-2u\sqrt{c}}$$

$$8)\ \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\int\frac{2\,du}{b-2u\sqrt{c}}$$

$$9)\ \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=-\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,(b-2u\sqrt{c})+C.$$

Nach Gleichung 1 ist

$$10)\qquad u\qquad=\sqrt{a+bx+cx^2}-x\sqrt{c}$$

Setzen wir diesen Werth von u in Gl. 9 ein, so folgt

$$11)\ \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,\{b+2cx-2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\}+C.$$

Bemerkungen.

1. Setzen wir

$$12)\ \sqrt{a+bx+cx^2}=u-x\sqrt{c},\ \text{so folgt}$$

$$13)\quad a+bx+cx^2=u^2-2ux\sqrt{c}+cx^2$$

$$14)\quad a+bx\qquad=u^2-2ux\sqrt{c}$$

$$15)\qquad b\,dx=2u\,du-2x\sqrt{c}\,du-2u\sqrt{c}\,dx$$

$$16)\ (b+2u\sqrt{c})\,dx=2\,(u-x\sqrt{c})\,du$$

$$17)\qquad dx=2\,\frac{u-x\sqrt{c}}{b+2u\sqrt{c}}\,du.$$

Verbinden wir Gleichung 12 mit Gleichung 17, so folgt

$$18)\quad \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{2\,\dfrac{u-x\sqrt{c}}{b+2u\sqrt{c}}\,du}{u-x\sqrt{c}}=\frac{2\,du}{b+2u\sqrt{c}}$$

$$19)\ \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{2\sqrt{c}\,du}{b+2u\sqrt{c}}$$

$$20)\ \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,(b+2u\sqrt{c})$$

Aus Gleichung 1 folgt $u=\sqrt{a+bx+cx^2}+x\sqrt{c}$, also ist nach Gleichung 20

$$21)\ \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,\{b+2cx+2\sqrt{c}\,.\,\sqrt{a+bx+cx^2}\}+C.$$

2. Vergleichen wir die Ausdrücke, welche wir in den Gleichungen 12 und 21 für $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ erhalten, so sehen wir, dass dieselben in

der Form sehr von einander abweichen. Dies wird hoffentlich jetzt nicht mehr befremden. Sollte es aber dennoch der Fall sein, so lässt sich die Richtigkeit der Gleichungen 11 und 21 leicht durch Differentiation prüfen.

3. Man kann leicht nachweisen, dass — abgesehen von den Integrations-Constanten — die rechten Seiten der Gleichungen 11 und 21 sich nur um eine Constante unterscheiden. Zu dem Ende setzen wir

$$22)\quad \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left\{b+2cx+2\sqrt{c}\,.\,\sqrt{a+bx+cx^2}\right\}$$

$$-\left[-\frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left\{b+2cx-2\sqrt{c}\,.\,\sqrt{a+bx+cx^2}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left\{(b+2cx+2\sqrt{c}\,.\,\sqrt{a+bx+cx^2}).(b+2cx-2\sqrt{c}\,.\,\sqrt{a+bx+cx^2})\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left\{(b+2cx)^2-(2\sqrt{c}\,.\,\sqrt{a+bx+cx^2})^2\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left\{b^2+4bcx+4c^2x^2-4ac-4bcx-4c^2x^2\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left\{b^2-4ac\right\}.$$

Diese Grösse ist offenbar constant, und es ist also die Uebereinstimmung der Ausdrücke nachgewiesen, welche die Gleichungen 11 und 21 für $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ geben.

4. Man schreibt sehr häufig

$$23)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=-\frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left\{\frac{b}{2}+cx-\sqrt{c}\,.\,\sqrt{a+bx+cx^2}\right\}$$

$$24)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left\{\frac{b}{2}+cx+\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right\}.$$

Wie zeigt man die Uebereinstimmung dieser beiden Gleichungen mit den Gleichungen 11 und 21?

5. Bekanntlich ist

$$25)\quad a+bx+cx^2=c\left(x^2+\frac{b}{c}x+\frac{b^2}{4c^2}\right)+\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)$$

$$=c\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2+\left(a-\frac{b^2}{4c}\right).$$

Wie kann man diese Gleichung benutzen, um $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ auf $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ oder $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ (§. 35 und 36) zurückzufüren?

6. Wovon hängt es ab, ob §. 35 oder §. 36 Anwendung findet?

Aufgabe 2. Man soll die Function $\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}$ integriren, wenn a und b beliebige positive oder negative Zahlen sind, **c aber eine absolute Zahl ist.**

Auflösung. Zunächst setzen wir

$$1)\ a+bx-cx^2 = -c\left(x^2-\frac{b}{c}x+\frac{b^2}{4c^2}\right)+\left(a+\frac{b^2}{4c}\right)$$

$$2)\ a+bx-cx^2 = c\left\{\frac{4ac+b^2}{4c^2}-\left(x-\frac{b}{2c}\right)^2\right\}$$

Setzen wir hierin

$$3)\ \frac{4ac+b^2}{4c^2}=m^2 \text{ und } \left(x-\frac{b}{2c}\right)=u;\ dx=du,$$

so folgt

$$4)\ \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{du}{\sqrt{c}\,.\sqrt{m^2-u^2}}, \text{ also}$$

$$5)\ \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{du}{\sqrt{m^2-u^2}}$$

Hieraus folgt nach §. 35 Gleichung 5 Seite 78

$$6)\ \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\,.\text{arc sin}\,\frac{u}{m}+C.$$

Setzen wir hierin den Werth von u und m nach Gleichung 3, so folgt

$$7)\ \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\,.\text{arc sin}\,\frac{x-\frac{b}{2c}}{\sqrt{\frac{4ac+b^2}{4c^2}}}+C.$$

$$8)\ \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\,.\text{arc sin}\,\frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}+C.$$

Kann man die Aufgabe noch auf andere Weise lösen? (Vergl. §. 35 und §. 32.)

§. 40.

Fortsetzung.

$$\int \sqrt{a + bx \pm cx^2}\, dx.$$

Aufgabe 1. Man soll die Function $\sqrt{a + bx + cx^2}\,.\,dx$ integriren, wenn a und b beliebige positive oder negative Zahlen sind, **und c eine absolute Zahl ist.**

Auflösung. Wir setzen

$$1)\ a + bx + cx^2 = c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{b^2}{4c^2}\right) + \left(a - \frac{b^2}{4c}\right)$$

$$2)\ a + bx + cx^2 = c\left\{\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4c^2}\right)\right\}$$

Ferner setzen wir

$$3)\ x + \frac{b}{2c} = u,\ dx = du \text{ und}$$

$$4)\ \frac{4ac - b^2}{4c^2} = \pm m^2$$ Das Zeichen + oder — gilt je nachdem 4ac grösser oder kleiner als b^2 ist.

Mit Hilfe der Gleichungen 3 und 4 ist die Function $\sqrt{a + bx + cx^2}\,.\,dx$ auf die Form $\sqrt{c}\,.\,\sqrt{u^2 \pm m^2}\,du$ gebracht worden. Die Integration lässt sich also nach §. 37 oder 38 ausführen, worauf wir hiermit verweisen. (Vergl. Aufgabe 2 Seite 84 und Aufgabe 1 Seite 85.)

Zur weiteren Erläuterung diene folgendes Zahlen-Beispiel:

Aufgabe 2. Man soll die Function $\sqrt{65 - 20x + 5x^2}\,.\,dx$ integriren.

Auflösung. Es ist

$$1)\ 65 - 20x + 5x^2 = 5\ (x^2 - 4x + 13).$$

$$2)\ 65 - 20x + 5x^2 = 5\ \{(x - 2)^2 + 3^2\}.$$

Nun sei

$$3)\ x - 2 = u,\ dx = du, \text{ dann ist}$$

4) $\sqrt{65-20x+5x^2}\,.\,dx = \sqrt{5}\,.\,\sqrt{u^2+3^2}\,.\,du$

5) $\int\sqrt{65-20x+5x^2}\,.\,dx = \sqrt{5}\,.\int\sqrt{u^2+3^2}\,.\,du$

also nach §. 38 Gleichung 4

6) $\int\sqrt{65-20x+5x^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\left\{u\,.\sqrt{u^2+3^2} - 9\,l\,\frac{\sqrt{u^2+3^2}-u}{3}\right\} + C.$

Hierin den Werth von u gesetzt nach Gl. 3 giebt

7) $\int\sqrt{65-20x+5x^2}\,.\,dx$

$= \frac{\sqrt{5}}{2}\left\{(x-2)\,.\sqrt{x^2-4x+13} - 9\,l\,\frac{\sqrt{x^2-4x+13}-x+2}{3}\right\} + C$

$= \frac{1}{2}\left\{(x-2)\sqrt{65-20x+5x^2} - (9\sqrt{5})\,.\,l\,\frac{\sqrt{x^2-4x+13}-x+2}{3}\right\} + C.$

Wie gross ist $\int\sqrt{1-20x+5x^2}\,.\,dx$?

Aufgabe 3. Man soll die Function $\sqrt{a+bx-cx^2}\,dx$ integriren, wenn a und b beliebige positive oder negative Zahlen sind, und **c eine absolute Zahl ist.**

Auflösung. Es ist

1) $a+bx-cx^2 = c\left\{-\left(x^2-\frac{b}{c}x+\frac{b^2}{4c^2}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}\right)\right\}$

2) $a+bx-cx^2 = c\left\{\frac{4ac+b^2}{4c^2}-\left(x-\frac{b}{2c}\right)^2\right\}$

Ferner sei

3) $x-\frac{b}{2c} = u,\ dx = du$

4) $\frac{4ac+b^2}{4c^2} = \pm m^2$ Das Zeichen + oder — gilt je nachdem $4ac+b^2$ positiv oder negativ ist.

Aus den vorstehenden Gleichungen ergiebt sich

5) $\int\sqrt{a+bx-cx^2}\,dx = \sqrt{c}\,.\int\sqrt{\pm m^2-u^2}\,du$

Hierdurch ist die Integration von $\sqrt{a+bx-cx^2}\,dx$ zurückgeführt auf §. 37 oder 38, worauf wir hiermit verweisen.

Zur weiteren Erläuterung möge folgendes Beispiel dienen.

Aufgabe 4. Man soll die Function $\sqrt{25+20x-5x^2}\,.\,dx$ integriren.

Auflösung. Wir setzen

$$1)\ \sqrt{25+20x-5x^2} = \sqrt{5}\,.\,\sqrt{-x^2+4x+5}$$
$$= \sqrt{5}\,.\,\sqrt{-x^2+4x-4+9}.$$

$$2)\ \sqrt{25+20x-5x^2} = \sqrt{5}\,.\,\sqrt{3^2-(x-2)^2}$$

Setzen wir hierin

$$3)\ x-2=u,\ dx=du,\ \text{so folgt}$$

$$4)\ \int\sqrt{25+20x-5x^2}\,.\,dx = \sqrt{5}\,.\int\sqrt{3^2-u^2}\,.\,du.$$

Hieraus folgt nach Seite 83 Gleichung 9

$$5)\ \int\sqrt{25+20x-5x^2}\,.\,dx = \sqrt{5}\left\{\frac{u\sqrt{3^2-u^2}}{2} - \frac{9}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3^2-u^2}}{u}\right\} + C.$$

Setzen wir hierin für u seinen Werth nach Gl. 3, so folgt

$$6)\ \int\sqrt{25+20x-5x^2}\,.\,dx$$

$$= \sqrt{5}\left\{\frac{(x-2)\,.\,\sqrt{5+4x-x^2}}{2} - \frac{9}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{5+4x-x^2}}{x-2}\right\} + C.$$

$$= \frac{(x-2)\sqrt{25+20x-5x^2}}{2} - \frac{9}{2}\sqrt{5}\,.\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{5+4x-x^2}}{x-2} + C.$$

Wie gross ist $\int\sqrt{-25+20x-5x^2}\,dx$.

§. 41.

Uebungs-Aufgaben.

$$1)\ \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{4+2x}} = \frac{1}{15}(32-8x+3x^2)\sqrt{4+2x} + C.$$

Zur Auflösung setze man $\sqrt{4+2x}=u$, also $dx = u\,du$ und verfahre weiter nach §. 12 Seite 23.

$$2)\ \int\frac{dx}{x^3\sqrt{5-2x}} = \frac{3}{50\sqrt{5}}\,l\,\frac{\sqrt{5-2x}-\sqrt{5}}{\sqrt{5-2x}+\sqrt{5}}$$
$$-\frac{1}{100x^2}\left\{10+6x\right\}\sqrt{5-2x} + C.$$

Zur Auflösung setze man $\sqrt{5-2x}=u$, also $dx = -u\,du$ und verfahre weiter nach Capitel II.

$$3)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(5x+3)^5}}=-\frac{2\,(5x+2)}{25\sqrt{(5x+3)^3}}+C.$$

Zur Auflösung setze man $\sqrt{5x+3}=u$, also $dx=\frac{2}{5}u\,du$ und verfahre weiter nach Formel 6 Seite 5.

$$4)\int\frac{\sqrt{3x-7}}{x^3}dx=\frac{\sqrt{(3x-7)^3}}{14x^2}-\frac{3}{28x}\sqrt{3x-7}$$
$$+\frac{9}{28\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{3}{7}x-1}+C.$$

Man setze $\sqrt{3x-7}=u$ etc.

$$5)\frac{x^2\,dx}{3\sqrt[3]{x+2}}=\left\{\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{10}x+\frac{9}{10}\right\}\sqrt[3]{(x+2)^2}+C.$$

Man setze $\sqrt[3]{x+2}=u$ etc.

$$6)\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=l\left\{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right\}+C.$$

Vergl. §. 39 Seite 86.

$$7)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{2}l\left\{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right\}+C.$$

Man setze $\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\frac{x\,dx}{\sqrt{(x+{}^1/_2)^2+{}^3/_4}}=\frac{(x+{}^1/_2)\,dx}{\sqrt{(x+{}^1/_2)^2+{}^3/_4}}$
$-\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{(x+{}^1/_2)^2+{}^3/_4}}$ etc.

$$8)\int\frac{dx}{\sqrt{2rx-x^2}}=\arcsin\frac{x-r}{r}+C.$$

Man setze $\sqrt{2rx-x^2}=\sqrt{r^2-(x-r)^2}$ etc.

$$9)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}}=-\sqrt{2rx-x^2}+r\,.\arcsin\frac{x-r}{r}$$

Man setze $\frac{x}{\sqrt{2rx-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{r^2-(x-r)^2}}$
$$=\frac{x-r}{\sqrt{r^2-(x-r^2)}}+\frac{r}{\sqrt{r^2-(x-r)^2}}\text{ etc.}$$

$$10)\int\frac{dx}{x\sqrt{2rx-x^2}}=-\frac{\sqrt{2rx-x^2}}{rx}+C.$$

Man setze $\sqrt{2rx - x^2} = xz$. Löse diese Gleichung für x auf, so erhält man $x = \frac{2r}{1+z^2}$; $dx = \frac{-4rz}{(1+z^2)^2} dz$, hieraus folgt

$$\frac{dx}{x\sqrt{2rx - x^2}} = -\frac{\frac{4rz}{(1+z^2)^2} dz}{\left(\frac{2r}{1+z^2}\right)^2 . z} \text{ etc.}$$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = l(\sqrt{1+x^2} + x) + C.$$

Setze $\sqrt{1+x^2} = u + x$ etc.

$$12) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + C.$$

Vergl. Formel 6 Seite 5.

$$13) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = l \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} + C.$$

Vergl. §. 31 und 32 Seite 74 ff.

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\, x + C.$$

Vergl. Formel 14 Seite 6.

$$15) \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -l \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Vergl. §. 32 Seite 74.

$$16) \int \frac{dx}{x^2.\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Man setze $x = \cos u$, also $dx = -\sin u\, du$, so wird

$\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{du}{\cos^2 u}$, also $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{tg} u + C.$ etc.

Zu welchem Resultate wären wir gelangt, wenn wir nach §. 34 S. 74 gesetzt hätten $\sqrt{1-x^2} = xz + 1$, und hieraus geschlossen hätten $x - \frac{-2z}{1+z^2}$; $dx = -2\frac{1-z^2}{(1+x^2)^2} dz$ etc.

$$17) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Man setze $1 - x^2 = u$ und verfahre nach Formel 6 Seite 5. Wäre man auch zum Ziele gelangt, wenn man gesetzt hätte $x = \sin u$ etc.

18) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\left\{\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right\} + C.$$

Man setze $x = \sin u$, $dx = \cos u\,du$, also $\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin^2 u \cos u\,du}{\cos u}$

Hierin setze man ferner $\sin^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}$.

Welches Resultat hätte sich ergeben, wenn man nach §. 32 gesetzt hätte $\sqrt{1-x^2} = xz + 1$ etc.?

19) $$\int \frac{dx}{(1+x^2).\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-x^2}{2x^2}}$$

Man setze $\sqrt{1-x^2} = xu$, also

$$x^2 = \frac{1}{u^2+1};\quad 1+x^2 = -\frac{u^2+2}{u^2+1};$$

$$2\,l\,x = -l(u^2+1),\ \text{also}\ \frac{dx}{x} = \frac{u\,du}{u^2+1}\ \text{etc.}$$

Wenn man $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x^2}{2x}}$ in arc sin verwandelt, so erhält man

$$\int \frac{dx}{(1+x^2).\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + C.$$

Lässt sich die vorstehende Aufgabe nicht dadurch lösen, dass man setzt $\sqrt{1-x^2} = 1 + xu$?

20) $$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\, \frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Man setze $\sqrt{1+x^2} = x.u$; $x^2 = \frac{1}{u^2-1}$

$$1 - x^2 = \frac{u^2-2}{u^2-1};\ 2\,l\,x = -l(u^2-1);\ \frac{dx}{x} = -\frac{u\,du}{u^2-1}\ \text{etc.}$$

IV. Capitel.

Bestimmte Integrale.

§. 42.

Ist $F(x) = \int f(x)\, ox$, so kann das Integral $F(x)$ als die Summe einer unendlich grossen Anzahl von Werthen seines Differentials $f(x)\, dx$ angesehen werden.

Man denke sich nämlich unter x irgend einen Werth der Veränderlichen und unter x_0 irgend einen vorangehenden derselben und gebe jetzt der Veränderlichen x die auf einander folgenden Werthe x_0, $x_0 + \Delta x$, $x_0 + 2\Delta x$, $x_0 + 3\Delta x$, ... $x_0 + n\Delta x$, so dass $x_0 + n\Delta x = x$ ist. Daraus folgen für $F(x)$ die zugehörigen Werthe $F(x_0)$, $F(x_0 + \Delta x)$, $F(x_0 + 2\Delta x)$ .... $F(x_0 + n\Delta x)$. Die auf einander folgenden Zuwächse von $F(x_0)$ sind nun $F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$, $F(x_0 + 2\Delta x) - F(x_0 + \Delta x)$, $F(x_0 + 3\Delta x) - F(x_0 + 2\Delta x)$ .... $F(x_0 + n\Delta x) - F(x_0 + (n-1)\Delta x)$ und es lässt sich in Folge dessen die Gleichung ansetzen $F(x) = F(x_0 + n\Delta x) = F(x_0) + [F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)] + [F(x_0 + 2\Delta x) - F(x_0 + \Delta x)] + \ldots . [F(x_0 + n\Delta x) - F(x_0 + (n-1)\Delta x)]$, oder wenn wir die rechte Seite vom 2. Gliede an mit Δx dividiren und multipliciren

$$F(x) = F(x_0) + \left[\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} + \frac{F(x_0 + 2\Delta x) - F(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} + \ldots .. \frac{F(x_0 + n\Delta x) - F(x_0 + (n-1)\Delta x)}{\Delta x}\right] \Delta x$$

Lässt man nun Δx unendlich klein, also zu dx werden, so wird n unendlich gross und die Brüche in der Klammer werden mit dx multiplicirt zu denjenigen Differentialien, die man erhält,

wenn man in dem Differential von $F(x)$, also in $f(x)\,dx$ nach einander x_0, $x_0 + dx$, $x_0 + 2dx \ldots . x_0 + (n-1)dx$ statt x einführt und es ist daher

$F(x) = F(x_0) + f(x_0)dx + f(x_0 + dx)dx + f(x_0 + 2dx)dx + \ldots .$ $f(x_0 + (n-1)\,dx)\,dx$.

Bezeichnet man nun die Summe der Differentialwerthe einfach durch $\int_{x_0} f(x)\,dx$, so kann man jetzt auch schreiben

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0} f(x)\,dx$$

oder allgemeiner $F(x) + C = F(x_0) + \int_{x_0} f(x)\,dx$. Nimmt man jetzt für x einen zweiten bestimmten Werth x_n der über x_0 hinausgeht und bezeichnet die Summe der unendlich vielen Differentialwerthe $f(x_0)\,dx$, $f(x_0 + dx)\,dx$, $f(x_0 + 2dx)\,dx \ldots .$ $f(x_0 + (n-1)\,dx)\,dx$ zwischen x_0 und x_n nach Fourier durch $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$, so ist offenbar $F(x_n) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$ und $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = F(x_n) - F(x_0) = f(x_0)\,dx + f(x_0 + dx)\,dx + \ldots .$ $f(x_0 + (n-1)dx)\,dx = [f(x_0) + f(x_0 + dx) + f(x_0 + 2dx) + \ldots .$ $f(x_0 + (n-1)\,dx)]\,dx$.

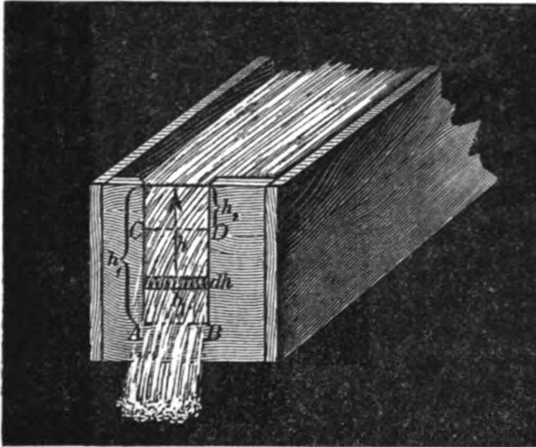
Ein solcher Ausdruck heisst nun **ein bestimmtes Integral** und bedeutet immer die Summe von unendlich vielen Differentialwerthen zwischen gewissen Grenzen der Veränderlichen, wie hier zwischen den Grenzen x_0 und x_n. Der Werth x_0, mit welchem man die Summirung der Differentialwerthe beginnt, heisst die **untere Grenze** und wird unter das Integralzeichen gesetzt. Der Werth x_n, mit welchem die Summirung aufhört, heisst die **obere Grenze** und wird oben an das Integralzeichen gesetzt.

Da nach dem Obigen $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x_n) - F(x_0)$ und $F(x_n)$,

$F(x_0)$ sich aus $F(x)$ dadurch ergeben, dass man in dem letzteren nach einander x_1 und x_0 statt x einführt, so erhält man also das bestimmte Integral zwischen beliebigen Grenzen aus einem gegebenen unbestimmten Integral dadurch, dass man in diesem nach einander den oberen und unteren Grenzwerth für x einführt und das letzte Resultat vom ersteren abzieht. Die Constante fällt hierdurch weg.

Folgendes Beispiel möge das bestimmte Integral näher erläutern.

Fig. 5.



Wie gross ist die Ausflussmenge aus einer rectangulären Seitenöffnung deren Breite $AB = CD = b$ und deren untere Kante AB um die Höhe h_1, deren obere dagegen um die Höhe h_2 unter dem Wasserspiegel liegt?

Theilen wir die Oeffnung in unendlich kleine horizontale Flächenelemente und nehmen an, ein solches Element liege um die Höhe h unter dem Niveau des Wassers, so ist die Breite desselben dh, also die Ausflussmenge aus demselben

$$dQ = bdh\sqrt{2gh}.$$

Hätte nun die Ausflussöffnung die Höhe h, das heisst, würde sie von dem betreffenden Elemente bis zur Oberfläche des Wassers reichen, so wäre die Ausflussmenge $Q = \int bdh\sqrt{2gh} = {}^2/_3\, bh^{3/2} = {}^2/_3\, bh\sqrt{2gh}$.

Da aber die Höhe derselben $h_1 - h_2$ ist, so folgt

$$Q = \int_{h_2}^{h_1} bdh \sqrt{2gh} = b\sqrt{2g}\int_{h_2}^{h_1} dh h^{1/2} = {}^2/_3\, b\sqrt{2g}(h_1{}^{3/2} - h_2{}^{3/2})$$

§. 43.

$$\int_n^m fx\,dx = \int_p^m fx\,dx + \int_n^p fx\,dx.$$

Lehrsatz. Wenn m, n und p beliebige Zahlen sind, so ist
$\int_n^m fx\,dx = \int_p^m fx\,dx + \int_n^p fx\,dx.$

Beweis.

I. Fall. p liegt dem Werthe nach zwischen m und n.

Wir nehmen an, dass die Curve CPD Figur 6 der Gleichung $y = fx$ entspricht; ferner dass

1) $AB = n$; $AC = m$, $AG = p$,

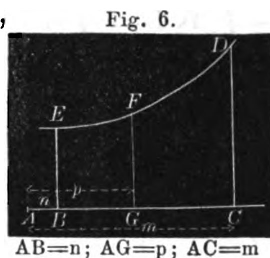
dann ist

2) Fläche BCDE $= \int_n^m fx\,dx.$

3) Fläche FGCD $= \int_p^m fx\,dx.$

4) Fläche BEFG $= \int_n^p fx\,dx.$

Fig. 6.



AB=n; AG=p; AC=m

Ferner ist

5) Fläche BCDE = FGCD + BEFG.

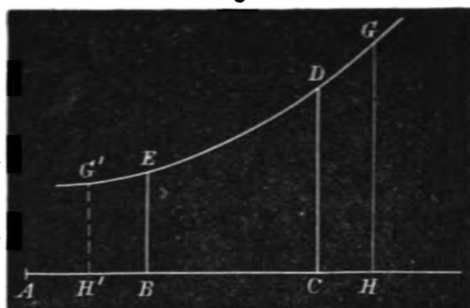
Setzen wir in diese Gleichung die Werthe von BCDE, FGCD und BEFG nach den Gleichungen 2, 3 und 4, so folgt

6) $\int_n^m fx\,dx = \int_p^m fx\,dx + \int_n^p fx\,dx.$ w. z. b. w.

II. Fall. Der Werth von p liegt nicht zwischen den Werthen von m und n.

Die Figur 7 entspricht diesem Falle. Nach den Bezeichnungen dieser Figur ist nun

Fig. 7.



$$7)\ BCDE = \int_n^m fx\,dx$$

$$8)\ BHGE = \int_n^p fx\,dx.$$

$$9)\ CHGD = \int_m^p fx\,dx.$$

Ferner ist

10) BCDE = BHGE — CHGD.

AB=n; Ab=m; AH=p.

Setzt man in diese Gleichung die Werthe von BCDE, BHGE und CHGD nach den Gleichungen 7 bis 9, so folgt

$$11)\ \int_n^m fx\,dx = \int_n^p fx\,dx - \int_m^p fx\,dx.$$

Nun ist aber

$$-\int_m^p fx\,dx = \int_p^m fx\,dx,$$ also nach Gleichung 11

$$12)\ \int_n^m fx\,dx = \int_n^p fx\,dx + \int_p^m fx\,dx.$$

$$13)\ \int_n^m fx\,.\,dx = \int_p^m fx\,dx + \int_n^p fx\,dx$$ w. z. b. w.

Wäre p kleiner als m und n gewesen, so hätte man in Figur 6, AH' = p' setzen können. In diesem Falle setzen wir

14) BCDE = H'CDG' — H'BEG', also

$$15)\ \int_n^m fx\,dx = \int_{p'}^m fx\,dx - \int_{p'}^n fx\,dx,$$

also auch

$$16)\ \int_n^m fx\,dx = \int_{p'}^m fx\,dx - \int_n^{p'} fx\,dx.$$

Resultat.

Da ausser den Fällen:

I. dass p zwischen m und n liegt

II. a) dass p grösser als m und n ist

b) dass p kleiner als m und n ist

kein anderer Fall möglich ist, so ist es in dem Vorstehenden bewiesen, dass für jeden Werth von p

$$\int_n^m fx\,dx = \int_p^m fx\,dx + \int_n^p fx\,dx$$

Bemerkungen.

1. Aus den vorstehenden Resultaten ergiebt sich

$$\int_n^m fx\,.\,dx = \int_g^m fx\,.\,dx + \int_h^g fx\,.\,dx + \ldots \int_s^r fx\,.\,dx + \int_n^s fx\,.\,dx.$$

2. Dem Anfänger empfehlen wir folgende bestimmte Integrale zu berechnen:

$$\int_3^{10} (3x^2 + 2x - 3)\,dx$$

$$\int_{-5}^{3} (3x^2 + 2x - 3)\,.\,dx$$

$$\int_{+2}^{-5} (3x^2 + 2x - 3)\,.\,dx$$

$$\int_{-4}^{2} (3x^2 + 2x - 3)\,.\,dx$$

und darauf zu zeigen, dass die Summe dieser Integrale gleich ist dem bestimmten Integral

$$\int_{-4}^{10} (3x^2 + 2x - 3)\,.\,dx.$$

§. 44.

Ermittelung des Werthes von $\int_n^m fx\,.\,dx$, wenn fx für einen Werth von x, welcher zwischen n und m liegt, discontinuirlich (unendlich gross) wird.

Liegt p dem Werthe nach zwischen n und m, und wird fx für $x = p$ discontinuirlich, so lässt sich der Werth von $\int_n^p fx\,.\,dx$ dadurch ermitteln, dass man zunächst den Werth

von $\int_n^{p-\alpha} fx\,dx$ bestimmt. Lässt man hierin α immer kleiner und zuletzt gleich Null werden, so erhält man hierdurch den Werth von $\int_n^p fx\,dx$.

Es ist demnach

$$1)\quad \int_n^p fx\,.\,dx = \lim \int_n^{p-\alpha} fx\,.\,dx.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich

$$2)\quad \int_p^m fx\,.\,dx = \lim \int_{p+\beta}^m fx\,dx.$$

Aus den Gleichungen 1 und 2 folgt jetzt

$$3)\quad \int_n^m fx\,.\,dx = \lim \int_{p+\beta}^m fx\,dx + \lim \int_n^{p-\alpha} fx\,.\,dx.$$

Bemerkung. Es versteht sich wohl von selbst, dass α und β positive Zahlen bedeuten. —

Wie verfährt man, wenn mehrere Werthe zwischen m und n liegen, für welche fx discontinuirlich wird?

Aufgabe 1. Wie gross ist $\int_{-p}^m \frac{dx}{x^2}$ wenn m und p positive Grössen sind?

Auflösung. Weil die Function $\frac{1}{x^2}$ für $x = 0$ discontinuirlich (unendlich gross) wird, so setzen wir

$$1)\quad \int_{-p}^m \frac{dx}{x^2} = \lim \int_\beta^m \frac{dx}{x^2} + \lim \int_{-p}^{-\alpha} \frac{dx}{x^2}.$$

Nun ist aber

$$2)\quad \int_\beta^m \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{m}$$

$$3)\quad \lim \int_\beta^m \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{0} - \frac{1}{m} = +\infty$$

4) $\int\limits_{-p}^{-\alpha} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}$ also

5) $\lim \int\limits_{-p}^{-\alpha} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{0} - \frac{1}{p} = +\infty$

Aus den Gleichungen 1, 3 und 5 folgt jetzt

6) $\int\limits_{-p}^{m} \frac{dx}{x^2} = \lim \int\limits_{\beta}^{m} \frac{dx}{x^2} + \lim \int\limits_{-p}^{-\alpha} \frac{dx}{x^2} = \infty + \infty$

7) $\int\limits_{-p}^{m} \frac{dx}{x^2} = \infty.$

Aufgabe 2. Man soll den Werth von $\int\limits_{n}^{m} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x - a^2)}}$ ermitteln, für den Fall, dass $m > a > n$.

Auflösung. Weil a zwischen m und n liegt, und weil $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-a)^2}}$ für $x = a$ discontinuirlich (unendlich gross) wird, so setzen wir

1) $\int\limits_{n}^{m} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2}} = \lim \int\limits_{a+\beta}^{m} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2}} + \lim \int\limits_{n}^{a-\alpha} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2}}$

Nun ist

2) $\int\limits_{a+\beta}^{m} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2}} = 3\sqrt[3]{m-a} - 3\sqrt[3]{a+\beta-a}$

3) $\lim \int\limits_{\alpha+\beta}^{m} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2}} = 3\sqrt[3]{m-a} - 3\sqrt[3]{0}$

$= 3 . \sqrt[3]{m-a}.$

4) $\int\limits_{n}^{a-\alpha} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2}} = 3 . \sqrt[3]{a-\alpha-a} - 3 . \sqrt[3]{n-a}$

5) $\lim \int\limits_{n}^{a-\alpha} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2}} = -3 . \sqrt[3]{u-a}$

Aus den Gleichungen 1, 3 und 5 ergiebt sich jetzt

$$6)\ \int_n^m \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2}} = 3\left\{\sqrt[3]{m-a} - \sqrt[3]{n-a}\right\}$$

$$= 3\left\{\sqrt[3]{m-a} + \sqrt[3]{a-n}\right\}$$

Wir empfehlen dem Anfänger die Curve zu zeichnen, welche der Gleichung $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-a)^2}}$ entspricht; und die Curve zu discontiren nach D. R. Seite 179 ff.

Welcher Unterschied findet Statt zwischen den Auflösungen von Aufgabe 1 und 2 dieses Paragraphen?

§. 45.

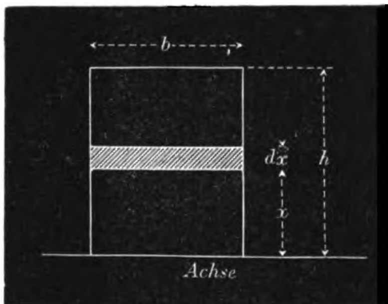
Anwendungen.

I. Aufstellung der Trägheitsmomente für einige Flächen.

Bekanntlich versteht man unter dem Trägheitsmoment die Summe der Producte aus den einzelnen Flächentheilchen mit dem Quadrat des Abstandes von der Drehachse und es ist deshalb leicht einzusehen, dass dasselbe für jeden Querschnitt besonders zu bezeichnen ist.

Der Querschnitt sei 1) ein Rechteck. Die Achse gehe durch eine Seite. Wir denken uns das Rechteck parallel zur Achse in eine unendlich grosse Anzahl Streifen von der Dicke dx zerlegt, alsdann ist: Trägheitsmoment eines solchen Streifens $b\,dx.x^2$ also das Trägheitsmoment der ganzen Fläche $J = \int b\,dx.x^2$, aber die Summe genommen zwischen den Grenzen o und h, also

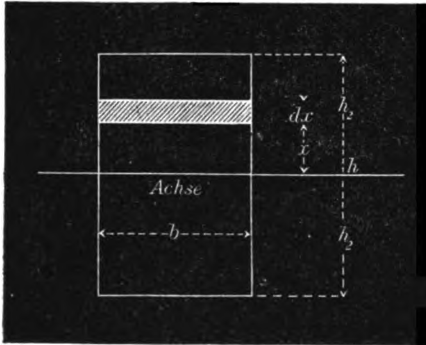
Fig. 8.



$$J = \int_0^h b\,dx\,.\,x^2 = b\int_0^h x^2\,dx = b\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^h \text{ woraus } J = \frac{bh^3}{3}$$

2) **Rechteck.** Die Achse gehe durch den Schwerpunkt parallel einer Seite.

Fig. 9.



Denken wir uns das Rechteck in unendlich dünne zur Achse parallele Streifen zerlegt, so ist das Trägheitsmoment eines solchen Streifens $= b\,dx\,x^2$, also, das Trägheitsmoment $I = \int b\,dx\,.\,x^2$ zwischen den Grenzen $+\frac{h}{2}$ und $-\frac{h}{2}$

somit

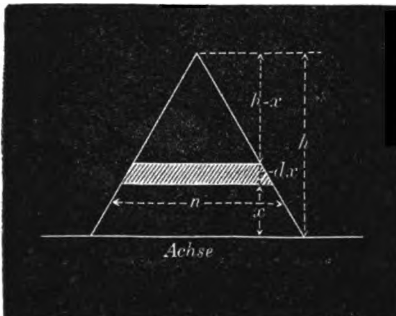
$$J = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b\,x^2\,dx = b \int_{-h_2}^{+h_2} x^2\,.\,dx = b\left(\frac{x^3}{3}\right)_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}$$

$$J = b\left[\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{h}{2}\right)^3}{3}\right] = b\left[\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24}\right] = \frac{bh^3}{12}$$

Daraus lassen sich leicht die Trägheitsmomente für das Quadrat und für aus Rechtecken zusammengesetzte Querschnitte herleiten.

3) **Dreieck.** Die Achse geht durch eine Seite.

Fig. 10.



Denkt man sich wieder das Dreieck zerlegt in unendlich viele Streifen von der Dicke dx, so ist:

Die Fläche eines Streifen $n\,dx$

Trägheitsmoment eines Streifen $n\,.\,dx\,.\,x^2$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ergiebt sich aber $b : n = h : h - x$, also $n = \frac{b(n-x)}{h}$, folglich ist das Trägheitsmoment des ganzen Dreiecks

$I = \int nx^2 dx$ und zwar zwischen den Grenzen o und h.

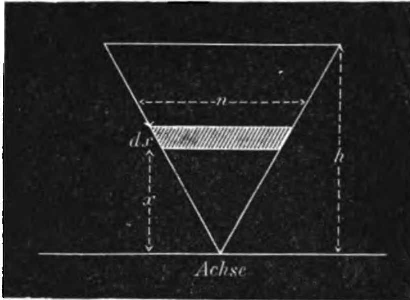
Demnach $I = \int_0^h nx^2 dx = \int_0^h \frac{b(h-x)}{h} x^2 dx = \frac{b}{h} \int_0^h (h-x) x^2 dx$

$$I = \frac{b}{h} \int_0^h (hx^2 - x^3)\, dx = \frac{b}{h} \left[\int_0^h hx^2\, dx - \int_0^h x^3\, dx \right] =$$

$$\frac{b}{h} \left[\frac{hx^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^h$$

$$I = \frac{b}{h} \left[\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4} \right] = \frac{b}{h} \cdot \frac{h^4}{12} = \frac{bh^3}{12}$$

Fig. 11.



4) **Dreieck.** Die Achse geht durch eine Ecke parallel der gegenüberliegenden Seite. Trägheitsmoment eines Streifens $= n \cdot x^2\, dx$, also Trägheitsmoment des Dreiecks $I = \int_0^n nx^2\, dx$

Da aber $b : n = h : x$, also

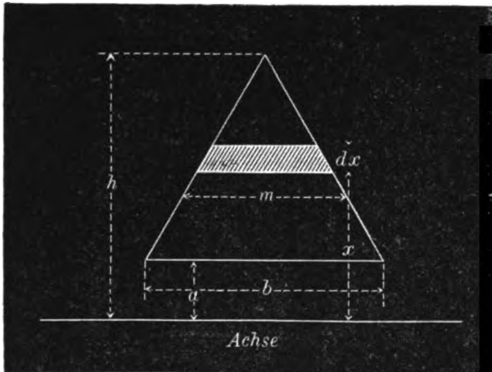
$$n = \frac{bx}{h} \text{ ist, so folgt } I = \int_0^h \frac{bx}{h} x^2\, dx$$

$$I = \frac{b}{h} \int_0^h x^3\, dx = \frac{b}{h} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^h = \frac{bh^4}{4h} = \frac{bh^3}{3}$$

5) **Dreieck.** Die Achse ist parallel einer Seite ausserhalb der-

selben. Der Aehnlichkeit der Dreiecke wegen ist $m : b = (h - x) : (h - a)$, also

Fig. 12.



$$m = \frac{b\,(h - x)}{h - a}.$$

Demnach beträgt das Trägheitsmoment eines Streifens $= m\,dx \,.\, x^2 = \frac{b\,(h - x)}{h - a}\, x^2\, dx$, folglich das Trägheitsmoment des Dreiecks

$$I = \frac{b}{h - a} \int_a^h (h - x)\, x^2\, dx =$$

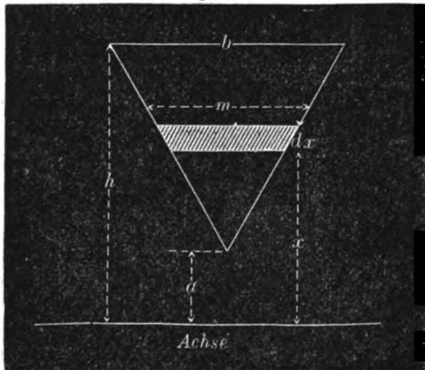
$$\frac{b}{h - a} \int_a^h (hx^2 - x^3)\, dx = \frac{b}{h - a} \left[\int_a^h hx^2\, dx - \int_a^h x^3\, dx\right]$$

$$I = \frac{b}{h - a} \left[\left(\frac{hx^3}{3}\right)_a^h - \left(\frac{x^4}{4}\right)_a^h\right] = \frac{b}{h - a} \left[\frac{h^4}{3} - \frac{ha^3}{3} - \left(\frac{h^4}{4} - \frac{a^4}{4}\right)\right]$$

$$I = \frac{b}{h - a} \left[\frac{4h^4 - 4ha^3 - 3h^4 + 3a^4}{12}\right] = \frac{b}{12\,(h - a)} (h^4 - 4ha^3 + 3a^4)$$

6) **Dreieck.** Die Achse ausserhalb eines Eckes parallel dessen gegenüberliegender Seite.

Fig. 13.



Nach der Aehnlichkeit der Dreiecke ist $m : b = (x - a) : (h - a)$ woraus

$$m = \frac{b\,(x - a)}{h - a}$$

Es ist das Trägheitsmoment eines Streifens $= mx^2dx = \frac{b(x - a)}{h - a}\, x^2dx$

mithin das Trägheitsmoment des ganzen Dreiecks

$$I = \int_a^h \frac{h(x-a)}{h-a} x^2 dx = \frac{b}{h-a} \int_a^h (x-a) x^2 dx$$

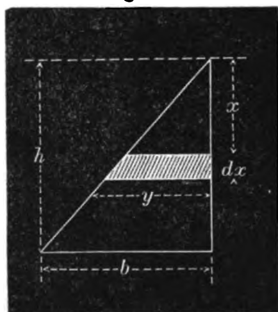
$$I = \frac{b}{h-a} \left[\int_a^h x^3 dx - \int_a^h ax^2 dx \right] = \frac{b}{h-a} \left[\left(\frac{x^4}{4}\right)_a^h - \left(\frac{ax^3}{3}\right)_a^h \right]$$

$$I = \frac{b}{h-a} \left[\frac{h^4}{4} - \frac{a^4}{4} - \left(\frac{ah^3}{3} - \frac{a^4}{3} \right) \right] = \frac{b}{h-a} \left[\frac{3h^4 - 3a^4 - 4ah^3 + 4a^4}{12} \right]$$

$$= \frac{b}{h-a} \left(\frac{3h^4 + a^4 - 4ah^3}{12} \right)$$

II. Berechnung einiger Ausflussmengen.

Fig. 14.



1) Aus einer triangulären Seitenöffnung, deren Spitze sich im Wasserspiegel befindet. Die Ausflussmenge aus einem Flächenelement des Dreiecks $dQ = y\, dx \sqrt{2gx}$. Nach der Aehnlichkeit der Dreiecke ist nun

$$y : x = b : h$$

$$y = \frac{bx}{h}, \text{ also}$$

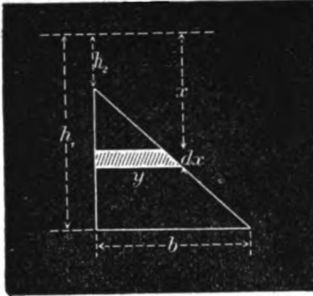
$$dQ = \frac{bx}{h} \sqrt{2gx}\, dx \text{ und folglich}$$

$$Q = \frac{b}{h} \sqrt{2g} \int_0^h x^{3/2} dx = \frac{2}{5} \frac{b}{h} \sqrt{2g} \left(x^{5/2}\right)_0^h \text{ also}$$

$$Q = \frac{2}{5} \frac{b}{h} . \sqrt{2g}\, h^{5/2} = \frac{2}{5} b h^{3/2} \sqrt{2g} = \frac{2}{5} b h \sqrt{2gh}$$

2) Aus einer triangulären Seitenöffnung, deren Spitze um die Höhe h_2, deren Basis dagegen um die Höhe h_1 unter dem Wasserspiegel liegt.

Fig. 15.



Bezeichnet x die Tiefe eines horizontalen Streifens der Ausflussöffnung unter dem Wasserspiegel dx die Breite und 4 die Länge dieses Streifens, so ist

$dQ = y \,.\, dx \,.\, \sqrt{2gx}$. Nun ist aber wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke

$$y : b = x - h_2 : h_1 - h_2, \text{ also}$$

$$y = \frac{b\,(x - h_2)}{h_1 - h_2} \text{ und deshalb}$$

$$dQ = \frac{b}{h_1 - h_2} \,.\, (x - h_2)\, dx \,.\, x^{1/2} \sqrt{2g}.$$ Daraus folgt aber

$$Q = \frac{b}{h_1 - h_2} \sqrt{2g} \,.\, \int_{h_2}^{h_1} (x - h_2)\, dx \,.\, x^{1/2} = \frac{b}{h_1 - h_2} \sqrt{2g}$$

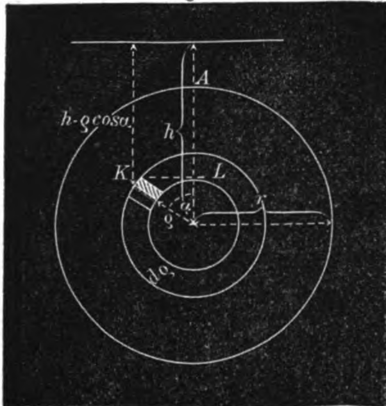
$$\int_{h_2}^{h_1} (x^{3/2}\, dx - h_2\, x^{1/2}\, dx) = \frac{b}{h_1 - h_2} \sqrt{2g} \left[\int_{h_2}^{h_1} x^{3/2}\, dx - \right.$$

$$\left. \int_{h_2}^{h_1} h_2\, x^{1/2}\, dx \right] = \frac{b}{h_1 - h_2} \sqrt{2g} \,.\, \left[\frac{2}{5} \left(x^{5/2}\right)_{h_2}^{h_1} - {}^2/_3\, h_2 \,.\, \left(x^{3/2}\right)_{h_2}^{h_1} \right]$$

$$\frac{b}{h_1 - h_2} \sqrt{2g} \left[\frac{2}{5} (h_1^{5/2} - h_2^{5/2}) - \frac{2}{3} (h_2\, h_1^{3/2} - h_2^{5/2}) \right] =$$

$$\frac{2}{15} \frac{b \sqrt{2g}}{h_1 - h_2} (3h_1^{5/2} - 5h_2\, h_1^{3/2} + 2h_2^{5/2})$$

Fig. 16.



3) Aus einer kreisförmigen Seitenöffnung vom Radius r, dessen Mittelpunkt um h unter dem Wasser liegt.

Bezeichnet ϱ den Radius irgend eines Ringes von der Breite dϱ, so fliesst durch ein Element K desselben, welches von dem Scheitel A um den Winkel α absteht, die Wassermenge

$$dQ_1 = \varrho . d\varrho . d\alpha \sqrt{2g(h - \varrho \cos\alpha)} = \varrho . d\varrho . \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\varrho}{h}\cos\alpha\right)} . d\alpha$$
$$= \varrho . d\varrho . \sqrt{2gh}\left(1 - \frac{\varrho}{h}\cos\alpha\right)^{1/2} d\alpha.$$

Nun ist aber nach dem Binominalsatz

$$\left(1 - \frac{\varrho}{h}\cos\alpha\right)^{1/2} = \left[1 - \frac{1}{2}\frac{\varrho}{h}\cos\alpha - \frac{1}{8}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^2 \cos^2\alpha - \ldots\right]$$

und nach einem Satz der Goegometrie

$$\cos\alpha^2 = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \text{ folglich}$$

$$dQ_1 = \varrho\, d\varrho \sqrt{2gh}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\varrho}{h}\cos\alpha - \frac{1}{16}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^2 (1 + \cos 2\alpha) \ldots\right] d\alpha$$

Betrachtet man zunächst ϱ als constant, so ergiebt sich die Ausflussmenge aus der ringförmigen Fläche

$$Q_1 = \varrho\, d\varrho \sqrt{2gh} . \int_0^{2\pi}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{h}\right)\cos\alpha - \frac{1}{16}\left(\frac{\varrho}{h}\right)(1 + \cos 2\alpha) \ldots\right] d\alpha$$
$$= \varrho\, d\varrho \sqrt{2gh}\left[2\pi - o - \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{h}\right)(\sin 2\alpha - \sin o) - \frac{1}{16}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^2 (2\pi - o\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sin 4\pi - \sin o)\right] = \varrho\, d\varrho \sqrt{2gh} . 2\pi\left[1 - \frac{1}{16}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^2\right]$$

Integrirt man nun noch zwischen den Grenzen $\varrho = r$ und $\varrho = o$, so erhalten wir das Ausflussquantum für die kreisförmige Oeffnung

$$Q = 2\pi \sqrt{2gh} . \int_0^r \left[1 - \frac{1}{16}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^2\right] \varrho . d\varrho = 2\pi \sqrt{2gh}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{16}\frac{r^4}{4h^2}\right]$$
$$= \pi r^2 \sqrt{2gh} . \left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \ldots\right] = F . \sqrt{2gh}\left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \ldots\right].$$

§. 46.

Uebungsbeispiele

1) $b\int_n^m \cos(a + bx)\, dx = \sin(a + bm) - \sin(a + bn)$ vergl. S. 16. Gl. 5

$$= 2\cos\left(a + b\,\frac{m + n}{2}\right) . \sin\left(b . \frac{m - n}{2}\right)$$

2) $\int_2^5 \cos(0,2 + \frac{1}{10}x)\,dx = 2,547$

Setzen wir in Nr. 1 $m = 5$, $n = 2$, $a = 0,2$ und $b = {}^1/_{10}$, so folgt

1) $\frac{1}{10}\int_2^5 \cos(0,2 + \frac{1}{10}x)\,dx = \sin(0,2 + \frac{1}{10}.5) - \sin(0,2 + \frac{1}{10}.2)$

2) $\int_2^5 \cos(0,2 + \frac{1}{10}x)\,dx = 10\,\{\sin 0,7 - \sin 0,4\}$

Um die Werthe von sin 0,7 und 0,4 zu finden, müssen wir berücksichtigen, dass 0,7 und 0,4 **Bogenlängen** sind. Setzen wir demnach die Winkel, welche diesen Bogenlängen entsprechen, resp. gleich α und β, so finden wir

3) $\alpha = \frac{0,7}{\pi}.180^0 = \frac{0,7}{3,1416}.180^0 = 40^0\,6'$

4) $\beta = \frac{0,4}{\pi}.180^0 = \frac{0,4}{31416}.180^0 = 22^0\,55'$

Nach dem Vorstehenden ist also

5) $\overset{\smile}{0,7} = \text{arc}\,40^0\,6'$

6) $\overset{\smile}{0,4} = \text{arc}\,22^0\,55'$

Hieraus folgt

7) $\sin \overset{\smile}{0,7} = \sin 40^0\,6' = 0,6441\,..$

8) $\sin \overset{\smile}{0,4} = \sin 22^0\,55' = 0,3894\,..$

Setzen wir diese Werthe von sin 0.7 und sin 0.4 in Gleichung 2 ein, so folgt

9) $\int_2^5 \cos(0,2 + \frac{1}{10}x) = 10\,\{0,6441\,.. - 0,3894\,.\}$

10) $\int_2^5 \cos(0,2 + \frac{1}{10}x)\,dx = 10\,.\,0,2547\,..$

3) $\int_s^r m\,.\,e^{a+bx}.\,dx = \frac{m}{b}e^{a+br} - \frac{m}{b}e^{a+bs}$ (Seite 17, Gl. 4.)

$= \frac{m}{b}\left\{e^{a+br} - e^{a+bs}\right\}$

4) $\int_2^7 3\,.\,e^{2+0,4.x}\,dx = 788.025$

Setzen wir in Nr. 3 $m = 3$, $a = 2$, $b = 0,4$, $r = 7$ und $s = 3$, so folgt

1) $\int_2^7 3\,.\,e^{2+0,4.x}\,dx = \frac{3}{0,4}\left\{e^{2+0,4.7} - e^{2+0,4.2}\right\}$

$= 7,5\left\{e^{4.8} - e^{2.8}\right\}$

Nun ist

2) $l\,e^{4.8} = 4{,}8$ also $e^{4.8} = 121{,}51\,..$

3) $l\,e^{2.8} = 2{,}8$ also $e^{2.8} = 16{,}44\,..$

Setzen wir die Werthe von $e^{4.8}$ und $e^{2.8}$ nach den Gleichungen 2 u. 3 in Gleichung 1 ein, so folgt

$$4)\ \int_2^7 3\,.\,e^{2+0{,}4.x}\,dx = 7{,}5.\ \{121{,}51 - 16{,}44\}$$
$$= 788{,}025$$

$$5)\ \int_n^m \frac{dx}{\cos^2(a+bx)} = \frac{1}{b}\ \{tg\,(a+bm) - tg\,(a+bn)\}$$

(Seite 18, Gleichung 10.)

Wir empfehlen dem Leser nach diesem Beispiel ein Zahlenbeispiel zu bilden.

$$6)\ \int_n^m \frac{b\,dx}{1+(a+bx)^2} = arc\,tg\,(a+bm) - arc\,tg\,(a+bn)$$

Seite 18, Seite 11.

$$7)\ \int_{0,1}^7 \frac{4\,dx}{1+(3+4x)^2} = 0{,}2624$$

Setzen wir in Nr. 6 $m = 7$, $n = 0{,}1$, $a = 3$, $b = 4$, so folgt

$$1)\ \int_{0,1}^7 \frac{4\,.\,dx}{1+(3+4x)^2} = arc\,tg\,(3+4\,.\,7) - arc\,tg\,(3+4\,.\,0{,}1)$$
$$= arc\,tg\,3\,1 - arc\,tg\,3{,}4$$

Schlagen wir nun in trigonometrischen Tafeln die Winkel auf, deren Tangenten resp. gleich 3 1 und 3,4 sind, so finden wir

3) $tg\,88^0\,9' = 3{,}1$

4) $tg\,73^0\,7' = 3{,}4$

Hiernach ist

5) $arc\,tg\,3{,}1 = arc\,88^0\,9'$

6) $arc\,tg\,3{,}4 = arc\,73^0\,7'$

Aus den Gleichungen 5 und 6 folgt ferner

7) $arc\,tg\,3{,}1 - arc\,tg\,3{,}4 = arc\,88^0\,9' - arc\,73^0\,7 = arc\,15^0\,2'$

8) $arc\,tg\,3{,}1 - arc\,tg\,3{,}4 = \frac{15\,.\,60+2}{180\,.\,60}\,.\,\pi = 0{,}2624.$

Setzen wir nach Gleichung 8 in Gleichung 1 für arc tg 3 1 — arc tg 3,4 seinen Werth ein, so folgt

$$9)\ \int_{0,1}^7 \frac{4\ dx}{1+(3+4x)^2} = 0{,}2624.\ \text{w. z. b. w.}$$

8) $$\int_n^m \frac{dx}{\sqrt{1-(a+bx)^2}} = \frac{1}{b}\{\arcsin(a+bm) - \arcsin(a+bn)\}$$
(vergl. Seite 18, Gleichung 12.)

Die Grenzen von m und n müssen dem Werthe nach zwischen $\frac{1-a}{b}$ und $-\frac{1+a}{b}$ liegen, wenn das vorliegende bestimmte Integral einen reellen Werth haben soll. Warum?

9) $$\int_{-0,9}^{-0,4} \frac{dx}{\sqrt{1-(2+3x)^2}} = 0,568$$

Setzen wir in Nr. 8 $a = 2$, $b = 3$, $m = -0,4$, $n = -0,9$, so folgt

1) $$\int_{-0,9}^{-0,4} \frac{dx}{\sqrt{1-(2+3x)^2}} = \tfrac{1}{3}\{\arcsin(2-1,2) - \arcsin(2-2,7\}$$

2) $$\int_{-0,9}^{-0,4} \frac{dx}{\sqrt{-1(2+3x)^2}} = \tfrac{1}{3}\{\arcsin(0,8) - \arcsin(-0,7)$$

Durch Anwendung trigonometrischer Tafeln findet man ferner

3) $0,8 = \sin 53^0\, 8'$

4) $0,7 = \sin 44^0\, 26'$

Hieraus folgt

5) $\arcsin 0,8 = \text{arc}\, 53^0\, 8'$

6) $\arcsin(-0,7) = -\text{arc}\, 44^0\, 26'$

7) $\arcsin 0,8 - \arcsin(-0,7) = \text{arc}(53^0\, 8' + 44^0\, 26') = \text{arc}\, 97^0\, 34$

Ferner ist

8) $\text{arc}\, 97^0\, 34, = \frac{97 \cdot 60 + 34}{180 \cdot 60}\pi = 1,703$

Setzen wir hiernach den Werth von $\text{arc}\, 97^0\, 34'$ in Gleichung 7 ein, so folgt

9) $\arcsin 0,8 - \arcsin(-0,7) = 1,703.$

Setzen wir nach Gl. 9 den Werth von $\arcsin 0,8 - \arcsin(-0,7)$ in Gleichung 2 ein, so ergiebt sich

10) $$\int_{-0,9}^{-0,4} \frac{dx}{\sqrt{1-(2+3x)^2}} = \tfrac{1}{3} \cdot 1,703 = 0,568.$$

10) $$\int_n^m \frac{dx}{\sin x} = l\,\text{tg}\,\frac{m}{2} - l\,\text{tg}\,\frac{n}{2}$$ Nr. 3, Seite 19 und 20.

Sind die Werthe von m und n willkürlich, wenn die vorliegende Function zwischen den Grenzen m und n continuirlich bleiben soll?

11) $\int_{n}^{m} \text{arc sin x . dx} = (\text{m . arc sin m} + \sqrt{1 - m^2})$
$- (\text{n arc sin n} + \sqrt{(1 - n^2)})$

(Vergl. Seite 36, Nr. 10.)

Ist der Werth des vorliegenden bestimmten Integrals vollkommen bestimmt? (Man beachte, dass $\sin x = \sin(\pi - x) = \sin(2\pi + x)$ etc.)

Die Werthe von m und n müssen zwischen den Grenzen $+1$ und -1 liegen, wenn das vorstehende bestimmte Integral einen reellen Sinn haben soll. — Warum?

12) $\int_{n}^{m} \text{tg . x dx} = l \frac{\cos n}{\cos m}$ (Seite 36, Nr. 11.)

13) $\int_{n}^{m} \frac{d}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left\{ l \frac{m - a}{m + a} - l \frac{n - a}{n + a} \right\}$

Ist der Fall von besonderem Interesse, dass eine der Grössen m und n zwischen $+a$ und $-a$ liegt, während die anderen entweder grösser als $+a$ oder kleiner als $-a$ ist?

14) $\int_{4}^{10} \frac{dx}{x^2 - 9} = 0{,}1916.$

15) $\int_{n}^{m} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \left\{ \text{arc tg} \frac{m}{a} - \text{arc tg} \frac{n}{a} \right\}$

$= \frac{1}{a} . \text{arc tg} \frac{a(m - n)}{a^2 + mn}$

Bemerkung. Wenn es nicht einleuchtend sein sollte, dass

$$\text{arc tg} \frac{m}{a} - \text{arc tg} \frac{n}{a} = \frac{1}{a} . \text{arc tg} \frac{a(m - n)}{a^2 + mn}$$

so setze man

1) $u = \text{arc tg } y$ oder $y = \text{tg } u$

2) $v = \text{arc tg } z$ oder $z = \text{tg } v$

Hieraus folgt

3) $\text{arc tg } y - \text{arc tg } z = u - v$

Nun ist ferner

4) $\text{tg}(u - v) = \frac{\text{tg } u - \text{tg } v}{1 + \text{tg } u . \text{tg } v}$

Setzen wir in Gleichung 4 für tg u und tg v ihre Werthe nach den Gleichungen 1 und 2, so folgt

5) $\text{tg}(u - v) = \frac{y - z}{1 + y . z}$ also

6) $(u - v) = \text{arc tg}\,\frac{y - z}{1 + y \cdot z}$ oder nach Gl. 3.

7) $\text{arc tg}\, y - \text{arc tg}\, z = \text{arc tg}\,\frac{y - z}{1 + y \cdot z}$

Setzt man in Gleichung 7 $y = \frac{m}{a}$, $z = \frac{n}{a}$, so folgt

8) $\text{arc tg}\,\frac{m}{a} - \text{arc tg}\,\frac{n}{a} = \text{arc tg}\,\frac{\frac{m}{a} - \frac{n}{a}}{1 + \frac{m}{a} \cdot \frac{n}{a}}$

9) $\text{arc tg}\,\frac{m}{a} - \text{arc tg}\,\frac{n}{a} = \text{arc tg}\,\frac{a(m - n)}{a^2 + m \cdot n}$ w. z. b. w.

16) $\int_2^7 3x^2\, dx = 335$

17) $\int_4^{25} 3 \cdot \sqrt{x} \cdot dx = 234$

18) $$\frac{b}{a}\int_m^n \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{ab}{2}\,\text{arc sin}\,\frac{n}{a} = \frac{bn}{2a}\sqrt{a^2 - n^2}$$
$$- \frac{ab}{2}\,\text{arc sin}\,\frac{m}{a} - \frac{bm}{2a}\sqrt{a^2 - m^2}$$

19) $$\frac{b}{a}\int_m^n \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = - \frac{ab}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{a^2 - n^2}}{n} - \frac{bn}{2a}\sqrt{a^2 - n^2}$$
$$+ \frac{ab}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{a^2 - m^2}}{m} - \frac{bm}{2a}\sqrt{a^2 - m^2}$$

Bemerkung. Der Augenschein lehrt, dass die Ausdrücke, welche in Nr. 18 u. 19 für $\frac{b}{a}\int_m^n \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$ gefunden sind, **in der Form** sehr von einander abweichen. — Trotzdem aber müssen sie nach **dem Werthe nach** gleich sein.

Um den Leser hiervon zu überzeugen, wollen wir zeigen, dass sich die rechte Seite der Gleichung 18 ohne Integration in einen Ausdruck **umformen** lässt, welcher mit der rechten Seite von Gleichung 19 **identisch** ist. — Zu dem Ende setzen wir nach Bemerkung 2, Seite 7

1) $\text{arc sin}\,\frac{n}{a} = \frac{\pi}{2} - \text{arc cos}\,\frac{n}{a}$

2) $\text{arc sin}\,\frac{m}{a} = \frac{\pi}{2} - \text{arc cos}\,\frac{m}{a}$

Hieraus folgt

$$3)\quad \left.\begin{array}{l} \frac{ab}{2}.\operatorname{arc\,sin}\frac{n}{a}+\frac{bn}{2a}\sqrt{a^2-n^2} \\ -\frac{ab}{2}.\operatorname{arc\,sin}\frac{m}{a}-\frac{bm}{2a}\sqrt{a^2-m^2} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,cos}\frac{n}{a}\right)+\frac{bn}{2a}\sqrt{a^2-n^2} \\ -\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,cos}\frac{m}{a}\right)-\frac{bm}{2a}\sqrt{a^2-m^2} \end{array}\right.$$

$$4)\quad \left.\begin{array}{l} \frac{ab}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{n}{a}+\frac{bn}{2a}\sqrt{a^2-n^2} \\ -\frac{ab}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{m}{a}-\frac{bm}{2a}\sqrt{a^2-m^2} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} -\frac{ab}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{n}{a}+\frac{bn}{2a}\sqrt{a^2-n^2} \\ +\frac{ab}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{m}{a}-\frac{bm}{2a}\sqrt{a^2-m^2} \end{array}\right.$$

Setzen wir nun

$$5)\quad \operatorname{arc\,cos}\frac{n}{a}=u \text{ so ist } \frac{n}{a}=\cos u$$

$$6)\quad \operatorname{tg} u=\frac{\sin u}{\cos u}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 u}}{\cos u} \text{ also nach Gleichung 5 u. 6}$$

$$7)\quad \operatorname{tg} u=\frac{\sqrt{1-\frac{n^2}{a^2}}}{\frac{n}{a}}=\frac{\sqrt{a^2-n^2}}{n}$$

Hieraus folgt

$$8)\quad u=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-n^2}}{n}$$

Setzen wir hierin für u seinen Werth nach Gleichung 5, so folgt

$$9)\quad \operatorname{arc\,cos}\frac{n}{a}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-n^2}}{n}$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich

$$10)\quad \operatorname{arc\,cos}\frac{m}{a}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-n^2}}{m}$$

Setzen wir die Werthe von $\operatorname{arc\,cos}\frac{n}{a}$ und $\operatorname{arc\,cos}\frac{m}{a}$ nach den Gleichungen 9 und 10 in Gleichung 4 ein, so folgt

$$11)\quad \left.\begin{array}{l} \frac{ab}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{n}{a}+\frac{bn}{2a}\sqrt{a^2-n^2} \\ -\frac{ab}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{m}{a}-\frac{bm}{2a}\sqrt{a^2-m^2} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} -\frac{ab}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-n^2}}{n}+\frac{bn}{2a}\sqrt{a^2-n^2} \\ +\frac{ab}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-m^2}}{m}-\frac{bm}{2a}\sqrt{a^2-m^2} \end{array}\right.$$

Hiermit ist also gezeigt, dass die Ausdrücke, welche wir in Nr. 18 und Nr. 19 für $\frac{b}{a}\int_m^n\sqrt{a^2-x^2}\,.\,dx$ gefunden haben, einander gleich sind;

$$20)\quad \frac{4}{6}\int_1^5\sqrt{36-x^2}\,.\,dx=13{,}578.$$

Bemerkungen.

1) Wir empfehlen dem Anfänger, das vorliegende bestimmte Integral, sowohl nach Nr. 18, als auch nach Nr. 19 zu lösen, und sich zu überzeugen, dass beide Wege dasselbe Resultat ergeben.

2) Wie gross ist $\int_{-4}^{7}\sqrt{50-x^2}\,.\,dx$ und $\int_{-5}^{6}\sqrt{100-x^2}\,dx$

3) Veranlasst das bestimmte Integral

$$\int_{-5}^{3}\sqrt{16-x^2}\,.\,dx$$

zu einer besondern Bemerkung?

§. 47.

Einführung einer neuen Variabeln in das bestimmte Integral

$$\int_n^m f(x+c)\,.\,dx = \int_{n+c}^{m+c} fx\,.\,dx;\quad \int_n^m f(x-c)\,.\,dx = \int_{n-c}^{m-c} fx\,.\,dx.$$

Setzen wir in dem bestimmten Integral $\int_n^m f(x+c)\,dx$

1) $x+c=u$ also $dx=du$

so erhalten wir

2) $\int_n^m f(x+c)\,dx = \int_{u_0}^{u'} fu\,.\,du.$

wo die Grenzen u_0 und u' noch näher bestimmt werden müssen.

Man erkennt aber ohne Weiteres, dass u_0 und u' resp. diejenigen Werthe von u sein müssen, welche aus Gleichung 1 hervorgehen, wenn man x resp. gleich n oder m setzt.

Aus Gleichung 1 folgt

3) $u=m+c$ wenn $x=m$; d. h. $u'=m+c$

4) $u=n+c$ wenn $x+n$; d. h. $u_0=n+c$

Setzen wir nach Nr. 3 und 4 die Werthe von u_0 und u' in Gleichung 2 ein, so folgt

5) $\int_n^m f(x+c)\,dx = \int_{n+c}^{m+c} fu\,.\,du.$

Offenbar wird aber der Werth des bestimmten Integrals $\int_{n+c}^{m+c} fu \,.\, du$ nicht geändert, wenn wir in demselben x statt u setzen, deshalb folgt aus Gleichung 5

$$6) \int_n^m f(x+c)\,dx = \int_{n+c}^{m+c} fx \,.\, dx.$$

Setzen wir in dem bestimmten Integral $\int_n^m f(x-c)\,dx$

$$7) \; x - c = u \text{ also } dx = du$$

so folgt daraus

$$8) \int_n^m f(x-c)\,dx = \int_{u_0}^{u'} fu \,.\, du$$

wo die Werthe von u_0 und u' noch näher zu bestimmen sind. — Es leuchtet aber ein, dass u_0 und u' diejenigen Werthe von u sein müssen, welche wir erhalten, wenn in Gleichung 7 x resp. gleich n oder m gesetzt wird. Aus Gleichung 7 folgt aber

$$9) \; u = m - c \text{ wenn } x = n \text{ d. h. } u' = n - c$$

$$10) \; u = m - c \qquad x = m \text{ d. h. } u_0 = m - c.$$

Setzen wir hiernach die Werthe u_0 und u' in Gl. 8 ein, so ergiebt sich

$$11) \int_n^m f(x-c)\,dx = \int_{n-c}^{m-c} fu \,.\, du.$$

Nun ist $\int_{n-c}^{m-c} fu \,.\, du = \int_{n-c}^{m-c} fx \,.\, dx$ also ist nach Gleichung 11

$$12) \int_n^m f(x-c)\,dx = \int_{n-c}^{m-c} fx \,.\, dx.$$

Bemerkungen.

1. Man kann die Gleichungen 6 und 12 noch auf folgendem Wege nachweisen:

Wir entwickeln zunächst das allgemeine Integral von fx . dx. Ist nun

$$13) \int fx \,.\, dx = Fx + C,$$

dann ist

$$14)\ \int_{n+c}^{m+c} fx\, dx = F(m+c) - F(n+c)$$

$$15)\ \int_{n}^{m} f(x+c)\, dx = F(m+c) - F(n+c).$$

Aus den Gleichungen 14 und 15 folgt

$$16)\ \int_{n}^{m} f(x+c)\, dx = \int_{n+c}^{m+c} fx\,.\,dx, \text{ (vergl. Gleichung 6).}$$

Ferner folgt aus Gleichung 13

$$17)\ \int_{n}^{m} f(x-c)\, dx = F(m-c) - F(n-c)$$

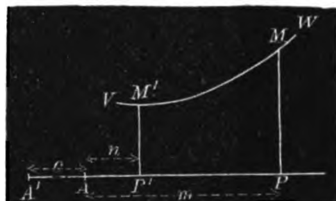
$$18)\ \int_{n-c}^{m-c} fx\,.\,dx = F(m-c) - F(n-c).$$

Aus den Gleichungen 17 und 18 ergiebt sich

$$19)\ \int_{n}^{m} f(x-c)\,.\,dx = \int_{n-c}^{m-c} fx\,.\,dx \text{ (vergl. Gl. 12).}$$

2) Unser Satz lässt sich auf graphischem Wege folgendermassen veranschaulichen.

Fig. 17.



Wir legen Fig. 17 das Coordinaten-System zu Grunde, **dessen Anfangspunkt in A liegt** und construiren die Curve VW, welche der Gleichung

$$20)\ y = f(x+c)$$

entspricht, dann ergiebt sich nach den Bezeichnungen unserer Figur und ferner

$$21)\ M'P'PM = \int_{n}^{m} f(x+c)\,.\,dx$$

Es ist zu beachten, dass $y = f(x+c)$ die Gleichung unserer Curve ist, für den Fall, dass der Anfangspunkt des Coordinaten-Systems der Punkt A ist.

Verlegen wir nun den Anfangspunkt des Coordinaten-Systems von A nach dem Punkte A' — welcher von A um die Länge c entfernt ist —, **so verwandelt** sich nach Gleichung 20 die Gleichung der Curve VW in die Gleichung

$$22)\ y = fx.$$

Wir erhalten dann

$$23)\ M'P'PM = \int_{n+c}^{m+c} fx\,.\,dx$$

Dieser Gleichung liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass $y = fx$ die Gleichung der Curve VW ist, und dass der Anfangspunkt des Coordinaten-Systems in A' liegt.

Aus den Gleichungen 21 und 23 folgt jetzt

$$24)\ \int_{n}^{m} f(x-c)\, dx = \int_{n+c}^{m+c} fx\,.\,dx. \text{ Vergl. Gl. 6 und 16.}$$

In ähnlicher Weise lässt sich mit Hülfe graphischer Darstellung zeigen, dass

$$25)\ \int_n^m f(x-c)\,dx = \int_{n-c}^{m-c} fx\,.\,dx.$$ Vergl. Gl. 12 u. 19.

§. 48.

Fortsetzung.

$$\int_n^m f(c\,x)\,.\,dx = \int_{n\,c}^{m\,c} fx\,.\,dx \text{ und } \int_n^m f\frac{x}{c}\,.\,dx = \int_{\frac{n}{c}}^{\frac{m}{c}} fx\,.\,dx.$$

Wenn $1)\ \int fx\,.\,dx = Fx + C$ so ist

$$2)\ \int f(c\,x)\,.\,dx = F(c\,x) + C$$

$$3)\ \int f\frac{x}{c}\,dx = F\frac{x}{c} + C.$$

Aus Gleichung 2 folgt nun

$$4)\ \int_n^m f(c\,x)\,.\,dx = F(c\,m) - F(c\,n)$$

Aus Gleichung 1 folgt

$$5)\ \int_{n\,c}^{m\,c} fx\,.\,dx = F(c\,m) - F(n\,c).$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 4 und 5 sind gleich, also sind auch ihre linken Seiten, oder es ist

$$6)\ \int_n^m f(c\,x)\,.\,dx = \int_{n\,c}^{m\,c} fx\,.\,dx$$ w. z. b. w.

Aus Gleichung 3 folgt

$$7)\ \int_n^m f\frac{x}{c}\,.\,dx = F\frac{m}{c} - F\frac{n}{c}$$

Aus Gleichung 1 folgt

$$8)\ \int_{\frac{n}{c}}^{\frac{m}{c}} fx\,.\,dx = F\frac{m}{c} - F\frac{n}{c}$$

Weil nun die rechten Seiten von Gleichung 7 und 8 gleich sind, so müssen auch ihre linken Seiten gleich sein, oder es ist

$$9) \int_n^m f\frac{x}{c}.dx = \int_{\frac{n}{c}}^{\frac{m}{c}} fx.dx.$$

§. 49.

Fortsetzung. — In das bestimmte Integral $\int_n^m fx\ dx$ wird für x eine neue Variable u eingeführt nach der Gleichung $\psi x = u$.

Wenn $1) \int fx.dx = Fx + C$ ist, so ist

$$2) \int_n^m fx.dx = Fm - Fn$$

Wird es nun wünschenswerth für x eine neue Variable einzuführen, etwa nach der Gleichung

$$3) \psi x = u$$

und erhalten wir, dadurch dass wir Gleichung 3 für x auflösen

$$4) x = \varphi u.$$

$$5) dx = \varphi' u\, du,$$ so ist nach Gleichung 1

$$6) \int fx.dx = \int f(\varphi u).\varphi' u\, du = F(\varphi u) + C.$$

Aus Gleichung 6 folgt

$$7) \int_{\psi n}^{\psi m} f(\varphi u)\,\varphi' u\, du = F\{\varphi(\psi m)\} - F\{\varphi(\psi n)\}$$

Setzen wir nun den Werth von u nach Gleichung 3 in Gleichung 4, so folgt

$$8) x = \varphi(\psi x)$$

Hieraus folgt $\varphi(\psi m) = m$ und $\varphi(\psi n) = n$.

Setzen wir diese Werthe von $\varphi(\psi m)$ und (φn) in Gleichung 7 ein, so folgt

$$9)\ \int_{\psi n}^{\psi m} f(\varphi u)\, \varphi' u\, du = Fm - Fn.$$

Da nun die rechten Seiten der Gleichungen 9 und 2 übereinstimmen, so folgt aus diesen Gleichungen

$$10)\ \int_{n}^{m} fx\,.\,dx = \int_{\psi n}^{\psi m} f(\varphi u)\, \varphi' u\, du.$$

Man beachte, dass nach Gleichung 3 und 4 aus der Gleichung

$$\psi x = u$$

die Gleichung

$$x = \varphi u$$

entstanden ist.

Bemerkungen.

1) Der vorstehenden Entwickelung liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass Gleichung 3, nämlich

$$11)\ \psi x = u$$

nach welcher wir u für x substituirt haben, für x nur **eine reelle Wurzel**, nämlich $x = \varphi u$, giebt.

2) Wenn die Gleichung „$\psi x = u$“ für x **mehrere reelle Wurzeln** giebt, so erfordert die Umformung des bestimmten Integrals grosse Aufmerksamkeit, wenn man vor Fehlern sicher sein will.

Um dies an einem speciellen Beispiele zu zeigen, wollen wir das bestimmte Integral $\int_{1}^{7} (x^2 - 6x + 13)\,.\,dx$ behandeln.

Setzen wir zu dem Ende

$$12)\ x^2 - 6x + 13 = u \text{ (vergl. Gl. 3)}$$

so folgt

$$13)\qquad x = 3 \pm \sqrt{u - 4}$$

$$14)\qquad dx = \pm \frac{du}{\sqrt{u - 4}}$$

Weil man nach Gleichung 14, **für jeden Werth von u, dx sowohl gleich** $+\frac{du}{2\sqrt{u-4}}$ **als auch gleich** $-\frac{du}{2\sqrt{u-4}}$ sein kann, so sollte man glauben (?), dass man nach Gleichung 12 und 14 **nach Belieben setzen könne:**

entweder
$$15)\ \int_{1}^{7} (x^2 - 6x + 13)\, dx = \int_{1^2 - 6.1 + 13}^{7^2 - 6.7 + 13} u\,.\left(+\frac{du}{2\sqrt{u-4}}\right) = \int_{8}^{20} \frac{u\, du}{2\sqrt{u-4}}$$

oder
$$16)\ \int_{1}^{7} (x^2 - 6x + 13)\, dx = \int_{1^2 - 6.1 + 13}^{7^2 - 6.7 + 13} u\,.\left(-\frac{du}{2\sqrt{u-4}}\right) = \int_{8}^{20} -\frac{u\, du}{2\sqrt{u-4}}$$

Aus Gl. 6, Seite 5

$$17)\ \int_1^7 (x^2 - 6x + 13)\, dx = 48.$$

Ferner erhält man

$$18)\ \int_8^{20} \frac{u\, du}{2\sqrt{u-4}} = 26^2/_3$$

$$19)\ \int_8^{20} -\frac{u\, du}{2\sqrt{u-4}} = -26^2/_3$$

Aus den Gleichungen 17 bis 19 folgt also,

dass $\int_1^7 (x^2 - 6x + 13)\, dx$ weder gleich $\int_8^{20} \frac{u\, du}{2\sqrt{u-4}}$

noch gleich $\int_8^{20} -\frac{u\, du}{2\sqrt{u-4}}$ sein kann.

Vergleichen wir dieses Resultat mit den Gleich. 15 u. 16, so ergiebt sich, **dass die Gleichungen 15 u. 16 falsch sind, so dass in der Entwickelung derselben ein Fehler gemacht sein muss.** — Aus dem folgenden Paragraphen wird erhellen, welcher Art dieser Fehler ist.

§. 50.

Fortsetzung von §. 49. Die Substitutions-Gleichung $\psi x = u$ giebt für x mehr als eine reelle Wurzel.

Wenn in ein bestimmtes Integral $\int_n^m fx\, dx$ eine neue Variable eingeführt werden soll, nach der Gleichung

$$1)\ \psi x = u$$

und wenn diese Gleichung (1) **für x mehrere reelle Wurzeln** giebt, so sind mit der Umformung des bestimmten Integrals eigenthümliche Schwierigkeiten verbunden. Wir wollen deshalb versuchen diesen Fall an einem einfachen speciellen Beispiele zu erörtern. — Zu dem Ende nehmen wir das Beispiel wieder auf, welches in Bemerkung 2, Seite 122 besprochen ist.

Dort setzen wir in dem bstimmten Integral

$$\text{``}\int_1^7 (x^2 - 6x + 13)\text{''}$$

2) $x^2 - 6x + 13 = u$

Hieraus folgt

3) $x = 3 \pm \sqrt{u-4}$

4) $dx = \pm \dfrac{du}{2\sqrt{u-4}}$

Wollen wir nach Gleichung 2 und 4 die Werthe von $x^2 - 6x + 13$ und dx in das bestimmte Integral

$\int_1^7 (x^2 - 6x + 13) . dx$ einsetzen, so entsteht die Frage, welche Bedeutung das Vorzeichen $\pm$ in Gleichung 4 hat.

Wir wissen nun schon aus Bemerkuug 2, Seite 122, dass wir trotz Gleichung 4 **durchweg weder** $dx = + \dfrac{du}{2\sqrt{u-4}}$ **noch** $dx = - \dfrac{du}{2\sqrt{u-4}}$ setzen dürfen. — **Welche Bedeutung hat dann aber das Zeichen $\pm$ in Gleichung 4?** — Um diese Frage zu entscheiden beachte man, dass nach Gleichung 3 zu jedem Werthe von u zwei Werthe von x gehören, von denen der eine gleich $3 + \sqrt{u-4}$, also **grösser** als 3 ist, während der andre gleich $3 - \sqrt{u-4}$, also **kleiner** als 3 ist. Diesen beiden verschiedenen Werthen von x, welche zu demselben Werthe von u gehören, entsprechen verschiedene Werthe von dx, und man sieht aus dem Zusammenhange zwischen den Gleichungen 3 und 4, dass für den kleineren Werth von x, d. i. für $x < 3$

$$dx = - \frac{du}{2\sqrt{u-4}}$$

während für den grösseren Werth von x, d. i. für $x > 3$

$$dx = + \frac{du}{2\sqrt{u-4}}$$

Berücksichtigen wir dieses bei Umformung unseres Integrals $\int_1^7 (x^2 - 6x + 13) . dx$, und beachten wir, dass die untere Grenze desselben **kleiner**, die obere Grenze aber **grösser** als 3 ist, so liegt auf der Hand, dass wir in unserm bestimmten Integral dx **durchweg weder gleich** $-\frac{du}{2\sqrt{u-u}}$ **noch gleich** $+\frac{du}{2\sqrt{u-4}}$ setzen dürfen. Hierdurch werden wir darauf geführt, unser bestimmtes Integral

$\int_1^7 (x^2 - bx + 13)\, dx$, in die beiden Integrale

$\int_1^3 (x^2 - bx + 13)\, dx$ und $\int_3^7 (x^2 - bx + 13)\, dx$ zu zerlegen, d. i. in zwei solche Integrale, von denen das eine 3 zur **oberen**, das andere 3 zur **unteren** Grenze hat. Dann ergiebt sich aus den Gleichungen 2 und 4 mit Hülfe der vorstehenden Erörterungen

$$5)\ \int_1^3 (x^2 - 6x + 13)\, dx$$

$$= \int_{1^2 - 6.1 + 13}^{3^2 - 6.3 + 13} u\left(-\frac{du}{2\sqrt{u-4}}\right) = \int_8^4 \frac{-u\, du}{2\sqrt{u-4}}$$

$$6)\ \int_3^7 (x^2 - 6x + 13)\, dx$$

$$= \int_{3^2 - 6.3 + 13}^{7^2 - 6.7 + 13} u\left(+\frac{du}{2\sqrt{u-4}}\right) = \int_4^{20} \frac{u\, du}{2\sqrt{u-4}}$$

Durch Addition der Gleichungen 5 und 6 folgt

$$7)\ \int_1^3 (x^2 - 6x + 13)\, dx + \int_3^7 (x^2 - 6x + 13)\, dx$$

$$= \int_8^4 \frac{-u\, du}{2\sqrt{u-4}} + \int_4^{20} \frac{u\, du}{2\sqrt{u-4}}$$

$$8)\ \int_1^7 (x^2 - 6x + 13)\,dx = \int_8^4 \frac{-u\,du}{2\sqrt{u-4}} + \int_4^{20} \frac{u\,du}{2\sqrt{u-4}}$$

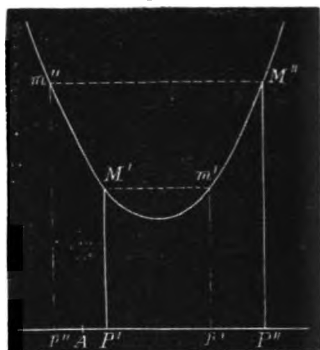
Bemerkungen.

1) Um die vorstehende Untersuchung auf graphischem Wege zu veranschaulichen, zeichnen wir Fig. 18 die Curve, welche der Substitutions-Gleichung (2)

$$9)\ u = 2^2 - 6x + 13$$

genügt.

Fig. 18.



$AP' = 1.$ $AP'' = 7$
$Ap' = 5.$ $Ap'' = -1$
$M'P' = m'p' = 8.$ $M''P'' = m''p'' = 20$

Discutiren wir diese Curve, so ergiebt sich, dass dieselbe für alle Werthe von x, welche kleiner als 3 sind, fortwährend fällt, während sie über $x = 3$ hinaus fortwährend steigt; dass also $\frac{du}{dx}$ negativ ist, so lange x kleiner als 3 ist, während $\frac{du}{dx}$ positiv ist, wenn x grösser ist als 3.

Hierdurch bestätigt sich was wir schon im Haupt-Texte gefunden haben, dass wir nämlich zwischen den Grenzen $x = 1$ und $x = 7$ durchweg weder $dx = + \frac{du}{2\sqrt{u-4}}$ noch $dx = - \frac{du}{2\sqrt{u-4}}$ setzen dürfen.

2) Es lässt sich mit Hülfe der Figur 16 auch leicht nachweisen, warum Gleichung 15 u. 16, Seite 122 **falsch** sind. Das bestimmte Integral $\int_1^7 (x^2 - 6x + 13)\,dx$ ist nämlich gleich der Fläche M'P'P''M'', dessen Grenzen durch die Abscissen $x = 1$ und $x = 7$ bestimmt sind. Das bestimmte Integral $\int_8^{20} u . \frac{du}{2\sqrt{u-4}}$ ist dagegen ein Stück der Fläche unserer Curve, von welchem die Anfangs-Ordinate $= 8$ und die End-Ordinate gleich $= 20$ ist.

Da nun **sowohl** M'P' **als auch** m'p' gleich 8 ist, und ferner **sowohl** M''P'' **als auch** m''p'' gleich 20 ist,

so ist durch die Länge der begrenzenden Ordinaten **allein** unser Flächen-

stück nicht vollkommen bestimmt. Weil aber in $\int_8^{20} u . \frac{du}{2\sqrt{u-4}}$ dx zwischen den Grenzen $u = 8$ und $u = 20$ gleich plus $\frac{du}{2\sqrt{u-4}}$ sein soll, so müssen die End-Ordinaten der entsprechenden Fläche rechts vom Puncte M liegen. Hierdurch sind also die Ordinaten M′P′ und m″p″ ausgeschlossen; also ist

$$\int_8^{20} u . \frac{du}{2\sqrt{u-4}} = m'p'P''M''.$$

Mithin kann $\int_8^{20} \frac{du}{2\sqrt{u-4}}$ nicht gleich M′P′P″M″ d. i. es kann nicht gleich $\int_1^7 (x^2 - 6x + 13)\,dx$ sein.

3) Da m′p′ der Abscisse $x = 5$ entspricht, so ist

$$\int_8^{20} u . \frac{du}{2\sqrt{u-4}} = \int_5^7 (x^2 - 6x + 13)\,dx.$$

4) Welchen Ausdruck erhalten wir für $\int_1^7 f(x^2 - 6x + 13)\,dx$, wenn in demselben $x^2 - 6x + 13$ gleich u gesetzt wird?

§. 51.

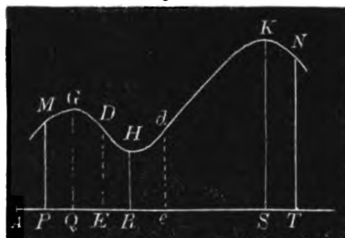
Fortsetzung von §. 50.

Um den allgemeinen Fall zu behandeln nehmen wir an, dass in dem Integral $\int_m^n f(\varphi x) . dx$ statt x die Variable u nach der Gleichung

1) $u = \varphi x$

substituirt werden soll. — Ist nun Fig. 18 die Curve, welche der Gleichung 1 entspricht, so hat u zwischen den Grenzen $x = m$ und $x = n$ für $x = g$, $x = h$, $x = k$ resp. Maxima oder Minima. Es werden also zwischen den Grenzen

Fig. 19.



$AP = m$; $AQ = g$; $AR = h$; $AS = k$; $AT = n$

$x = g$ und $x = h$ diejenigen Werthe von u zum Theil oder alle wiederkehren, welche schon zwischen den Grenzen $x = m$ und $x = k$ vorkommen; ebenso werden zwischen den Grenzen $x = h$ und $x = k$ diejenigen Werthe von u zum Theil oder alle wiederkehren, welche zwischen den Grenzen $x = g$ und $x = h$ vorkommen; so z. B. kehrt in dem Punkte d dieselbe Ordinate wieder, welcher schon im Punkte D vorkam, d. h. den Punkten D und d entsprechen **gleiche** Werthe von u, obgleich die entsprechenden Werthe von x **verschieden** sind. Zwischen den Grenzen $x = h$ und $x = k$ wird also x in andrer Weise von u abhängen wie zwischen den Grenzen $x = g$ und $x = h$. Es leuchtet ferner ein, dass zwischen den Grenzen $x = m$ und $x = g$, und dass zwischen $x = k$ und $x = n$, x in noch anderer Weise von u abhängt.

Aus dem Vorstehenden folgt, dass wenn die Gleichung 1 für x aufgelöst wird, dieselbe für Werthe von u — welche zwischen den Grenzen $x = m$ und $x = n$ vorkommen — 4 verschiedene reelle Wurzeln geben kann. Diese Wurzeln seien

2) $x = \xi u$ zwischen den Grenzen $x = m$ und $x = g$
3) $x = \chi u$ „ „ „ $x = g$ und $x = h$
4) $x = \psi u$ „ „ „ $x = h$ und $x = k$
5) $x = \omega u$ „ „ „ $x = k$ und $x = n$

Zerlegen wir nun $\int_m^n f(\varphi x)\,dx$ wie folgt

$$6)\quad \int_m^n f(\varphi x)\,dx = \int_m^g f(\varphi x)\,dx + \int_g^h f(\varphi x)\,dx + \int_h^k f(\varphi x)\,dx + \int_k^n f(\varphi x)\,dx$$

und setzen wir

$$7)\quad \int_m^g f(\varphi x)\,dx = \int_{\varphi m}^{\varphi g} fu \,.\, \xi' u\,du \quad \text{nach Gleichung 2}$$

$$8)\quad \int_g^h f(\varphi x)\,dx = \int_{\varphi g}^{\varphi h} fu \,.\, \chi' u\,du \quad \text{nach Gleichung 3}$$

$$9)\ \int_h^k f(\varphi x)\,dx = \int_{\varphi h}^{\varphi k} fu\,.\,\psi' u\,du \text{ nach Gleichung 4}$$

$$10)\ \int_k^n f(\varphi x)\,dx = \int_{\varphi k}^{\varphi n} fu\,.\,\omega' u\,du \text{ nach Gleichung 5}$$

Schalten wir die Werthe von

$$\int_m^g f(\varphi x)\,dx,\ \int_g^h f(\varphi x)\,dx,\ \int_h^k f(\varphi x)\,dx \text{ und } \int_k^n f(\varphi x)\,dx$$

nach den Gleichungen 7 bis 10 in Gleichung 6 ein, so folgt

$$11)\ \int_m^n f(\varphi x)\,.\,dx = \int_{\varphi m}^{\varphi g} fu\,.\,\xi' u\,du + \int_{\varphi g}^{\varphi h} fu\,.\,\chi u\,du$$

$$+ \int_{\varphi h}^{\varphi k} fu\,.\,\psi' u\,du + \int_{\varphi k}^{\varphi n} fu\,.\,\omega' u\,du.$$

Bemerkung.

Den Fall haben wir hier besonders deshalb so ausführlich behandelt, um dem Leser zu zeigen, wie vorsichtig man unter Umständen zu Werke gehen muss, um sich vor Fehlern zu schützen.

§. 52.

Uebungs-Aufgaben.

$$1)\ \int_3^7 (3x^2 + x + 6)\,.\,dx = \int_0^{10} (3x^2 - 17x + 30)\,.\,dx$$

Wir erhalten nun

$$\int_{-3}^{7} (3x^2 + 6)\,.\,dx = \int_{-3+3}^{7+3} \{3(x - 3^2) + (x - 3) + 6\}\,.\,dx \text{ dies giebt}$$

$$\int_{-3}^{7} (3x^2 + x + 6)\,.\,dx = \int_0^{10} (3x^2 - 17x + 30)\,.\,dx.$$

Dem Anfänger empfehlen wir, die Zahlenwerthe der beiden bestimmten Integrale $\int_{-3}^{7} (3x^2 + x + 6)\,dx$ und $\int_0^{10} (3x^2 - 17x + 30)\,dx$ zu berechnen, um sich hierdurch zu überzeugen, dass dieselben gleich sind.

$$2)\ \int_8^{14}(3x^2-4x+3)\,dx = \int_4^{10}(3x^2+20x+35).dx$$
$$= \int_0^{6}(3x^2+44x+163).dx$$

oder

$$\int_8^{14}(3x^2-4x+3)\,dx = \int_{8-4}^{14-4}(3(x+4)^2-4(x+4)+3).dx$$
$$= \int_{8-8}^{14-8}(3(x+8)^2-4(x+8)+3).dx$$

$$\int_8^{14}(3x^2-4x+3).dx = \int_4^{10}(3x^2+20x+35).dx = \int_0^6(3x^2+44x+163)dx.$$

$$3)\ \int_n^m \cos(a+bx).bdx = \int_{a+bn}^{a+bm}\cos x\,dx$$

vergl. Aufgabe 2 Seite 16.

$$4)\ \int_n^m \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int_{\frac{n}{a}}^{\frac{m}{a}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_{\frac{n}{a}}^{\frac{m}{a}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

vergl. Seite 20, Nr. 20, III.

$$5)\ \int_n^m \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int_{a^2-n^2}^{a^2-m^2}\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int_{a^2-m^2}^{a^2-n^2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

vergleiche Seite 20, Nr. 20, IV.

$$6)\ \int_n^m \frac{\cos x.dx}{\sin x} = \int_{\sin n}^{\sin m}\frac{du}{u} = \int_{\sin n}^{\sin m}\frac{dx}{x}$$

$$7)\ \int_n^m \sqrt{a^2-x^2}.dx = a^2\int_{\arcsin\frac{n}{a}}^{\arcsin\frac{m}{a}}\cos^2 u\,du = a^2\int_{\arcsin\frac{n}{a}}^{\arcsin\frac{m}{a}}\cos^2 x.dx.$$

(vergl. Seite 84, Gl. 18.)

§. 53.

Doppel-Integrale.

Eine Differential-Function von der Form

1) $f(x,y)\,dx.dy$

kann aufgefasst werden als ein **Differential zweiter Ordnung**, welches dadurch entstanden ist, dass eine Function von x und y, [Z = F (x , y)], erst nach x und darauf nach y, oder umgekehrt erst nach y und dann nach x differentiirt wird (vergl. D. R. §. 116, Seite 229).

Es muss demnach auch möglich sein, durch **zweimalige Integration** aus der vorliegenden Differential-Function f(x,y) dx, dy die ursprüngliche Function [Z = F (x , y)] wieder herzustellen. Diese doppelte Integration von f (x , y) . dx . dy bezeichnet man durch das Symbol

$$2) \int\int f(x,y) \, . \, dx \, . \, dy$$

Den Ausdruck, der auf diese Weise bezeichnet ist, nennt man ein **Doppel-Integral.**

Ist die Differential-Function f (x , y) dx . dy **erst in Bezug auf y** zwischen den Grenzen y_0 und y_1, und **dann in Bezug auf x** zwischen den Grenzen x_0 und x_1 integrirt, so bezeichnet man das entsprechende Doppel-Integral durch das Symbol

$$3) \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x,y) \, dx \, . \, dy.$$

Wenn dagegen die genannte Differential-Function **erst nach x** zwischen den Grenzen x_0 und x_1, **und dann nach y** zwischen den Grenzen y_0 und y_1 integrirt wird, so bezeichnet man das entsprechende Doppel-Integral durch das Symbol

$$4) \int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y) \, dx \, . \, dy.$$

§. 54.

Fortsetzung.

Integrirt man die Function f (x , y) dx . dy zwischen den Grenzen y_0 und y_1 **nach y**, so muss man das entsprechende Integral durch das Symbol

$$1) \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) . dx . dy$$

bezeichnen. — Hieraus folgt nach §. 3 Seite 3

$$2) \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) \, dx . dy = dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, x) . dy.$$

Hieraus folgt wieder

$$3) \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{x_0}^{x_1} dx . \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) \, dy.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich die Gleichung

$$4) \int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x, y) \, dx . dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) \, dx.$$

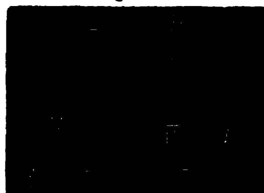
§. 55.

Das Doppel-Integral der Function dx . dy für den Fall, dass x und y in ihren Grenzen unabhängig von einander sind.

Offenbar kann man dx . dy als Differential*) einer ebenen Figur betrachten; und da x und y in ihren Grenzen **unabhängig** von einander sind, **so muss diese Figur ein Rechteck sein.**

Diesen Gedanken wollen wir benutzen, um die Integration von dx . dy auf graphischem Wege zu veranschaulichen. Zu dem Ende nehmen wir an, dass das Rechteck MB CD, Fig. 20, diejenige Fläche sei, von welcher dx . dy ein Differential*) sein soll.

Fig. 20.



Denken wir nun unser Rechteck in unendlich viele verticale Schichten (VW) von der Breite dx getheilt, und theilen wir darauf jede dieser verticalen Schichten (VW) wieder in Rechtecke von der Höhe dy, so ist „dx.dy“ der Ausdruck für den Werth jeder dieser Elementarflächen.

*) Dies Differential ist ein Differential zweiter Ordnung.

Demnach erhalten wir den Inhalt des Rechteckes MBCD, **wenn wir zunächst die Elementarflächen jeder einzelnen verticalen Schicht (VW), und darauf sämmtliche verticalen Schichten summiren**, d. h. nach den Bezeichnungen unserer Figur, und wir integriren die Differential-Function dx.dy **erst nach y** zwischen den Grenzen p und q und **darauf nach x** zwischen den Grenzen n und m. Hieraus ergiebt sich

$$1)\ Z = \int_n^m dx \int_p^q dy = \int_n^m dx \, . \, (q - p)$$

$$= (m - n) \, . \, q - p) \text{ oder}$$

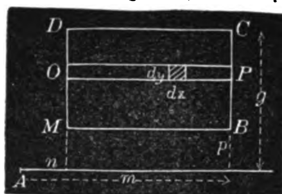
$$2)\ \int_n^m dx \int_p^q dy \qquad = (m - n) \, . \, (q - p).$$

§. 56.

Fortsetzung.

Hätten wir unser Rechteck ABCD erst in unendlich viele horizontale Schichten (OP) getheilt, wie dies Fig. 21 angedeutet ist, und hätten wir darauf jede dieser horizontalen Schichten wieder in Elementarflächen (dx . dy) zerlegt, so würde dér Werth des Rechteckes MB CD sich dadurch ergeben, **dass man zunächst die Elementarflächen (dx . dy) einer jeden horizontalen Schicht (OP), und darauf sämmtliche horizontale Schichten summirt.** Diese doppelte Summirung lässt sich dadurch ausführen, dass wir die Function dx . dy **erst nach x** zwischen den Grenzen n und m und **darauf nach y** zwischen den Grenzen p und q integriren.

Fig. 21.



Hiernach ergiebt sich

$$1)\ Z = \int_n^m dy \int_p^q dx = \int_n^m dy \, . \, (q - p)$$

$$2)\ Z = \int_n^m dy\,(q - p) = (m - n)\,.\,(q - p).$$

$$3)\ \int_n^m dy \int_p^q dx = (m - n)\,.\,(q - p).$$

Verbinden wir diese Gleichung mit Gl. 2, §. 49, so folgt

$$4)\ \int_n^m dy \int_p^q dx = \int_p^q dx\,.\int_n^m dx. \left\{ \text{Es ist zu beachten, dass x und y in ihren Grenzen unabhängig von einander sind.} \right.$$

§. 57.

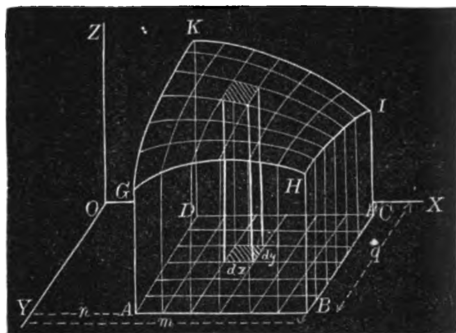
Das Doppel-Integral der Function f(x, y) dx . dy für den Fall, dass x und y in ihren Grenzen unabhängig von einander sind.

Wir wollen annehmen, dass die Gleichung

$$1)\ Z = f(x, y)$$

die Gleichung der krummen Fläche Fig. 22 sei, und ferner dass die Seiten des Rechteckes AB CD in der XY-Ebene resp. der X-Achse und der Y-Achse parallel laufen. Stellen wir uns dann die Aufgabe: Das Volumen (V) des prismatischen Körpers zu berechnen, dessen Basis das Rechteck ABCD ist, und welcher oben von der Fläche GHIK [Z = f(x, y)] begrenzt wird, so zerlegen wir unsern Körper AB CD GH IK durch Ebenen, — welche resp. parallel der XZ-Ebene und der YZ-Ebene sind, — in verticale Streifen, deren Basis gleich

Fig. 22.



dx . dy ist. Die Grösse eines jeden dieser Streifen lässt sich demnach ausdrücken durch die Differential-Function f(x,y) dx . dy.

Hiernach erhält man das Volumen (V) von AB CD GH IK dadurch, **dass man in allen Schichten. welche ⊣⊢ der YZ-Ebene sind, die Elementar-Volumina** {f(x, y) . dx . dy} **addirt, und darauf die genannten Schichten summirt.** Hieraus folgt

$$1)\ V = \int_n^m dx \int_p^q f(x, y)\, dy.$$

Man kann indessen auch dadurch das Volumen von AB CD GH IK ermitteln, dass **man in allen Schichten, welche parallel der XY-Ebene sind, sämmtliche Elementar-Volumina** {f(x, y) dx . dy} **addirt, und darauf diese Schichten selbst summirt.** Hiernach ist

$$2)\ V = \int_p^q dy \int_n^m f(x . y)\, dx$$

Aus den Gleichungen 1 und 2 folgt

$$3)\ \int_n^m dx \int_p^q f(x . y)\, dz = \int_p^q dy \int_n^m f(x . y)\, dx.$$

Es ist wohl zu beachten, dass x und y in ihren Grenzen von einander unabhängig sind.

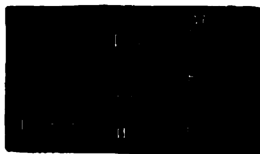
Das Resultat, welches in Gleichung 3 vorliegt, lässt sich in Worten folgendermassen aussprechen: **Wenn in dem bestimmten Doppel-Integral irgend einer Differential-Function** {f(x, y) dx . dy} **die Variabeln x und y in Bezug auf ihre Grenzen von einander unabhängig sind, so wird im Werthe des Doppel-Integrals nichts geändert, wenn man rücksichtlich der beiden Variabeln x. und y die Ordnung der Integration umkehrt, und die Grenzen unverändert beibehält.**

§. 58.

In einem bestimmten Doppel-Integral wird die Ordnung der Integration nach x und y verändert, während x und y in ihren Grenzen abhängig von einander sind.

Wir wollen diesen Gegenstand an einem speciellen sehr einfachen Falle zu erläutern suchen, und zu dem Ende annehmen, dass

Fig. 23.



1) $y^2 = ax$

die Gleichung der Parabel Fig. 23 sei, von welcher die Fläche AM′P′ berechnet werden soll.

Denken wir nun die Parabel in verticale Schichten von der Breite dx getheilt, und jede dieser Schichten wieder in Elementarflächen dx . dy zerlegt, so lässt sicht der Inhalt der Fläche AM′P′ dadurch ermitteln, **dass wir zunächst die Elementarflächen jeder verticalen Schicht und darauf sämmtliche verticale Schichten summiren.** Hiernach ist also

2) $AM'P' = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy$ } wo die Grenzen x_0, x_1 und y_0, y_1 noch näher bestimmt werden müssen.

Um die Werthe von y_0 und y_1 zu bestimmen, beachte man, dass $\int_{y_0}^{y_1} dy$ den Werth einer **beliebigen** verticalen Schicht (VW) darstellt, dass also die Grenzen (y_0 und y_1) dieses bestimmten Integrals resp. gleich o und y (der Ordinate des Punktes V*) sind. Nach Gleichung 1 ist aber $y = a^{1/2} x^{1/2}$. Demnach muss man für jede beliebige Lage der verticalen Schicht VW **die Grenzen y_0 und y_1 resp. gleich o und $a^{1/2} x^{1/2}$ setzen.** Weil nun die Fläche AM′P′ gleich der Summe aller

*) Es ist zu beachten, dass die Breite der Schicht VW gleich dx, also unendlich klein ist.

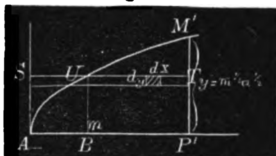
verticalen Schichten (VW) zwischen den Grenzen o und m ist, so müssen in Gleichung 2 **die Grenzen x_0 und x_1, resp. gleich o und m gesetzt werden.**

Setzen wir nach dem Vorstehenden in Gl. 2 für die Grenzen des bestimmten Doppel-Integrals ihre Werthe ein, so folgt

$$3)\ AM'P' = \int_0^m dx \int_0^{a^{1/2} x^{1/2}} dy = \int_0^m a^{1/2} x^{1/2}\, dx = {}^2/_3\, a^{1/2} m^{3/2}.$$

Hätten wir Fig. 24 unsere Parabelfläche in **horizontale** Schichten (UT) getheilt, und darauf jede horizontale Schicht wieder in Elementarflächen (dx . dy) zerlegt, so würde sich der Werth der Fläche AM'P' dadurch ergeben, **dass man zunächst die Elementarflächen dx . dy jeder horizontalen Schicht, und darauf sämmtliche horizontalen Schichten summirt.** Hiernach wäre

Fig. 24.



$$4)\ AM'P' = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} dx$$ Hierin müssen die Werthe von y_0, y_1, x_0 und x_1 noch näher bestimmt werden.

In dieser Gleichung bedeutet $\int_{x_0}^{x_1} dx$ den Werth einer beliebigen horizontalen Schicht (UT). Nach den Bezeichnungen von Fig. 22 sind also die Grenzen x_0 und x_1 resp. gleich SU und ST oder gleich AB und m. Weil aber AB die Abscisse des Punktes U ist, so folgt aus Gleichung 1, dass für **jede Lage der horizontalen Schicht TU***)

$$5)\ x_0 = \frac{y^2}{a} \text{ und } x_1 = m \text{ ist.}$$

Ferner ist die Fläche AM'P' gleich der Summe sämmtlicher horizontalen Schichten (TU) zwischen den Grenzen $y = o$

*) Es ist zu beachten, dass die Breite der Schicht TU gleich dy, also unendlich klein ist.

und $y = M'P'$. Da aber nach Gl. 1 $M'P' = a^{1/2} m^{1/2}$ ist, so ergiebt sich, dass in Gl. 4

$$6)\quad y_0 = o,\ y_1 = a^{1/2} x^{1/2}.$$

Setzen wir nach den Gleichungen 5 und 6 die Werthe von x_0, x_0, y_0 und y_1 in Gleichung 4 ein, so folgt

$$7)\quad AM'P' = \int_0^{a^{1/2} m^{1/2}} dx \int_{\frac{y^2}{a}}^{m} dx = \int_0^{a^{1/2} m^{1/2}} dy \left(m - \frac{y^2}{a}\right) = a^{1/2} m^{3/2} - \frac{1}{3}\,\frac{a^{3/2} m^{3/2}}{a}$$
$$= a^{1/2} m^{3/2} - {}^1\!/_3\, a^{1/2} m^{3/2} = {}^2\!/_3\, a^{1/2} m^{3/2}.$$

Aus den Gleichungen 3 und 7 folgt jetzt

$$8)\quad \int_0^m dx \int_0^{a^{1/2} x^{1/2}} dy = \int_0^{a^{1/2} m^{1/2}} dy \int_{\frac{y^2}{a}}^{m} dx$$ { Hier sind x und y in ihren Grenzen von einander abhängig nach der Gleichung $y^2 = ax$, vergl. Gl. 1.

§. 59.

Fortsetzung.

Wir haben in Gleichung 3 gesehen, dass $\int_0^m dx \int_0^{a^{1/2} x^{1/2}} dy$ einen **ganz bestimmten** Werth hat; ferner leuchtet ein, dass $\int_0^{a^{1/2} x^{1/2}} dy \int_0^m dx = \int_0^{a^{1/2} x^{1/2}} m\, dy = m\, a^{1/2} x^{1/2}$; dass also „$\int_0^{a^{1/2} x^{1/2}} dy \int_0^m dx$" wegen des Factors $x^{1/2}$ eine **variable** Grösse ist, so dass schon aus diesem Grunde

$\int_0^m dx \int_0^{a^{1/2} x^{1/2}} dy$ **nicht nothwendig gleich** $\int_0^{a^{1/2} x^{1/2}} dy \int_0^m dx$ sein muss (vergl. Gl. 8).

Wir dürfen demnach aus §. 57, Gleichung 8, den Schluss ziehen, dass wir in dem dort behandelten speciellen Falle **die Reihenfolge der Integration nach x und y nicht umkehren durften, ohne die Grenzen entsprechend zu ändern.** Hiernach ist leicht einzusehen, dass wir zu analogen Schlüssen gelangen

müssen, wenn in dem bestimmten Doppel-Integral **von der allgemeinen Form**

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy$$

x und y in ihren Grenzen von einander abhängig sind, etwa nach der Gleichung $y = \varphi x$. Wir dürfen deshalb ganz allgemein folgenden Satz aufstellen:

Wenn in dem Doppel-Integral $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy$ y und x in ihren Grenzen von einander abhängig sind, so müssen nach Massgabe dieser Abhängigkeit $\{y = \varphi x\}$ die Grenzen für x und y geändert werden, wenn die Reihenfolge der Integration in Bezug auf x und y geändert wird.

V. Capitel.

Quadratur ebener Curven.

§. 60.

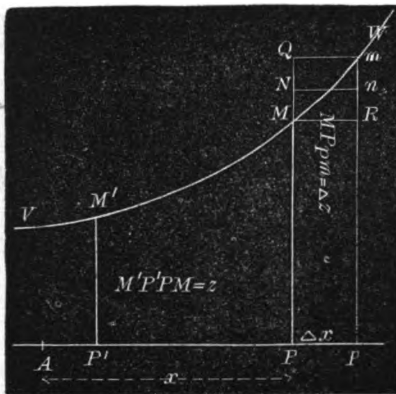
Das Differential der Fläche einer Curve, welche auf rechtwinklige Coordinaten bezogen ist.

Wenn man auf einer beliebigen Curve, VW zwei beliebige Punkte M und M′ annimmt, und deren Ordinaten M′P′ und MP zeichnet, so ist durch die Curve, die Abscissenachse und die beiden Ordinaten (MP und M′P′) eine Fläche (M′P′PM) begrenzt.

Nehmen wir nun an, dass die Ordinate M′P′ fest, und die Ordinate MP beweglich sei, so wird die Fläche M′P′PM wachsen oder abnehmen, je nachdem sich MP vor- oder zurückbewegt.

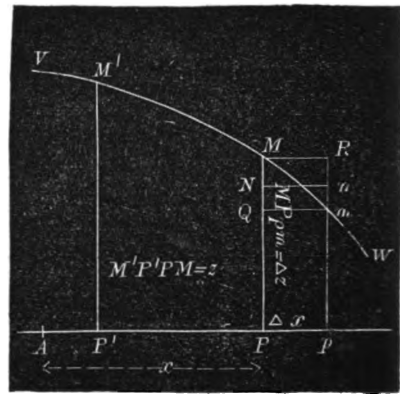
Wenn z. B. die Ordinate MP sich nach mp bewegt, so wird in Folge dessen die Fläche M′P′PM um die Fläche MPpm $= \Delta z$ wachsen.

Fig. 25.



$\Delta y = m R.$

Fig. 26.



$\Delta y = - m R.$

Der Flächeninhalt von M P p m = Δz liegt zwischen dem Flächeninhalte von M P p R und m p P Q.

Nun ist aber

1) $MPpR = y \, . \, \Delta x$

2) $mpPQ = (y + \Delta y) \, . \, \Delta x$ *).

Es muss also Δz dem Werthe nach zwischen $y \, . \, \Delta x$ und $(y + \Delta y) \, . \, \Delta x$ liegen, oder es ist

3) $\Delta z = (y + \Theta \, . \, \Delta y) \, . \, \Delta x$ **)

wo Θ eine absolute Zahl ist, deren Werth zwischen 0 und + 1 liegt. Aus Gleichung 3 ergiebt sich weiter

4) $\frac{\Delta z}{\Delta x} = y + \Theta \, \Delta y$

und weil Δy und Δz zu Null werden, wenn Δx zu Null wird

5) $\frac{dz}{dx} = y$, oder

6) $dz = y \, . \, dx$.

§. 61.

Quadratur ebener Curven, welche auf rechtwinklige Coordinaten bezogen sind.

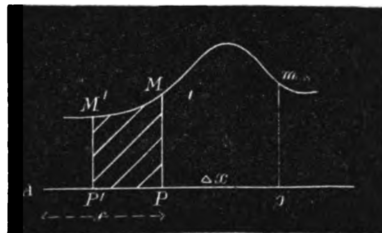
Nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen ist es

---

*) Man beachte, dass Δy in Fig. 26 negativ ist.

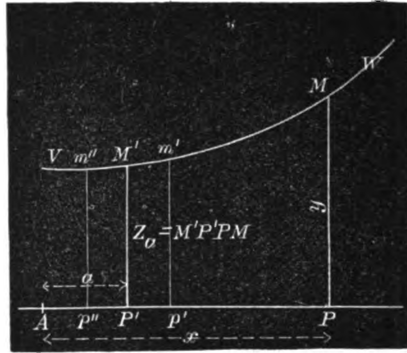
) Streng genommen gilt die Gleichung 3 nur unter der Voraussetzung, dass Δx **hinreichend klein angenommen ist. Man erkennt dies ohne Weiteres aus dem Anblick der Fig. 27. Da wir indessen Gleichung 3 benutzen, um einen Ausdruck für dz (in Gl. 6) abzuleiten, so schadet obige Einschränkung der Allgemeinheit der Betrachtung nicht.

Fig. 27.



leicht, eine allgemeine Regel zur Berechnung der Fläche einer beliebigen Curve $y = fx$ anzugeben. Soll z. B. die Fläche M'P'PM berechnet werden, so nehmen wir die Ordinate M'P' **als fest und die Ordinate MP als verschiebbar an**, und erhalten dann nach dem vorigen Paragraphen

Fig. 28.



1) $dz = y \, . \, dx.$

Setzen wir hierin $y = fx$, so folgt

2) $dz = fx \, . \, dx.$

Hieraus folgt durch Integration

3) $z = \int fx \, . \, dx.$

Nehmen wir nun an, dass

4) $\int fx \, . \, dx = Fx + C$ sei, so folgt

5) $z = Fx + C.$

Hierdurch ist der Werth von Z ganz allgemein bestimmt. Da aber C, **in sofern sie eine Integrations-Constante ist**, jeden beliebigen Werth haben kann, so liegt in dem Ausdruck für Z nach Gleichung 5 **vorläufig** noch etwas Unbestimmtes. Wir haben jedoch schon Seite 2 bemerkt, dass der Werth der Integrations-Constanten in allen Fällen der Anwendung durch die Natur der Aufgabe näher bestimmt wird; und in der That ist es auch in unserm Falle nicht schwer, den Werth von C aus den Bedingungen unserer Aufgabe zu ermitteln.

Unsere Gleichung 5 gilt nämlich für jeden Werth von x, d. h. für jede Lage der End-Ordinate MP; **sie gilt also auch dann noch, wenn die Entfernung zwischen MP und M'P' gleich Null wird; d. h. wenn AP mit AP' zusammenfällt, oder $x = a$**

wird. In diesem Falle wird die Fläche Z = M P P′ M′ zu Null und wir erhalten demnach aus Gleichung 5

$$6)\ 0 = F a + C.$$

$$7)\ C = - F a.$$

Setzen wir diesen Werth von C in Gl. 5 ein, so folgt

$$8)\ Z = F x - F a.$$

Durch diese Gleichung ist der Werth von Z vollkommen bestimmt.

Bemerkungen.

1. Zum besseren Verständniss des Vorstehenden bemerken wir noch Folgendes:

Wenn wir uns (Fig. 28) M′P′ als **fest** und MP als **beweglich** vorstellen, so wird die Zunahme, welche Z in Folge der Bewegung von MP erleidet — ausser von der Natur der Curve — **allein von der Lage der Ordinate MP, d. h. allein von x abhängen. Es ist demnach für den Werth von dZ ganz gleichgültig, welche Lage die feste Ordinate hat**; ob sie in M′P′ liegt oder ob sie irgend eine andere Lage hat, z. B. ob sie in m′ p′, m″ p″ etc. liegt.

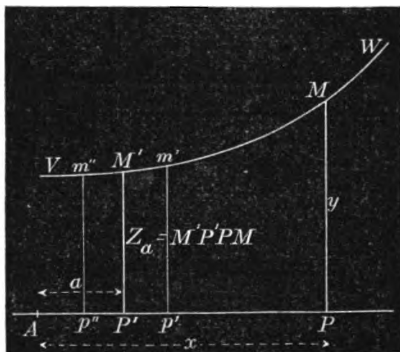
Da nun dZ von der Lage der (festen) Anfangs-Ordinate (M′P′) unabhängig ist, so muss der Werth von Z, welchen wir in Gleichung 5 durch **Integration von dZ gefunden haben, ebenfalls noch unabhängig von der Lage der (festen) Anfangs-Ordinate** sein, d. h. die Gleichung 5, **in so fern sie durch Integration der Gleichung 3 entstanden ist, kann den Werth von Z nicht vollkommen bestimmen.** Hierzu ist nothwendig, dass wir die Lage der Anfangs-Ordinate berücksichtigen, und aus ihr mit Hülfe von Gleichung 6 den Werth von C bestimmen, wie dies in den Gleichungen 6 und 7 geschehen ist.

2. Wäre nicht M′P′ die (feste) Anfangs-Ordinate, sondern fiele diese mit m′p′ oder m″p″ zusammen, so würde der Werth der Integrations-Constanten resp. um die Fläche M′P′p′m′ kleiner oder um die Fläche M′P′p″m″ grösser sein als der Werth von C in Gl. 8.

3. Ist die Abscisse A′ P′ gleich a und die Abscisse AP gleich b, so bezeichnet man die Fläche MPP′M′ durch Z_a^b.

Die Indices b und a am Kopfe und Fusse von Z_a^b bestimmen demnach die Lage der

Fig. 29.



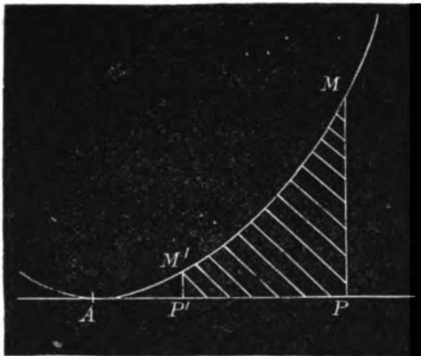
Ordinaten, welche die Fläche MPP'M' — deren Werth $\overset{b}{\underset{a}{Z}}$ ist — begrenzen. Durch $\underset{a}{Z}$ bezeichnet man eine Fläche, deren Anfangs-Ordinate durch $x = a$ bestimmt ist, deren End-Ordinate dagegen noch unbestimmt ist.

4. Ist allgemein $Z = Fx + C$, so ist $\overset{b}{\underset{a}{Z}} = Fb - Fa$; $\underset{a}{Z} = Fx - Fa$.

§. 62.

Fortsetzung. Uebungs-Aufgaben.

Fig. 30.



$AP_{,} = 2$, $AP = 7$.

Aufgabe 1. Es ist Fig. 30 eine Curve durch die Gleichung

1) $y = 3x^2$

gegeben. Man soll die Fläche (M'P'PM) berechnen, deren Grenz-Ordinaten durch die Abscissen $x = 2$ und $x = 7$ bestimmt sind.

Auflösung. Nach Seite 142 Gl. 6 ist

2) $dZ = y \,.\, dx$.

In unserem Falle ist nach Gleichung 1, $y = 3x^2$, also

3) $dZ = 3x^2\, dx$. Hieraus folgt durch Integration

4) $Z = x^3 + C$.

Diese Gleichung gilt für jeden Werth von x; sie gilt also auch dann noch, wenn $x = 2$ ist. In diesem Falle aber fällt die Ordinate MP mit der Ordinate M'P' zusammen, d. h. Z wir Null.

Wenn man also in Gleichung 4, $x = 2$ setzt, so wird $Z = 0$, demnach ist

5) $0 = 2^3 + C$.

6) $C = -8$. (Vergl. Bemerkung Seite 2.)

Setzen wir diesen Werth von C in Gleichung 4 ein, so folgt

7) $Z_2 = x^3 - 8$.

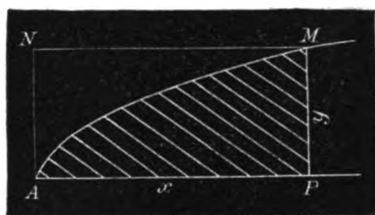
Setzen wir in dieser Gleichung $x = 7$ (d. i. gleich der Abscisse mit welcher unsere Fläche aufhört), so folgt

8) $\overset{7}{\underset{2}{Z}} = 7^3 - 8 = 343 - 8$

9) $\overset{7}{\underset{2}{Z}} = 335$.

Aufgabe 2. Die Gleichung der Parabel Fig. 31 sei

Fig. 31.



1) $y^2 = ax$.

Man soll die Fläche AMP berechnen.

Auflösung. Nach unserer allgemeinen Formel Gleichung 6 Seite 142 ist

2) $dZ = y \cdot dx$.

Nun folgt aus Gleichung 1, dass $y = u^{1/2} x^{1/2}$, demnach ist

3) $dZ = a^{1/2} x^{1/2} dx$.

Hieraus folgt durch Integration nach Gleichung 6 Seite 5

4) $Z = \frac{2}{3} a^{1/2} x^{3/2} + C$.

Diese Gleichung drückt bekanntlich ganz allein den Werth von Z aus, d. h. **sie gilt für jede Lage der Anfangs-Ordinate und End-Ordinate.**

Weil aber unsere Fläche AMP im Scheitelpunkte A anfangen soll, so muss **$Z = 0$ sein, wenn $x = 0$ ist,** demnach folgt aus Gleichung 4

5) $0 = 0 + C$, also

6) $C = 0$.

Setzen wir diesen Werth von C in Gleichung 4 ein, so folgt

7) $Z_0 = \frac{2}{3} a^{1/2} x^{3/2}$.

Bemerkung.

Nach Gleichung 1 ist $y = a^{1/2} x^{1/2}$, also ist nach Gleichung 7

8) $Z_0 = {}^2/_3\, x\, y$,

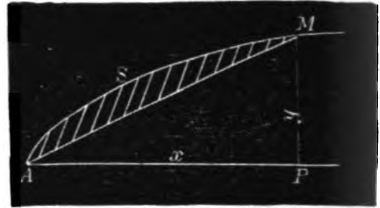
d. h. die im Scheitel anfangende Parabel-Fläche APM ist gleich $^2/_3$ von der Fläche des Rechteckes APMN, dessen Seiten gleich x und y sind; und hieraus folgt weiter, dass Fig. 31 die Fläche APM = 2 Fläche AMN.

Aufgabe 3. Die Gleichung der Parabel Fig. 32 sei wieder

1) $y^2 = ax$.

Man soll das Segment ASM, welches durch eine vom Scheitelpunkte ausgehende Sehne abgeschnitten wird, berechnen.

Fig. 32.



Auflösung. Es ist

2) Segment ASM = ASMP — △ AMP.

Nun ist aber nach Gleichung 8 Aufgabe 2

3) ASMP $= {}^2/_3\, x\, y$ und ferner ist

4) △AMP $= {}^1/_2\, x\, y$, also ist

5) Segment ASM $= {}^1/_6\, x\, y$, oder

6) Segment ASM $= {}^1/_6\, a^{1/2} x^{3/2}$.

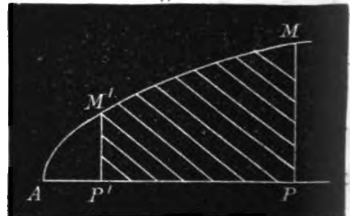
Aufgabe 4. Die Gleichung einer Parabel, Fig. 33, sei

1) $y^2 = 9x$.

Man soll die Fläche M′P′PM $(= Z_4^{25})$ berechnen, wenn

2) AP′ = 4, AP = 25 ist.

Fig. 33.



AP = 4, AP = 25.

Auflösung. Nach unserer allgemeinen Formel Gleichung 6 Seite 142 erhalten wir zunächst wieder

3) $dZ = y\, dx$.

Setzen wir hierin den Werth von y nach Gleichung 1, so folgt

4) $dZ = 3x^{1/2}\, dx$

5) $Z = \frac{2}{3} \cdot 3x^{3/2} + C$

6) $Z = 2\sqrt{x^3} + C$.

Da für die Ordinate AP′ — bei welcher unsere Fläche anfangen soll — $x = 4$ ist, so ist in Gleichung 5 $Z = 0$, **wenn** $x = 4$, demnach ist

7) $0 = 2\sqrt{4^3} + C$

8) $0 = 16 + C$

9) $C = -16.$

Berücksichtigen wir nun, dass der gefundene Werth von C der Anfangs-Ordinate entspricht, für welche $x = 4$ ist, so folgt aus Gleichung 9 und 5

10) $Z_4 = 2\sqrt{x^3} - 16.$

Setzen wir hierin $x = 25$, so folgt

11) $Z_4^{25} = 2 . \sqrt{25^3} - 16$

$= 250 - 16 = 234.$

Aufgabe 5. In Fig. 34 ist ein Parabal-Segment EAB gegeben.

Man soll dessen Flächen-Inhalt berechnen, wenn der Parameter der Parabel $= 9$ und $AG = 4$, $AD = 16$ ist.

Auflösung. Man erkennt leicht, dass

1) Fläche $EAB = AGE + ADB + \triangle EGC - \triangle BCD$ ist.

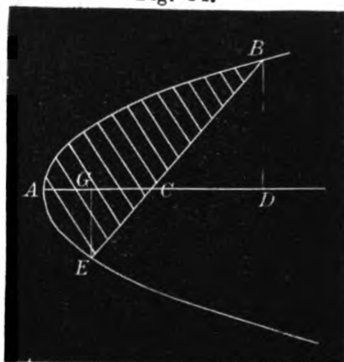
Nun ist nach Aufgabe 3

2) $AGE = Z_0^4 = 16$

3) $ADB = Z_0^{16} = 128.$

Um die Dreiecke CEG und CDB zu berechnen, kömmt es zunächst darauf an, die Längen von CG und CD zu bestimmen. Berücksichtigen wir nun, dass diese $\triangle\triangle$ ähnlich sind, so folgt

Fig. 34.



$AG = 4$; $AD = 16$.

4) $CG : CD = EG : DB$ oder

5) $CG : CG + CD = EG : EG + BD$

6) $CG : DG = EG : EG + BD.$

Hieraus folgt

7) $CG = \frac{DG . EG}{EG + BD}.$

Nun ist

8) $DG = AD - AG = 16 - 4 = 12.$

9) $EG = \sqrt{9 . AG} = \sqrt{9 . 4} = 6$

10) $BD = \sqrt{9 . AD} = \sqrt{9 . 16} = 12$

Man beachte, dass der Parameter gleich 9 ist, dass also $y^2 = 9x$.

11) $EG + DB = 18.$

Setzen wir nach den Gleichungen 8, 9 und 11 die Werthe von DG, EG und EG + BD in Gleichung 7 ein, so folgt

12) $CG = \frac{12 . 6}{18} = \frac{72}{18} = 4.$

Ferner ist

13) $CD = DG - CG = 12 - 4 = 8.$

Jetzt ergiebt sich sehr einfach

14) $\triangle CEG = \frac{CG . EG}{2} = \frac{4 . 6}{2} = 12$ (Gl. 12 und 9)

15) $\triangle BBD = \frac{CD . BD}{2} = \frac{8 . 12}{2} = 48$ (Gl. 13 und 10)

Verbinden wir die Gleichungen 2, 3, 14 und 15 mit Gleichung 1, so folgt

16) Fläche $EAB = 16 + 128 + 12 - 48 - 108.$

Aufgabe 6. Die Gleichung der Parabel Fig. 35 sei

1) $y^2 = ax.$

Durch die beiden Sehnen BE und CD ist aus derselben die Fläche BCDE herausgeschnitten. Man soll den Inhalt dieser Fläche berechnen.

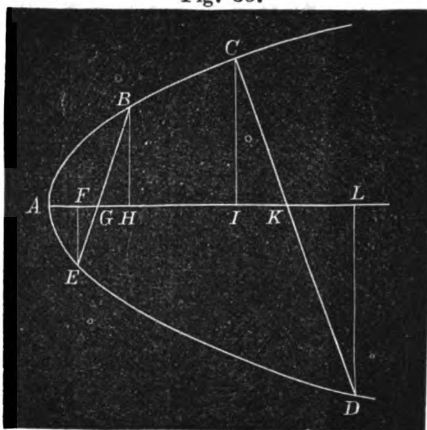


Fig. 35.

Auflösung. Man berechne die Flächen BCIH und EFLD, hierzu addire man die △ △ BGH und CIK und subtrahire von dieser Summe die △ △EFG und DLK.

Die weiteren Ausführungen dürfen wir dem Leser überlassen.

Bemerkung.

Dem Anfänger empfehlen wir für den Parameter a, so wie für die Abscissen der Punkte B, C, D, E bestimmte Zahlen zu nehmen, und das Zahlen - Beispiel dann durchzuführen.

Aufgabe 7. In umstehender Ellipse Fig. 36 sei die halbe grosse Achse = a und die halbe kleine Achse = b, ferner sei

$$AP' = m$$
$$AP = n.$$

Man soll die Fläche M'P'PM berechnen.

Auflösung. Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist

1) $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$

2) $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$

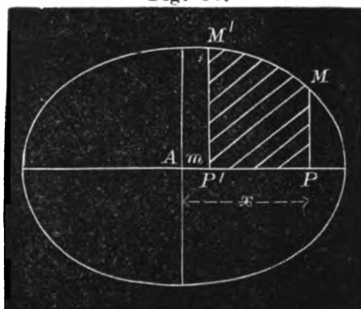


Fig. 36.

Setzen wir in die allgemeine Gleichung 6 Seite 142 für y seinen Werth nach Gleichung 2, so folgt

3) $dZ = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} . dx$

$$4)\quad Z = \frac{b}{a}\int \sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx$$

Nun ist nach Seite 84 Gleichung 18

$$5)\quad \int \sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx = \frac{a^2}{2}\arc\sin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C.$$

Setzen wir diesen Werth von $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx$ in Gleichung 4 ein, so folgt

$$6)\quad Z = \frac{b}{a}\left\{\frac{a^2}{2}\arc\sin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2}\right\} + C$$

$$7)\quad Z = \frac{ab}{2}\,.\arc\sin\frac{x}{a} = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Da unsere Fläche anfängt bei der Ordinate M′ P′, für welche $x = m$ ist, so ist $z = 0$, wenn $x = m$, also ist nach Gleichung 7

$$8)\quad 0 = \frac{ab}{2}\arc\sin\frac{m}{a} + \frac{bm}{2a}\sqrt{a^2 - m^2} + C.$$

oder

$$9)\quad C = -\frac{ab}{2}\arc\sin\frac{m}{a} - \frac{bm}{2a}\sqrt{a^2 - m^2}$$

Setzen wir diesen Werth von C in Gleichung 7 ein, und berücksichtigen wir, dass C für den Fall bestimmt ist, dass $Z = 0$ wird wenn $x = m$, so folgt

$$10)\quad Z_m = \frac{ab}{2}\arc\sin\frac{x}{a} + \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2}$$
$$- \frac{ab}{2}\arc\sin\frac{x}{m} - \frac{bm}{2a}\sqrt{a^2 - m^2}$$

Setzen wir in diese Gleichung $x = n$, so erhalten wir für den Werth unserer Fläche M′P′PM.

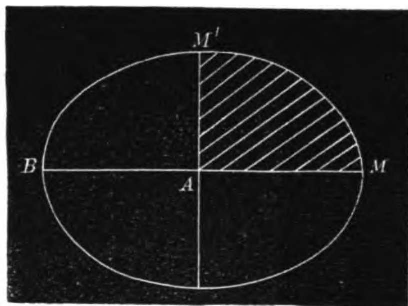
$$11)\quad Z_m^n = \frac{ab}{2}\arc\sin\frac{n}{a} + \frac{bn}{2a}\sqrt{a^2 - n^2}$$
$$- \frac{ab}{2}\arc\sin\frac{m}{a} - \frac{bm}{2a}\sqrt{a^2 - m^2}.$$

Bemerkung.

Wir hätten die Berechnung von Z_m^n auch mit Hülfe der Integration ausführen können, welche sich Seite 83 Gleichung 9 findet, und wären dann zu demselben Resultate gelangt.

Aufgabe 8. Man soll die ganze Fläche einer Ellipse Fig. 37 berechnen, wenn die halben Achsen resp. a und b sind.

Fig. 37.



Auflösung. Wir berechnen zunächst den Quadranten M'AM, und finden dessen Werth dadurch, dass wir in Gleichung 11 Seite 150 m und n resp. gleich 0 und a setzen. Hiernach ist

$$1)\ M'AM = Z_0^a = \frac{ab}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{a}{a} + \frac{ba}{2a} \sqrt{a^2 - a^2}$$
$$- \frac{ab}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{0}{a} - \frac{b.0}{2a} \sqrt{a^2 - 0^2}$$

$$2)\ M'AM = Z_0^a = \frac{ab}{2} \operatorname{arc\,sin} 1 - \frac{ab}{2} \operatorname{arc\,sin} 0.$$

Nun ist arc sin 1 der Bogen, dessen Sinus $= 1$ ist, also ist

$$3)\ \operatorname{arc\,sin} 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ferner ist arc sin 0 der Bogen, dessen Sinus $= 0$ ist, also

$$4)\ \operatorname{arc\,sin} 0 = 0.$$

Setzen wir die Werthe von arc sin 1 und arc sin 0 nach den Gleichungen 3 und 4 in Gleichung 2 ein, so folgt

$$5)\ M'AM = Z_0^a = \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{ab\pi}{4}.$$

Weil aber die Fläche der ganzen Ellipse 4 Mal so gross

ist, als M′AM, so folgt aus Gleichung 5, dass die Fläche der Ellipse

$$6)\ \mathrm{Fl} = 4 \, . \, \frac{ab\pi}{4} = ab\pi \text{ ist.}$$

Bemerkungen.

1. Wir hätten auch damit beginnen können, die Fläche der halben Ellipse BM′M zu berechnen. Zu dem Ende hätten wir in Gleichung 11 Seite 150 m und n, resp. gleich $-a$ und $+a$ setzen müssen. Danach hätte sich ergeben

$$7)\ BM'M = Z_{-a}^{+a} = \frac{ab}{2} \arcsin \frac{a}{a} + \frac{ba}{2a} \sqrt{a^2 - a^2}$$
$$- \frac{ab}{2} \arcsin \frac{-a}{a} - \frac{b(-a)}{22} \sqrt{a^2 - (-a)^2}$$

$$8)\ BM'M = Z_{-a}^{+a} = \frac{ab}{a} \arcsin 1 - \frac{ab}{2} \arcsin(-1).$$

$$9)\ BM'M = Z_{-a}^{+a} = \frac{2ab}{2} \arcsin 1 = ab \, . \, \frac{\pi}{2} = \frac{ab\pi}{2}.$$

Nun ist $\mathrm{Fl} = 2\, BM'M$, also

$$10)\ \mathrm{Fl} = 2 \frac{ab\pi}{2} = ab\pi.$$

2. Bekanntlich wird die Ellipse zu einem Kreise, wenn $a = b$ wird. Wir erhalten demnach aus den Gleichungen 6 oder 10 für den Inhalt eines Kreises, dessen Radius gleich a ist,

$$11)\ \mathrm{Fl} = a^2 \pi.$$

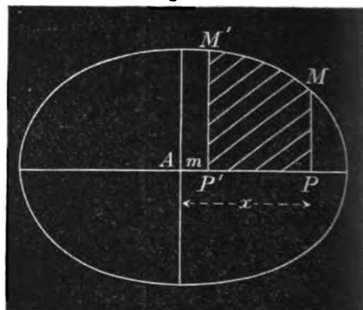
Ein Resultat, welches mit dem betreffenden Satze aus der Planimetrie vollkommen übereinstimmt.

Aufgabe 9. In der Ellipse Fig. 38 sei

1) $a = 6$
2) $b = 4$
3) $AP' = m = 1$
4) $AP = n = 5.$

Man soll die Fläche M′P′PM berechnen.

Fig. 38.



$AP' = m = 1,\ AP = n = 5.$

Auflösung. Wir setzen in Gleichung 11 Seite 150 für a, b, m und n ihre Werthe nach den Gleichungen 1 bis 4. Dadurch ergiebt sich

$$1)\ Z_1^5 = \frac{6.4}{2} . \text{arc sin} \frac{5}{6} + \frac{4.5}{2.6} \sqrt{36-25}$$
$$- \frac{6.4}{2} \text{arc sin} \frac{1}{6} - \frac{4.1}{2.6} \sqrt{36-1}$$

$$2)\ Z_1^5 = 12 \text{ arc sin } 0{,}833\,.. + 1{,}66\,..\sqrt{11}$$
$$- 12 \text{ arc sin } 0{,}166\,.. - 0{,}33\,..\sqrt{11}.$$

Berechnen wir die Zahlenwerthe, welche sich auf der rechten Seite von Gleichung 2 finden, so ergiebt sich

$$3) \begin{cases} 12 . \text{arc sin } 0{,}833\,.. & = 12{,}024 \\ 1{,}66\,..\sqrt{11} & = 5{,}526 \end{cases}$$

$$4)\ 12 . \text{arc sin } 0{,}833\,.. + 1{,}66\,..\sqrt{11} = 17{,}550\,..$$

$$5) \begin{cases} 12 . \text{arc sin } 0{,}166\,.. & = 2{,}000\,.. \\ 0{,}33\,...\sqrt{35} & = 1{,}992\,.. \end{cases}$$

$$6)\ - 12 \text{ arc sin } 0{,}166\,.. - 0{,}33\,..\sqrt{35} = - 3{,}972\,..$$

Setzen wir die Werthe von

$$12 \text{ arc sin } 0{,}833\,.. + 1{,}66\,..\sqrt{11} \text{ und}$$
$$- 12 \text{ arc sin } 0{,}166\,.. - 0{,}33\,..\sqrt{35}$$

nach den Gleichungen 4 und 6 in Gleichung 2 ein, so folgt

$$7)\ Z_1^5 = 17{,}550 . - 3{,}972\,..$$

$$8)\ Z_1^5 = 13{,}578.$$

Bemerkung.

Für den Anfänger wollen wir noch zeigen, wie man den Werth von arc sin 8,833 .. berechnet. Zu dem Ende nehmen wir an, dass in Fig. 39 der Radius $AC = AD$ gleich der Einheit sei. Setzen wir ferner

$$x = 0{,}833\,...$$

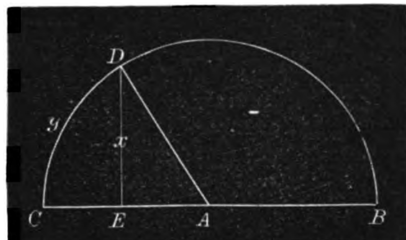
also $y = \text{arc sin } 0{,}833\,...$

so ist

$$\sin \measuredangle CAD = 0{,}833\,...$$

hiernach findet man aus den Sinustafeln $CAD = 56^0 27'$.

Fig, 39.



x = 0,833 ..

Nach einem bekannten Satze aus der Planimetrie sind aber die

Winkel am Mittelpunkte eines Kreises proportional dem zugehörigen Bogen, demnach ist:

$$\measuredangle\, CAD : 180^0 = y : \text{Halbkreis } \overset{\frown}{CDB}.$$

Nun ist der Halbkreis CDB $= \pi = 3{,}14159$.

$$\measuredangle\, CAD = 56^0 27' = 56^0{,}45.$$

Setzen wir diese Werthe von $\measuredangle$ CAD und Halbkreis CDB in die obige Proportion ein, so folgt

$$56^0{,}45 : 180^0 = y : 3{,}14159.$$

$$y = \frac{56{,}45}{180}\, 3{,}14159 = 1{,}002$$

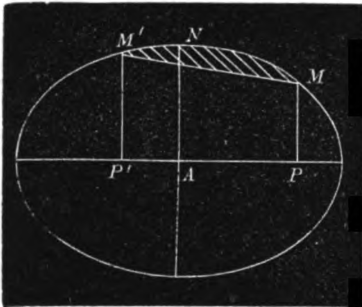
oder

$$y = \text{arc sin } 0{,}833\,.. = 1{,}002.$$

Dem geübten Leser wird bekannt sein, dass es Tabellen giebt, mit deren Hülfe man die Länge eines Bogens (y) berechnen kann, wenn die Grösse des entsprechenden Centriwinkels in Graden und Minuten gegeben ist.

Aufgabe 10. In der Ellipse Fig. 40 sei $a = 6$; $b = 4$ $AP' = -1$; $AP = 5$.

Fig. 40.



Man soll den Flächen-Inhalt des Segments M'NMM' berechnen.

Auflösung. Offenbar ist

1) Segment M'M'NM $=$ P'M'NMP $-$ P'M'MP.

Nun ist

2) $P'M'NMP = Z_{-1}^{+5} = 21{,}522\,..$

ferner ist

$$3)\ P'M'MP = \frac{\overline{M'P'} + \overline{MP}}{2}\,.\,\overline{P'P}.$$

M'P' und MP sind Ordinaten, welche resp. den Abscissen $x = -1$ und $x = +5$ entsprechen. Demnach ist

$$4)\ M'P' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{4}{6}\sqrt{36 - 1} = \frac{4}{6}\,.\,5{,}916.$$

$$5)\ M'P' = 3{,}944.$$

$$6)\ M\,P = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{4}{6}\sqrt{36 - 25} = \frac{4}{6}\sqrt{11}$$

7) $MP = 2{,}210.$

Endlich ist noch

8) $P'P = 6.$

Aus den Gleichungen 8, 7, 5 und 3 folgt weiter

9) $P'M'MP = \frac{3.944 + 2{,}210}{2} 6 = 18{,}62.$

Schalten wir die Werthe von P'M'MP und P'M'NMP nach den Gleichungen 9 und 2 in Gleichung 1 ein, so folgt

10) $\text{Segment } M'MNM' = 21{,}522.. - 18{,}62..$
$= 3{,}060..$

Aufgabe 11. In den Figuren 41 und 42 sind zwei Ellipsen

Fig. 41.

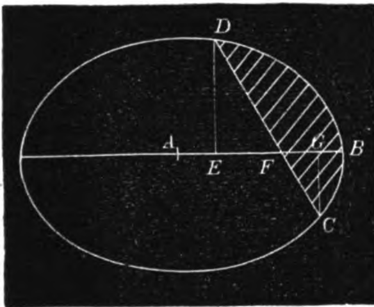
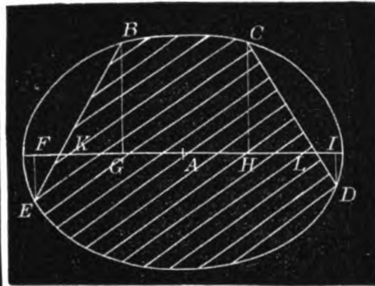


Fig. 42.



gegeben. Man soll in Fig. 41 die Fläche CBD und in Fig. 42 die Fläche BCDE berechnen.

Auflösung. Offenbar ist in Figur 41

$DBC = DEB + BCG + \triangle CFG - \triangle DEF.$

Ferner ist in Figur 42

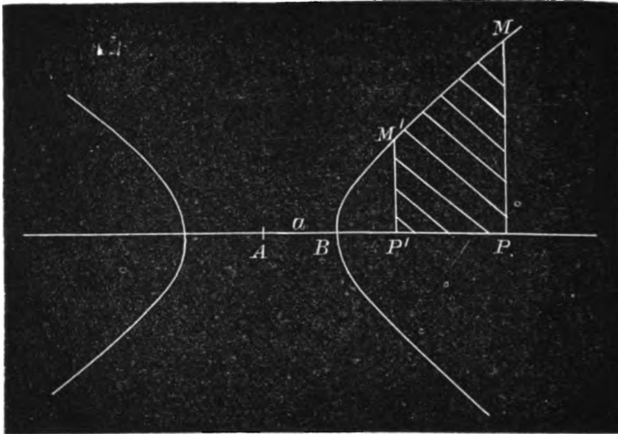
$BCDE = BCHG + IDEF + \triangle BGK + \triangle CHL - \triangle EFK - \triangle DIL.$

Die weitere Ausführung können wir dem Leser überlassen; indessen bemerken wir noch für den Anfänger, dass er wohl thut, die Rechnung an einem Zahlenbeispiele durchzuführen.

Aufgabe 12. Die Gleichung einer Hyperbel Figur 43 sei

1) $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

Fig. 43.



$AP' = n; \; AP = m.$

Man soll die Fläche M'P'PM berechnen, deren Grenzordinaten durch die Abscissen $AP' = n$, $AP = m$ bestimmt sind.

Auflösung. Setzen wir in die allgemeine Formel $dZ = y\,dx$ (Seite 142 Gleichung 6) für y seinen Werth nach Gleichung 1, so folgt

$$2)\ dZ = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,.\,dx$$

$$3)\ Z = \frac{b}{a}\int\sqrt{x^2 - a^2}\,.\,dx.$$

Nach den Entwickelungen auf Seite 82—84 finden wir

$$4)\ \int\sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\,l\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) + C.$$

Setzen wir den Werth von $\int\sqrt{x^2 - a^2}\,.\,dx$ in Gleichung 3 ein, so folgt

$$5)\ Z = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{2}\,l\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{2}\right) + C.$$

Den Bedingungen unserer Aufgabe gemäss wird $Z = 0$, wenn $x = n$. Es folgt demnach aus Gleichung 5

$$6)\ 0 = \frac{bn}{2a}\sqrt{n^2 - a^2} - \frac{ab}{2} l \left\{\frac{n + \sqrt{n^2 - a^2}}{a}\right\} + C.$$

Hieraus folgt

$$7)\ C = -\frac{bn}{2a}\sqrt{n^2 - a^2} + \frac{ab}{2} l \left\{\frac{n + \sqrt{n^2 - a^2}}{a}\right\}.$$

Setzen wir diesen Werth von C in Gleichung 5 ein, **und berücksichtigen wir, dass C unter der Voraussetzung bestimmt ist, dass für die Anfangs-Ordinate $x = n$ sei**, so folgt

$$8)\ Z_n = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{2} l \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$
$$- \frac{bn}{2a}\sqrt{n^2 - a^2} + \frac{ab}{2} l \frac{n + \sqrt{n^2 - a^2}}{a}$$

Setzen wir hierin $x = m$, so erhalten wir die Fläche M'P'CM, nämlich

$$9)\ Z_n^m = \frac{bm}{2}\sqrt{m^2 - a^2} - \frac{ab}{2} l \frac{m + \sqrt{m^2 - a^2}}{a}$$
$$- \frac{bn}{2}\sqrt{n^2 - a^2} + \frac{ab}{2} l \frac{n + \sqrt{n^2 - a^2}}{a}$$

Aufgabe 13. Man soll dasjenige Stück (BMP) der Hyperbelfläche Fig. 43 ermitteln, welches im Scheitelpunkte B anfängt, und durch die Ordinate MP abgeschlossen wird.

Auflösung. Die Fläche BMP ergiebt sich ohne Weiteres, wenn wir in Gleichung 9 der letzten Aufgabe $n = a$ setzen.

Demnach ist

$$Z_n^m = \frac{bm}{2a}\sqrt{m^2 - a^2} - \frac{ab}{2} l \frac{m + \sqrt{m^2 - a^2}}{a}$$

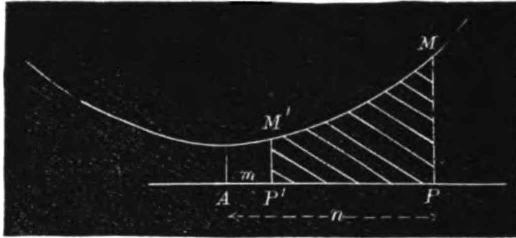
Bemerkung.

Man kann in ähnlicher Weise, wie dies Seite 147, 148 und 155 in Bezug auf Parabeln und Ellipsen geschehen ist, die Aufgabe stellen, beliebige Segmente etc. der Hyperbel zu berechnen.

Aufgabe. Die Gleichung einer Kettenlinie Fig. 44 sei

$$1)\ y = a \cdot \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}.$$ (Vergl. D. R. Seite 131.)

Fig. 44.



Man soll Figur 44 die Fläche M'P'PM berechnen, wenn AP' + n, AP = m ist.

Auflösung. Setzen wir in die allgemeine Gleichung $dZ = y\,dx$ für y seinen Werth nach der Gleichung unserer Kettenlinie, so folgt

$$2)\ dZ = a\,\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}\,dx$$

$$3)\ Z = a^2\frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2} + C.$$

Weil unsere Fläche bei AP' ($x = m$) anfangen soll, so wird **$Z = 0$, wenn $x = m$**, also

$$4)\ 0 = -a^2\,\frac{e^{m/a} - e^{-m/a}}{2} + C, \text{ oder}$$

$$5)\ C = -a^2\,\frac{e^{m/a} - e^{-m/a}}{2}$$

Setzen wir diesen Werth von C in Gleichung 3 ein, so folgt

$$6)\ Z_n = a^2\frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2} - a^2 \cdot \frac{e^{n/a} - e^{-n/a}}{2}.$$

Setzen wir hierin $x = m$, so folgt

$$7)\ Z_n^m = a^2 \cdot \frac{e^{m/a} - e^{-m/a}}{2} - a^2\frac{e^{n/a} - e^{n/a}}{2}.$$

Aufgabe 15. Man soll die Cycloide Figur 45 quadriren.

Auflösung. In D. R. Seite 135 haben wir die Cycloide durch folgende beiden Gleichungen bestimmt

1) $x = r(t - \sin t)$

2) $y = r(1 - \cos t)$.

Hieraus ergiebt sich

3) $dx = r(1 - \cos t)\, dt$.

Werden die Werthe von y und dx nach den Gleichungen 2 und 3 in die allgemeine Gleichung „$dz = y\, dx$" eingesetzt, so folgt

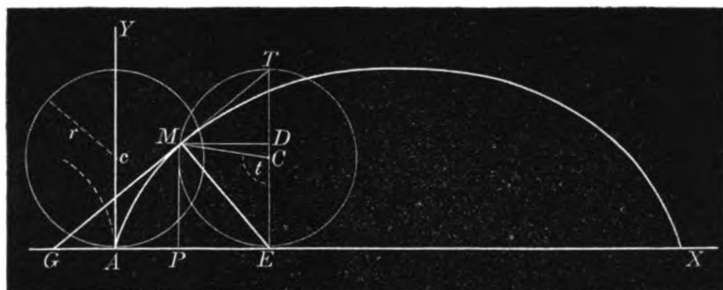
4) $dZ = r(1 - \cos t) \,.\, r(1 - \cos t)\, dt$

5) $dZ = r^2 (1 - 2 \cos t + \cos^2 t)\, dt$

6) $Z = r^2 \left\{ t - 2 \sin t + \frac{\sin 2\, t}{4} + \frac{t}{2} \right\} + C$

7) $Z = r^2 \left\{ \frac{3}{2}\, t - 2 \sin t + \frac{\sin 2\, t}{4} \right\} + C.$

Fig. 45.



Da wir die Fläche der ganzen Cycloide berechnen wollen, so muss unsere Fläche (Z) im Punkte A beginnen.

Für den Punkt A ist aber $t = 0$. **Es ist also in Gleichung 7 $Z = 0$, wenn $t = 0$,** hieraus folgt

8) $0 = 0 + C$, oder

9) $C = 0$.

Setzen wir diesen Werth von C in Gl. 7 ein, so folgt

10) $Z_0 = r^2 \left(\frac{3}{2}\, t - 2 \sin t + \frac{\sin 2\, t}{4} \right).$

Setzen wir in diese Gleichung $t = 2\pi$, so erhalten wir für die ganze Cycloidenfläche folgende Gleichung

$$11)\quad Z_0^{2\pi} = r^2\left(\frac{3}{2}\,2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{\sin 4\pi}{4}\right).$$

Bekanntlich ist aber sowohl $\sin 2\pi$ als auch $\sin 4\pi$ gleich Null demnach ist

$$12)\quad Z_0^{2\pi} = 3r^2\pi.$$

Bemerkung.

Die Fläche eines Kreises, dessen Radius gleich r ist, ist bekanntlich gleich $r^2\pi$; also ist nach Gleichung 12 **die Fläche einer Cycloide drei Mal so gross, als die Fläche des erzeugenden Kreises.**

Aufgabe 16. Eine Curve ist durch die Gleichung

$$1)\quad y = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$$

bestimmt. Man soll die Fläche Z_n^m dieser Curve ermitteln.

Auflösung. Setzen wir in die allgemeine Gleichung „$dz = y\,dx$" für y seinen Werth nach Gleichung 1, so folgt

$$2)\quad dZ = (x^3 - 9x^2 + 23x - 15)\,dx.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$3)\quad Z = \frac{x^4}{4} - 3x^3 + \frac{23}{2}x^2 - 15x + C,$$

weil nun unsere Fläche $\left(Z_n^m\right)$ bei der Ordinate anfangen soll, **für welche $x = n$ ist,** so ist in Gleichung 4

$$Z = 0, \text{ wenn } x = n.$$

Setzen wir diese beiden zusammengehörigen Werthe Z und x in Gleichung 3 ein, so folgt

$$4)\quad 0 = \frac{n^4}{4} - 3n^3 + \frac{23}{2}n^2 - 15n + C, \text{ also}$$

$$5)\quad C = -\frac{n^4}{4} + 3n^3 - \frac{23}{2}n^2 + 15n.$$

Hieraus folgt mit Hülfe von Gleichung 3

$$6)\ Z_n = \frac{x^4}{4} - 3x^3 + \frac{23}{2}x^2 - 15x - \frac{n^4}{4} + 3n^3 - \frac{23}{2}n^2 + 15n.$$

Setzen wir in Gleichung 6, $x = m$, so ergiebt sich

$$7)\ Z_n^m = \frac{m^4}{4} - 3m^3 + \frac{23}{2}m^2 - 15m - \frac{n^4}{4} + 3n^3 - \frac{23}{2}n^2 + 15n.$$

Bemerkungen.

1. Aus Gleichung 7 folgt

$$8)\ Z_1^3 = \frac{81}{4} - 81 + \frac{23}{2}.9 - 15.3 - \frac{1}{4} + 3 - \frac{23}{2} + 15$$

$$9)\ Z_1^3 = 4.$$

2. Aus Gleichung 7 folgt ferner

$$10)\ Z_3^5 = \frac{625}{4} - 375 + 287^1/_2 - 75 - \frac{81}{4} + 81 - 103^1/_2 + 45$$

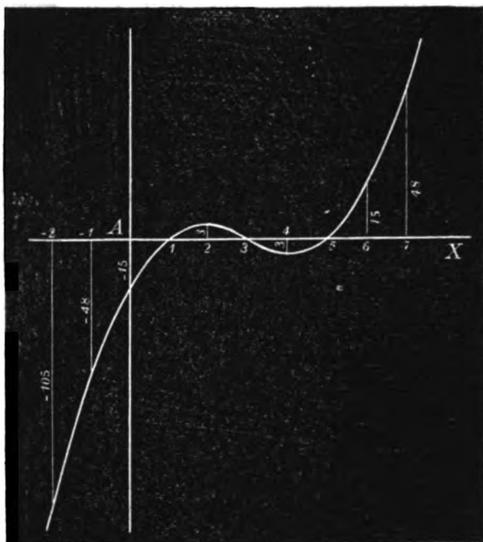
$$11)\ Z_3^5 = -4.$$

3. Endlich folgt aus Gleichung 7

$$12)\ Z_1^5 = \frac{625}{4} = 375 + 287^1/_2 - 75 - \frac{1}{4} + 3 - \frac{23}{2} + 15$$

$$13)\ Z_1^5 = 0.$$

Fig. 46.



4. Nach Gleichung 13 ist der Werth der Fläche $\left(Z_1^5\right)$, deren Grenzen durch die Abscissen $x = 1$ und $x = 5$ bestimmt sind, gleich Null. Dies liesse sich nach den Resultaten in Gleichung 9 und 11 vorher sagen, weil unter Umständen $Z_1^5 = Z_1^3 + Z_3^5$ sein muss.

5. Man kann diese Erscheinung leicht erklären, wenn man die gegebene Gl. (1) discutirt, und die entsprechende Curve construirt, dies ist schon D. R. Seite 181 ff. geschehen. Wir fanden dort, dass unsere Curve die Abscissenachse zwei Mal schneidet, und zwar in Punkten, für welche x resp. gleich 1, 3 und 5 ist.

6. Aus der Discussion von Gleichung 1 erkennt man auch sehr leicht, dass die entgegengesetzten Vorzeichen von Z_1^3 und Z_3^5 der entgegengesetzten Lage dieser Flächen gegen die Abscissenachse entsprechen.

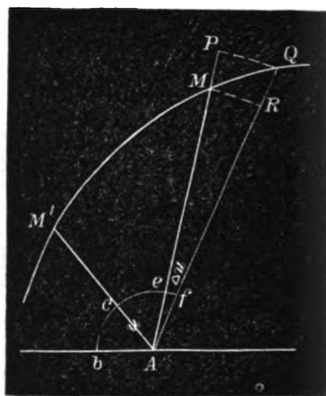
7. Aus dem Vorstehenden folgt also: **Wenn man den absoluten Werth desjenigen Theiles der Fläche einer Curve bestimmen will, welches zwischen zwei beliebigen Ordinaten liegt, so muss man auf die etwaigen Durchschnittspunkte der Curve mit der Abscissenachse Rücksicht nehmen.**

§. 63.

Das Differential der Fläche ebener Curven, welche auf Polar-Coordinaten bezogen sind.

Bezeichnen wir in Figur 47 diejenige Fläche, welche durch zwei beliebige *radii vectores* (AM, AM′) und den zugehörigen Bogen (MM′) begrenzt wird, durch Z; nehmen wir ferner an, dass der eine *radius vector* AM′ **fest** und der andere AM **beweglich** sei, und lassen wir den Bogen b c e d. i. u um Δ u wachsen, so wird Z um Δ Z zunehmen.

Fig. 47.



Bogen $\overset{\frown}{bce} = u$; $\overset{\frown}{cf} = \Delta u$

Nach den Bezeichnungen in unserer Figur ist Δ Z = AMQ, und man erkennt leicht, dass der Werth von Δ Z zwischen den Werthen der Kreis-Ausschnitte AMR und APQ liegen muss. Es ist aber

$$1)\ AMR = \frac{\overline{AM}^2 \cdot \Delta u}{2} = \frac{r^2}{2} \Delta u$$

$$2)\ APQ = \frac{\overline{AQ}^2 \cdot \Delta u}{2} = \frac{(r + \Delta r)^2}{2} \Delta u.$$

Also liegt Δ Z dem Werthe nach zwischen $\frac{r^2}{2} \Delta u$ und $\frac{(r + \Delta r)^2}{2} \Delta u$, so dass wir schreiben können

$$3)\ \Delta Z = \frac{(r + \Theta . \Delta r)^2}{2} . \Delta u$$ (vergl. Bemerk. ** Seite 141)

wo Θ eine absolute Zahl bedeutet, deren Werth zwischen 0 und 1 liegt.

Aus Gleichung 3 folgt

$$4)\ \frac{\Delta Z}{\Delta u} = \frac{(r + \Theta . \Delta r)^2}{2}.$$

Setzen wir in diese Gleichung Δu gleich Null, so wird auch ΔZ und Δr zu Null. Wir erhalten demnach aus Gl. 4

$$5)\ \frac{dZ}{du} = \frac{r^2}{2},\text{ also}$$

$$6)\ dZ = \frac{r^2}{2}\, du.$$

§. 64.

Quadratur ebener Polar-Curven.

Nach den Entwickelungen des vorigen §. ist es jetzt sehr einfach, eine allgemeine Methode zur Quadratur einer Polar-Curve anzugeben. Haben wir nämlich die Gleichung

$$1)\ r = f(u)$$

als Polargleichung einer Curve, so folgt aus der Gl. 6 §. 63

$$2)\ dZ = \frac{(f u)^2}{2}\, du$$

$$3)\ Z = \int \frac{(f u)^2}{2}\, du + C.$$

§. 65.

Fortsetzung. Aufgaben.

Aufgabe 1. Die Polargleichung einer Parabel (Fig. 48) ist

$$1)\ r = \frac{1/_2\, a}{1 + \cos u}$$

Man soll die Fläche M'AM ($= Z_n^m$) bestimmen, wenn für die *radii vulores* M'A und MA, u resp. gleich n und m ist.

Auflösung. Wir finden nach Gleichung 6 Seite 163

$$2)\ dZ = \frac{r^2}{2}\,du$$

Setzen wir in diese Gleichung für r seinen Werth nach Gleichung 1, so folgt

$$3)\ dZ = \frac{1}{2}\,\frac{{}^1/_4\,a^2}{(1+\cos u)^2}\,du$$

$$4)\ dZ = \frac{1}{8}\cdot\frac{a^2}{\left\{1+\left(2\cos^2\frac{u}{2}-1\right)\right\}}\,du.$$

$$5)\ dZ = \frac{1}{8}\cdot\frac{a^2}{\left(2\cos^2\frac{u}{2}\right)^2}\,du$$

$$6)\ dZ = \frac{a^2}{32}\,\frac{du}{\cos^4\frac{u}{2}}$$

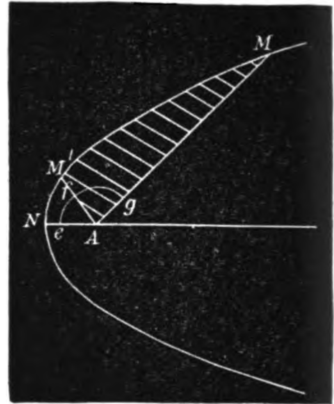


Fig. 48.

$\overset{\frown}{ef} = n$; $\overset{\frown}{efg} = m$.

Hiernach ist

$$7)\ Z = \frac{a^2}{16}\cdot\int\frac{dx}{\cos^4\frac{u}{2}} + C.$$

Um $\int\frac{d\frac{u}{2}}{\cos^4\frac{u}{2}}$ zu berechnen, setzen wir $\frac{u}{2} = t$, dann ist

$$8)\ \int\frac{d\frac{u}{2}}{\cos^4\frac{u}{2}} = \int\frac{dt}{\cos^4 t}$$

Nun ist

$$9)\ \int\frac{dt}{\cos^4 t} = \int\frac{(\cos^2 t + \sin^2 t)dt}{\cos^4 t}$$

$$10)\ \int\frac{dt}{\cos^4 t} = \int\frac{dt}{\cos^2 t} + \int\frac{\sin^2 t\,.\,dt}{\cos^4 t}.$$

Ferner ist nach Gleichung 12 Seite 6

$$11)\ \int\frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C.$$

Wenden wir auf den Ausdruck $\int\frac{\sin^2 t\,dt}{\cos^4 t}$ die theilweise Integration an nach Seite 25 ff., so folgt

$$12)\ \int\frac{\sin^2 t\,dt}{\cos^4 t} = -\int \underset{u}{\sin t}\,.\,\underset{dv}{\frac{d\cos t}{\cos^4 t}}$$

$$= -\left\{\underset{u}{\sin t}\,.\,\underset{v}{\left(-\frac{1}{3\cos^3 t}\right)} - \int \underset{v}{-\frac{1}{3\cos^3 t}}\,.\,\underset{du}{\cos t\,dt}\right\}$$

$$= \frac{\sin t}{3\cos^3 t} - \frac{1}{3}\int\frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\sin t}{\cos^3 t} - \frac{1}{3}\operatorname{tg} t + C.$$

Schalten wir die Werthe von $\int\frac{\sin^2 t\,dt}{\cos^4 t}$ und $\int\frac{dt}{\cos^2 t}$ nach den Gleichungen 12 und 11 in Gleichung 10 ein, so folgt

$$13)\ \int\frac{dt}{\cos^4 t} = \frac{1}{3}\frac{\sin t}{\cos^3 t} - \frac{1}{3}\operatorname{tg} t + \operatorname{tg} t + C$$

$$= \frac{u}{2}\operatorname{tg} t + \frac{1}{3}\frac{\sin t}{\cos^3 t}.$$

Setzen wir hierin $t = \frac{u}{2}$, so folgt nach Gleichung 7

$$14)\ Z = \frac{a^2}{16}\left\{\frac{2}{3}\operatorname{tg}\frac{u}{2} + \frac{1}{3}\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos^3\frac{u}{2}}\right\} + C.$$

Hieraus folgt

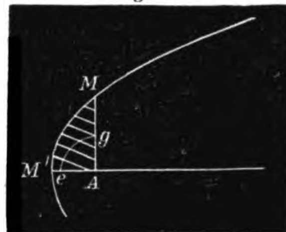
$$15)\ Z_n^m = \frac{a}{16}\left\{\frac{2}{3}\operatorname{tg}\frac{m}{2} + \frac{1}{3}\frac{\sin\frac{m}{2}}{\cos^2\frac{m}{2}}\right\}$$

$$-\frac{a^2}{16}\left\{\frac{2}{3}\operatorname{tg}\frac{n}{2} + \frac{1}{3}\frac{\sin\frac{n}{2}}{\cos^3\frac{n}{2}}\right\}.$$

Bemerkungen.

1. Setzen wir Figur 49 $m = \frac{\pi}{2}$ und $n=0$, so erhalten wir aus Gleichung 15

Fig. 49.



$\smile{eg} = \frac{\pi}{2}.$

$$16)\ Z_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{16}\left\{\frac{2}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos^3\frac{\pi}{4}}\right\}$$

$$-\frac{a^2}{16}\left\{\frac{2}{3}\operatorname{tg} 0 + \frac{1}{3}\frac{\sin 0}{\cos^3 0}\right\}.$$

Nun ist $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, $\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{1/2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{1/2}$

$\operatorname{tg} 0 = 0$, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.

Hiernach ergiebt sich aus Gleichung 16

$$17)\quad Z_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}\left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}.2\right\}$$

$$18)\quad Z_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{12}.$$

2. Offenbar muss der Werth von $Z_0^{\pi/4}$ gleich dem Werth von Z_0 in Gleichung 7 Seite 145 sein, wenn wir in diese Gleichung $x = \frac{a}{4}$ setzen.

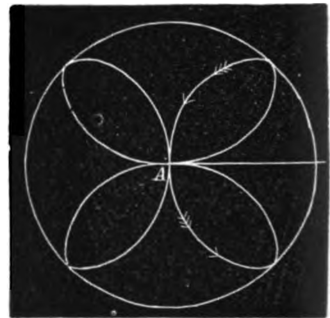
Der Vergleich unserer Gleichung 18 mit Gleichung 7 Seite 145 giebt uns eine Controlle für die Richtigkeit der Rechnung.

Aufgabe 2. Die Gleichung einer Polar-Curve ist Fig. 50

$$1)\quad r = a.\sin 2u.$$

Man soll dieselbe quadriren.

Fig. 50.



Auflösung. Ehe wir zur eigentlichen Lösung unserer Aufgabe übergehen, wollen wir uns eine Vorstellung von dem Laufe der Curve zu machen suchen; und zu dem Ende für einige Werthe von u die zugehörigen Werthe von r berechnen. Diese Rechnung ergiebt

für $u = 0$, $r = 0$

„ $u = \frac{1}{12}\pi$, $r = 1/2.a$

„ $u = \frac{3}{12}\pi$, $r = a$

„ $u = \frac{5}{12}\pi$, $r = 1/2.a$

„ $u = \frac{6}{12}\pi$, $r = 0$

„ $u = \frac{7}{12}\pi$, $r = -1/2.a$

für $u = \frac{9}{12}\pi$, $r = -a$

„ $u = \frac{11}{12}\pi$, $r = -\frac{1}{2} . a$

„ $u = \frac{12}{12}\pi$, $r = 0$

„ $u = \frac{13}{12}\pi$, $r = \frac{1}{2} . a$ etc.

Wenn wir hiernach die Curve construiren, so ergiebt sich dieselbe, wie sie in Figur 50 dargestellt ist. Die Berechnung ist jetzt sehr einfach. Setzten wir nämlich nach Gleichung 6 Seite 163

$$2)\quad dZ = \frac{r^2}{2} du$$

und setzen wir hierin für r seinen Werth nach Gleichung 1, so folgt

$$3)\quad dZ = \frac{a^2 . \sin^2 2\,u . du}{2}.$$

Hieraus folgt durch Integration nach Gleichung 7 Seite 31

$$4)\quad Z = \frac{u - \sin 2\,u . \cos 2\,u}{4} . a^2 + C.$$

Wollen wir hieraus die ganze Fläche berechnen, so bestimmen wir den Werth von C durch die Bemerkung, **dass $Z = 0$ wird, wenn $u = 0$ wird.** Hieraus ergiebt sich

$$5)\quad Z_0^{2\pi} = \frac{2\,\pi - \sin 2\,\pi . \cos 2\,\pi}{4} a^2 - \frac{0 - \sin 0 . \cos 0}{4} a^2$$

$$6)\quad Z_0^{2\pi} = \frac{2\,\pi\,a^2}{4} = \frac{a^2\,u}{2}.$$

Die ganze Fläche unserer Curve ist demnach halb so gross wie der umbeschriebene Kreis.

VI. Capitel.

Angenäherte Berechnung eines Integrals und Entwickelung der Functionen in Reihen durch Integration.

§. 66.

Integration durch Reihen.

In vielen Fällen, in denen die Integrationsmethoden, welche bis jetzt gelehrt sind, zur Integration einer Differential-Function fx . dx nicht ausreichen, ist es zweckmässig, die vorliegende Differential-Function in eine Reihe zu entwickeln, und darauf jedes Glied dieser Reihe zu integriren.

Setzen wir z. B. nach D. R. Seite 73, Gl. 11

1) $fx = f0 + f'0 + \frac{x^2}{1.2} f''0 + \frac{x^3}{x!} f'''0 + \ldots$

so ergiebt sich hieraus

2) $\int fx\, dx = \int (f0 + x . f'0 + \frac{x^2}{1.2} f''0 + \frac{x^3}{3!} f'''0 + \ldots) dx.$

Hieraus folgt nach §. 4, Seite 3

3) $\int fx . dx = x f0 + \frac{x^2}{1.2} f'0 + \frac{x^3}{3!} f''0 + \ldots C.$

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich folgendes Resultat: **Wenn eine Function, fx, sich nach Mac Laurins Satz in eine convergente Reihe entwickeln lässt, so kann man $\int$ fx . dx stets durch eine convergente Reihe ausdrücken.**

Bemerkung. Wenn eine gegebene Function (fx . dx) sich nicht unmittelbar nach Mac Laurins Satz in eine convergente Reihe entwickeln lässt, so muss man suchen diese Function auf andere Weise in eine convergente Reihe umzuwandeln, wobei indessen zu beachten ist, dass die einzelnen Glieder dieser Reihe **integrirbar** sein müssen, wenn die entwickelte Reihe zur Integration von fx . dx dienen soll.

§. 67.

Fortsetzung — $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ und $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

Aufgabe 1. Man soll die Function $\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ integriren.

Auflösung 1. Der absolute Werth von x ist kleiner als 1.

Nach dem binomischen Lehrsatze ist

1) $$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = 1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1.3}{2.4}x^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^9 + \dots$$

Hieraus folgt

2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \int \left(1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1.3}{2.4}x^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^9 + \dots\right) dx$$

3) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^7}{7} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^{10}}{10} + \dots + C.$$

Bemerkung. Um die Richtigkeit von Gl. 1 nachzuweisen, setze man nach D. R. Seite 79, Gl. IV.

4) $$(a+b)^m = a^m + m\,a^{m-1}\,b + \frac{m.(m-1)}{1.2}a^{m-2}\,b^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{3!}a^{m-3}\,b^3 + \dots$$

Setzt man hierin $a = 1$, $m = -\frac{1}{2}$, so folgt

5) $$(1+b)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}b + \frac{(-\frac{1}{2}).(-\frac{3}{2})}{1.2}b^2 + \frac{(-\frac{1}{2}).(-\frac{3}{2}).(-\frac{5}{2})}{1.2.3}b^3 + \dots$$

6) $$(1+b)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}b + \frac{1.3}{2.4}b^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}b^3 + - \dots$$

Setzt man hierin $b = x^3$, so folgt

7) $$(1+x^3)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1.3}{2.4}x^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^9 + - \dots$$

8) $$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = 1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1.3}{2.4}x^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^9 + - \dots$$

Auflösung II. Der Werth von x ist grösser als + 1.

Wenn der Werth von x grösser als 1 ist, so ist die Gleichung 3 nicht mehr brauchbar, um den Werth von $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ auszudrücken, weil die rechte Seite dieser Gleichung

dann eine divergente Reihe ist. In diesem Falle setzt man vielmehr

$$9)\quad \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}$$

Nach dem binomischen Lehrsatze ist dann wieder

$$10)\quad \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{x^6} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{x^9} + \ldots$$

Hieraus folgt nach Gleichung 9

$$11)\quad \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^9}} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^{15}}} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^{21}}} \ldots \right\} . dx.$$

Integriren wir beide Seiten dieser Gleichung, so folgt nach §. 4, Seite 3 und 4

$$12)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = -\frac{2}{\sqrt{x}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7.x^3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{13.x^6} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{19.x^9} + - \ldots \right\} + C.$$

Wie würde man verfahren, um $\int_{1/2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ zu ermitteln?

Haben die bestimmten Integrale $\int_{-1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$, $\int_{-2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ und $\int_{-7}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ einen reellen Werth?

Aufgabe 2. Man soll die Function $\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ integriren.

Auflösung I. Wenn der absolute Werth von x kleiner als 1 ist, so setze man nach dem binomischen Lehrsatze

$$1)\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1.3}{2.4}x^6 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^9 + \ldots$$

Hieraus folgt

$$2)\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=\int\left(1+\frac{1}{2}x^3+\frac{1.3}{2.4}x^6+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^9+\ldots\right)dx$$

$$3)\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^7}{7}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^{10}}{10}+\ldots+C.$$

Auflösung II. Wenn der Werth von x kleiner als — 1 ist, so setze man zunächst

$$4)\ \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}=\frac{1}{\sqrt{-x^3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}}$$

Dann setzen wir nach dem binomischen Lehrsatze

$$5)\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}}=\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{x^6}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{x^9}+\ldots$$

Aus den Gleichungen 4 und 5 folgt dann

$$6)\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=\frac{1}{\sqrt{-x^3}}\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{x^6}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{x^9}+\ldots\right\}$$

$$7)\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=\int\left(\frac{1}{\sqrt{-x^3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{-x^9}}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{\sqrt{-x^{15}}}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{\sqrt{-x^{21}}}+\ldots\right)dx.$$

$$8)\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=\frac{2}{\sqrt{-x}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7\sqrt{-x^7}}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{3}{13\sqrt{-x^{13}}}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{2}{19\sqrt{-x^{19}}}+\ldots+C.$$

9) $$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=\frac{2}{\sqrt{-x}}\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7.x^3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{13.3^6}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{2}{19.x^9}+..\right\}+C.$$

Bemerkungen.

1. **Setzt man in Gleichung 3, Seite 169 $-x$ statt x, so folgt**

$$\int\frac{d(-x)}{\sqrt{1+(-x)^3}}=(-x)-\frac{1}{2}\cdot\frac{(-x)^4}{4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{(-x)^7}{7}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{(-x)^{10}}{10}+\ldots+C.$$

Hieraus folgt

$$-\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=-x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^7}{7}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^{10}}{10}-..-C.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=x+\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^7}{7}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^{10}}{10}+..+C.$$

Man kann also aus Gleichung 3, Seite 169, Gleichung 3, Seite 171 ableiten.

2. **Man soll Gleichung 9, Seite 172, dadurch entwickeln, dass man in Gleichung 12, Seite 170, $-x$ statt x setzt.**

3. **Warum sind die Gleichungen 3, Seite 169 u. 171, nicht brauchbar, wenn der absolute Werth von x grösser als 1 ist?**

4. **Warum sind die Gleichungen 12, Seite 170, und Gl. 9, Seite 172, nicht brauchbar, wenn der absolute Werth von x kleiner als 1 ist?**

5. **Was lässt sich über die Gleichung 3, Seite 169, Gl. 12, Seite 171, Gl. 3, Seite 171, und Gl. 9, Seite 172, sagen, wenn $x=\pm 1$ ist? In welchen Grenzen müssen die Werthe von x bleiben, damit in den genannten Gleichungen die Resultate reell bleiben?**

§. 68.

Fortsetzung —. $\int(1-\varepsilon^2\cos^2 u)\,du$.

Aufgabe. Man soll die Function $\sqrt{(1-\varepsilon^2\cos^2)}\,du$ integriren, wenn ε ein ächter Bruch ist.

Auflösung. Nach dem binomischen Lehrsatze ist

1) $$(1-\varepsilon^2\cos^2 u)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2 u-\frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4\cos^4 u-\frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon^6\cos^6 u-\ldots$$

Ferner ist nach D. R. §. 45, Seite 77,

2) $\cos^2 u = \frac{1}{2}(\cos 2u + 1)$

3) $\cos^4 u = \frac{1}{8}(\cos 4u + 4\cos 2u + 3)$

4) $\cos^6 u = \frac{1}{32}(\cos 6u + 6\cos 4u + 15\cos 2u + 10)$

. . .

. . .

. . .

Substituiren wir nach den Gleichungen 2 bis 4 die Werthe von $\cos^2 u$, $\cos^4 u$, $\cos^6 u \ldots$ in Gleichung 1, so folgt

$$5)\ (1-\varepsilon^2\cos^2 u)^{1/2} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{2}(\cos 2u + 1) \\ -\frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4 \cdot \frac{1}{8}(\cos 4u + 4\cos 2u + 3) \\ -\frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon^6 \cdot \frac{1}{32}(\cos 6u + 6\cos 4u + 15\cos 2u + 10) \\ \quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ \quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ \quad . \quad\quad . \quad\quad . \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$6)\ (1-\varepsilon^2\cos^2 u)^{1/2} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{3}{8}\varepsilon^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{10}{32}\varepsilon^6 - \ldots \\ -\left(\frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{4}{8}\varepsilon^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{15}{32}\varepsilon^6 + \ldots\right)\cos 2u \\ -\left(\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{1}{8}\varepsilon^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{6}{32}\varepsilon^6 + \ldots\right).\cos 4u \\ -\left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{32}\varepsilon^6 + \ldots\right).\cos 6u \\ \quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ \quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ \quad . \quad\quad . \quad\quad . \end{cases}$$

Aus Gleichung 6 folgt

$$7)\int\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 u}\,du=\int du.\left\{\begin{array}{l}
1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{3}{8}\varepsilon^4 \\
\qquad\qquad -\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{10}{32}\varepsilon^6\ldots \\
-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{4}{8}\varepsilon^4\right. \\
\qquad \left.-\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{15}{32}\varepsilon^6\ldots\right).\cos 2u \\
-\left(\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{1}{8}\varepsilon^4+\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{6}{32}\varepsilon^6\ldots\right)\cos 4u \\
-\left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{32}\varepsilon^6+\ldots\right).\cos 6u \\
\quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot \\
\quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot \\
\quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot
\end{array}\right.$$

$$8)\int\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 u}\,du=C+\left\{\begin{array}{l}
\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{1.1}{4.4}\cdot\frac{3}{8}\varepsilon^4\right. \\
\qquad\qquad \left.-\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{10}{32}\varepsilon^6+..\right).u \\
-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{4}{8}\varepsilon^4\right. \\
\qquad \left.+\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{15}{32}\varepsilon^6+\ldots\right)\cdot\frac{\sin 2u}{2} \\
-\left(\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{1}{8}\varepsilon^4+\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{6}{32}\varepsilon^6\right. \\
\qquad \left.+\ldots\right)\cdot\frac{\sin 4u}{4} \\
-\left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{32}\varepsilon^6+\ldots\right)\cdot\frac{\sin 6u}{6} \\
\quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot \\
\quad\cdot\qquad\cdot\quad .\quad\cdot \\
\quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot
\end{array}\right.$$

Bemerkungen.

1. Das Integral in Gleichung 8 werden wir später anwenden zur Berechnung des Bogens einer Ellipse.

2. Das Integral $\int\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 u}\,.\,du$ gehört zu den sogenannten elliptischen Integralen, und zwar ist dasselbe ein elliptisches Integral zweiter Art.

3. Die Integration der Ausdrücke von der Form $\cos^2 u\,du$, $\cos^4 u\,du$ etc. hätte man auch nach Auflösung von Aufgabe 2, Seite 30, ausführen können.

§. 69.

Entwickelung der Functionen in Reihen durch Integration.

Wenn das Differential einer Function, Fx, sich in eine convergente Reihe entwickeln lässt, deren einzelne Glieder integrirbar sind, so lässt sich die Function Fx durch Integration dieser convergenten Reihe selbst wieder in eine Reihe entwickeln. Ist z. B. $d\,Fx = fx\,.\,dx$, und ist ferner

1) $fx = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ so ist

2) $\int fx\,.\,dx = \int (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots)\,dx$

Setzen wir nun in Gleichung 3 $\int fx\,.\,dx = Fx + C'$, so folgt

3) $Fx + C' = (Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{3} + \frac{Dx^4}{4} + \ldots) + C''.$

4) $Fx = C'' - C' + Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{3} + \frac{Dx^4}{4} + \ldots$

Setzen wir $C'' - C' = C$ so folgt

5) $Fx = C + Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{3} + \frac{Dx^4}{4} + \ldots$

§. 70.

Fortsetzung. Reihen für $l(1+x)$ und $l\frac{1+x}{1-x}$.

Aufgabe 1. Man soll $l(1+x)$ in eine Reihe verwandeln.

Auflösung. Weil $d\,l(1+x)=\frac{dx}{1+x}$, so ist

$$1)\ \int\frac{dx}{1+x}=l(1+x)+C'.$$

Ferner ist nach dem binomischen Lehrsatze

$$2)\ \frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4\ldots$$

Hieraus folgt

$$3)\ \int\frac{dx}{1+x}=\int(1-x+x^2-x^3+x^4\ldots)\,dx.$$

$$4)\ \int\frac{dx}{1+x}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\ldots+C''.$$

Setzen wir in diese Gleichung den Werth von $\int\frac{dx}{1+x}$ nach Gleichung 1, so folgt

$$5)\ l(1+x)+C'=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\ldots+C''$$

oder wenn wir $C''-C'$ setzen

$$6)\ l(1+x)=C+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\ldots$$

Berücksichtigen wir nun, dass $l(1+x)=0$ wenn $x=0$, so folgt

7) $C=0$. (Vergl. Bemerkung Seite 2.)

Setzen wir den Werth von C in Gleichung 6 ein, so folgt

$$8)\ l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\ldots$$ (vergl. D. R. Seite 80.)

Aufgabe 2. Man soll $l\frac{1+x}{1-x}$ in eine Reihe entwickeln.

Auflösung. Es kömmt zunächst darauf an, einen Ausdruck für $d\,l\frac{1+x}{1-x}$ **aufzustellen.** Nun ist $d\,l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{1-x^2}\,dx$, also ist

$$1)\ \int \frac{2}{1-x^2}\,dx = l\frac{1+x}{1-x} + C'.$$

Ferner ist nach den binomischen Lehrsätzen

$$2)\ \frac{2}{1-x^2} = 2\,(1-x^2)^{-1} = 2\,\{1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots\}$$

also

$$3)\ \int \frac{2}{1-x^2}\,dx = 2\int \{1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots\}.\,dx.$$

$$4)\ \int \frac{2}{1-x^2}\,dx = 2\,\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\}. + C''.$$

Setzen wir links in Gleichung 4 für $\int \frac{2}{1-x^2}\,dx$ einen Werth nach Gleichung 1, so folgt

$$5)\ l\frac{1+x}{1-x} + C' = 2\,\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + ..\} + C''.$$

$$6)\ l\frac{1+x}{1-x} = C + 2\,\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + ..\}.$$

Für $x = 0$ wird $l\frac{1+x}{1-x} = 0$, also ist auch $C = 0$, mithin folgt aus Gleichung 6

$$7)\ l\frac{1+x}{1-x} = 2\,(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots).$$ **vergl. D. R. Seite 80. III.**

§. 71.

Fortsetzung. — Reihe für arc tg x und arc sin x.

Aufgabe 1. Man soll arc tg x in eine Reihe entwickeln.

Auflösung. Weil $d \operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1+x^2}$, so entwickeln wir $\frac{1}{1+x^2}$ zunächst in eine Reihe. Wir erhalten demgemäss

$$1)\ \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots$$

$$2)\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots) . dx.$$

$$3)\ \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots + C'.$$

Ferner ist

$$4)\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C''.$$

Setzen wir nach Gleichung 4 den Werth von $\int \frac{dx}{1+x^2}$ in Gleichung 3 ein, so folgt

$$5)\ \operatorname{arc\,tg} x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots$$

Für $x = 0$ ist $\operatorname{arc\,tg} x = 0$, also ist $C = 0$. Demnach folgt aus Gleichung 5

$$6)\ \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots$$ (vergl. D. R. Seite 90, Gl. 11.

Bemerkung. Setzt man in Gleichung 6, $x . \sqrt{-1}$ statt x, so folgt

$$7)\ \operatorname{arc\,tg} (x . \sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \ldots)$$

$$8)\ 2 \operatorname{arc\,tg} (x . \sqrt{-1}) = 2 . \sqrt{-1}\,(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \ldots)$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit Gl. 7 Seite 177, so folgt

$$9)\ 2 \operatorname{arc\,tg} (x . \sqrt{-1}) = l \frac{1+x}{1-x} . \sqrt{-1}$$

Die Richtigkeit von Gl. 9 lässt sich auch sofort erkennen, wenn man bedenkt, dass

$d\, l \frac{1+x}{1-x} = \frac{2\, dx}{1-x^2}$, also $d\, l \frac{1+x}{1-x} . \sqrt{-1} = \frac{2\, dx}{1-x^2} . \sqrt{-1}$

$d \operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1+x^2}$, also $d\, 2 \operatorname{arc\,tg} (x . \sqrt{-1}) = \frac{2\, dx}{1-x^2} \sqrt{-1}$

Aufgabe 2. Man soll eine Reihe für arc sin x entwickeln.

Auflösung. Bekanntlich ist $d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Wir setzen demnach

$$1)\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1.3}{2.4}.x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 \ldots$$

Hieraus folgt

$$2)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}\ldots\right) + C'.$$

Setzen wir auf der linken Seite dieser Gleichung

$$3)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C'' \text{ so folgt}$$

$$4)\ \arcsin x + C'' = \left(x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}\ldots\right) + C'$$

oder

$$5)\ \arcsin x = C + x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}\ldots$$

Nun ist für $x = 0$, $\arcsin x = 0$, also $C = 0$, mithin

$$6)\ \arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}\ldots$$

(Vergl. D. R. Seite 94, Gl. 10.)

§. 72.

Bernoulli's Reihe.

Nach §. 13, Seite 25 ff. ist

$$1)\ \int \underset{u\ .\ dv}{fx\,.\,dx} = \underset{v\ .\ u}{x\,.\,fx} + \int \underset{v\ .\ du}{x\,.\,f'x\,dx}$$

$$2)\ \int x\,.\,fx\,.\,dx = \int \underset{u\ .\ dv}{f'x\,.\,x\,dx} = \underset{v\ .\ u}{\frac{x^2}{2}\,.\,f'x} - \int \underset{v\ .\ du}{\frac{x^2}{2}\,.\,f''x\,.\,dx}$$

$$3)\int\frac{x^2}{2}.f''x.dx=\int\underset{u\ .\ dv}{f'x.\frac{x^2}{2}dx}=\underset{v\ .\ u}{\frac{x^3}{3!}.f'x}-\int\underset{v\ .\ du.}{\frac{x^3}{3!}f''x\,dx.}$$

$$\begin{matrix}\cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\end{matrix}$$

$$4)\int\frac{n^n}{n!}f^nx.dx=\int\underset{u\ .\ dv}{f^nx.\frac{x^n}{n!}dx}=\underset{v\ .\ u}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.f^nx}-\int\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.\overset{n+1}{fx}.dx.$$

Substituiren wir den Werth von $\int x.f'x.dx$ nach Gl. 2 in Gleichung 1, so folgt

$$5)\int fx.dx=x\,fx-\frac{x^2}{2!}f'x+\int\frac{x^2}{2!}f''x.dx.$$

Setzen wir hierin den Werth von $\int\frac{x^2}{2!}f''x.dx$ nach Gl. 3, so folgt

$$6)\int fx.dx=x.fx-\frac{x^2}{2!}f'x-\frac{x^3}{3!}f''x-\int\frac{x^3}{3!}f'''x.dx.$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so ergiebt sich schliesslich

$$7)\int fx.dx=x.fx-\frac{x^2}{2!}f'x+\frac{x^3}{3!}f''x+\dots$$
$$+(-1)^{n-1}.\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.f^nx+(-1)^n\int\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.\overset{n+1}{fx}.dx.$$

Die vorstehende Reihe für $\int fx\,dx$ rührt von **Johann Bernoulli**.

Das Glied $(-1)^n\int\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\overset{n+1}{fx}.dx$ heisst Restglied der Bernoullischen Reihe.

Aus Gleichung 7 folgt im Allgemeinen

$$8)\int_0^x fx.dx=x.fx-\frac{x^2}{1.2}f'x+\frac{x^3}{3!}f''x\dots$$
$$+(-1)^{n-1}.\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^nx+(-1)^n.\int_0^x\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\overset{n+1}{fx}.dx.$$

Hieraus folgt

$$9)\ \int_0^x fx.dx = x.fx - \frac{x^2}{1.2} f'x + \frac{x^3}{3!} f''x \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n}{fx} + (-1)^n \cdot \frac{(\Theta x)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \overset{(n+1)}{f}(\Theta x).$$

Bemerkungen.

1. Man wird bemerken, dass die Reihe in Gleichung 9 convergirt, wenn für einen **hinreichend grossen** Werth von n der Werth des Restgliedes $(-1)^n \cdot \frac{(\Theta x)^{n+1}}{(n+1)!} \overset{(n+1)}{f}(\Theta x)$ kleiner ist wie jede beliebige Zahl.

2. Welches ist der Ausdruck für $\int_b^a fx.dx$ nach Bernoulli's Reihe?

3. Setzt man in Taylors Reihe, d. h. in die Reihe

$$F(x+a) = Fx + a.F'x + \frac{a^2}{1.2} F''x + \frac{a^3}{3!} F'''x \ldots$$

$a = -x$, so folgt

$$F0 \quad = Fx - x F'x + \frac{x^2}{1.2} F''x - \frac{x^3}{3!} F'''x + - \ldots$$

$$F0 - Fx = \quad - x F'x + \frac{x^2}{1.2} F''x - \frac{x^3}{3!} F'''x + - \ldots$$

$$Fx - F0 = \quad x.F'3 - \frac{x^2}{1.2} F''x - \frac{x^3}{3!} F'''x - + \ldots$$

Setzen wir nun $F'x = fx$, so folgt aus der vorstehenden Gleichung

$$\int_0^x fx\, dx = x fx - \frac{x^2}{1.2} f'x + \frac{x^3}{3!} f''x - + \ldots$$

Hiermit ist also Bernoulli's Reihe aus Taylors Reihe abgeleitet.

§. 73.

Entwickelung von e^x nach Bernoulli's Reihe.

Weil $e^x = \int e^x . dx$, so setzen wir

1) $fx \ = e^x$

2) $f'x = e^x$

3) $f''x = e^x$ etc.

Setzen wir die obigen Werthe von fx, f′x, f″x etc. in Gleichung 9, Seite 181, ein, so folgt

$$4)\ \int_0^x e^x\,dx = x\,.\,e^x - \frac{x^2}{1\,.\,2}\,e^x + \frac{x^3}{3\,!}\,e^x \ldots$$

$$5)\ e^x - 1 \quad = x\,.\,e^x - \frac{x^2}{1\,.\,2}\,e^x + \frac{x^3}{3\,!}\,e^x \ldots$$

$$6)\ e^x \ = 1 + x\,.\,e^x - \frac{x^2}{1\,.\,2}\,e^x + \frac{x^3}{3\,!}\,e^x \ldots$$

Dividiren wir Gleichung 5 durch e^x, so folgt

$$7)\ 1 - e^{-x} = x - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{3\,!} \cdots$$

$$8)\qquad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{1\,.\,2} - \frac{x^3}{3\,!} \cdots$$

Setzen wir hierin $-x$ statt x, so folgt

$$9)\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{3\,!} \cdots$$ vergl. D. R. Seite 73, Gl. I.

Bemerkung. Wir haben in Gleichung 4 und den folgenden Gleichungen auf das Restglied (Gl. 9, Seite 181) keine besondere Rücksicht genommen, weil sich ohne Weiteres erkennen lässt, dass die vorliegenden Reihen convergiren.

Sollte dem Leser dies nicht einleuchten, so empfehlen wir ihm, die Convergenz mit Hülfe des Restgliedes zu prüfen.

§. 74.

Entwickelung von $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ und $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,.\,dx$ nach Bernoulli's Reihe.

Nach Bernoulli's Reihe ergiebt sich

$$1)\ \int_0^x \cos x\,dx = x\,.\cos x + \frac{x^2}{1\,.\,2}\sin x - \frac{x^3}{3!}\cos x - \frac{x^4}{4!}\sin x \ldots$$

$$2)\ \int_0^x \sin x\,dx = x\,.\sin x - \frac{x^2}{2}\cos x - \frac{x^3}{3!}\sin x + \frac{x^4}{4!}\cos x \ldots$$

Setzen wir in diese Gleichungen $x = \frac{\pi}{2}$, so folgt

$$3)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{2.4} \sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{2.4.6} \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^4}{2.4.6.8} \cdot \sin\frac{\pi}{2} \ldots$$

$$4)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,.\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{2.4} \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{2.4.6} \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^4}{2.4.6.8} \cos\frac{\pi}{2} \ldots$$

Setzen wir in diese Gleichungen für $\sin\frac{\pi}{2}$ und $\cos\frac{\pi}{2}$ ihre Werthe, und berücksichtigen wir, dass

$$5)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = +1 \text{ und } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = +1$$

so folgt

$$6)\ 1 = \frac{\pi^2}{2.4} - \frac{\pi^4}{2.4.6.8} + \frac{\pi^6}{2.4.6.8.10.12} - + \ldots$$

$$7)\ 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{2.4.6} + \frac{\pi^5}{2.4.6.8.10} - + \ldots$$

Subtrahirt man Gleichung 6 von Gleichung 7, so folgt

$$8)\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{2.4} - \frac{\pi^3}{2.4.6} + \frac{\pi^4}{2.4.6.8} + - - \ldots = 0.$$

§. 75.

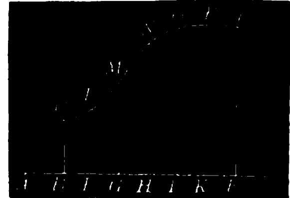
Angenäherte Berechnung von $\int_n^m fx\,.\,dx$ nach der Formel

$$\int_n^m fx\,.\,dx = h\left\{\frac{fn}{2} + f(n+h) + f(n+2h) + \ldots \frac{fm}{2}\right\}.$$

Wenn man Fig. 51, die Linie BE in eine beliebige Anzahl gleicher Theile BF, FG...KE theilt, deren jeder gleich h

ist, und die Ordinaten LF, GM ... KP zieht, so wird hierdurch die Fläche BCDE in Schichten von gleicher Breite getheilt.

Fig. 51.



$BF = FG = \ldots KE = h$,
$AB = n$, $AE = m$,
$BC = y_n$, $FL = y_a$, $GM = y_b$,
$HN = y_c$, $KP = y_e$, $ED = y_m$.

Wenn man dann die Bogen CL, LM etc. als gerade Linien ansieht, und die Breite jeder der gennanten Schichten gleich h setzt, so ergiebt sich

$$1)\ \begin{cases} BCLF = h \,.\, \dfrac{y_n + y_a}{2} \\ FGML = h \,.\, \dfrac{y_a + y}{2} \\ \quad\cdot \qquad\qquad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\qquad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\qquad \cdot \\ IKPO = h \,.\, \dfrac{y_d + y_e}{2} \\ KEDP = h \,.\, \dfrac{y_e + y_m}{2} \end{cases}$$

Weil nun in den Gleichungen 1 die Summe aller Glieder auf der linken Seite gleich BCDE ist, so folgt aus denselben

$$2)\ BCDE = h \left\{ \frac{y_n + y_a}{2} + \frac{y_a + y_b}{2} \ldots \frac{y + y_e}{2} + \frac{y_e + y_m}{2} \right\}$$

$$3)\ BCDE = h \left\{ \frac{y_n}{2} + y_a + y_b \ldots y_d + y_e + \frac{y_m}{2} \right\} \text{Vergl. die Bemerkung.}$$

Nehmen wir nun an, dass

$$4)\ y = fx$$

die Gleichung der Curve CD ist, und ausserdem

$$5)\ AB = n,\ AE = m,$$

so ist

$$6)\ y_n = f(n);\ y_a = f(n + h);\ y_b = f(n + 2h) \ldots y_m = f(m).$$

Setzen wir diese Werthe für y_n, y .. y_m in Gleichung 3 ein so folgt

7) $BCDE = h \left\{ \frac{f(n)}{2} + f(n+h) + f(n+2h) \ldots f(m-h) + \frac{f(m)}{2} \right\}.$

Ferner ist nach Gl. 4 u. 5 und §. 46, Seite 123

$$8)\ BCDE = \int_n^m fx \,.\, dx.$$

Setzen wir nach Gleichung 8 den Werth von BCDE in Gl. 7 ein, so folgt

$$9)\ \int_n^m fx \,.\, dx = h \left\{ \frac{fm}{2} + f(m+h) + f(m+2h) \ldots \frac{fn}{2} \right\}$$

Bemerkung.

Man beachte wohl, dass bei der vorstehenden Entwickelung die Bögen CL, LM etc. als gerade Linien angesehen sind, so dass unsere Gleichungen 3 und 9 nur **annähernd** richtig sind.

Aufgabe. Man soll die Näherungs-Formel Gl. 9 ohne Hilfe graphischer Darstellung direct ableiten.

§. 76.

Simpsons Reihe.

In Figur 52 und 53 ist

$$1)\ ABGECD = ABCD \pm BGECH$$

$$2)\ ABCD = h\,(y' + y''')$$

Fig. 52.

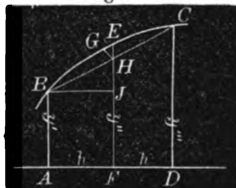


Fig. 53.



Nehmen wir nun an, dass der Bogen BGEC eine Parabel sei, dessen Scheitelpunkt (G) auf der Normalen (GH) liegt, die man in H auf BC errichtet, so ist nach Gl. 8, Seite 146

3) BGECH $= {}^4/_3$ BH . GH.

Betrachten wir dann HGE als ein Dreieck, welches bei G rechtwinklig ist, so ist $\triangle$ BIH $\sim$ $\triangle$ HGE, also

4) BH : BI = HE : GH, also

5) BH.GH = BI . HE.

Ferner ist

6) $BI = h;\ HE = \pm (FE - FH) = \pm \left\{ y'' - \left(\frac{y' + y'''}{2.} \right) \right\}$

Setzen wir nach Gl. 6 die Werthe von BI und HE in Gl. 5 ein, so folgt

7) $BH . GH = \pm h \cdot \left(y'' - \frac{y' + y'''}{2} \right).$

Hieraus folgt nach Gl. 3

8) $BGECH = \pm \frac{4}{3} h \left(y'' - \frac{y' + y'''}{2} \right).$

Setzen wir die Werthe von ABCD und BGECH nach den Gleichungen 2 und 8 in Gleichung 1 ein, so folgt

9) $ABGECD = h (y' + y''') + \frac{4}{3} h \left(y'' - \frac{y' + y'''}{2} \right)$

$$= h \left\{ y' + y'' + \frac{4}{3} y''' - \frac{2}{3} y' - \frac{2}{3} y''' \right\}$$

10) $ABGECD = \frac{h}{3} \{ y' + 4y'' + y''' \}.$ Man beachte, dass Gl. 10 nur annähernd richtig sind.

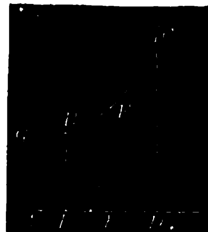
Bemerkung. Wenn Fig. 54 der Bogen BEC einer Parabel angehört deren geometrische Achse GA $\perp$ zu AD steht, so ist genau

$$BCDL = \frac{h}{3} (y' + 4y'' + y''').$$

Wie lässt sich dies beweisen?

Man kann diesen Satz auch benutzen, um Simpsons Regel abzuleiten.

Fig. 54.



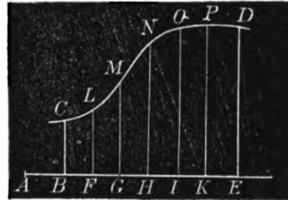
BL=y, EF=y'', CD=y'''.

§. 77.

Fortsetzung.

Theilen wir in Fig. 55 die Basis BE in eine beliebige **gerade** Anzahl gleicher Theile, und setzen wir jedes dieser Theile gleich, so ergiebt sich annäherungsweise aus §. 76

Fig. 55.



$BF = BG = .. = KE = h$

$AB = n, \quad AE = m$

$BC = y_n, \; FL = y', \; GM = y''$

$HN = y''', \; KP = y^v, \; DE = y_m.$

$$1)\; BCMG = \frac{h}{2}(y^n + 4y' + y'')$$

$$2)\; MGIO = \frac{h}{3}(y'' + 4y''' + y'''')$$

$$3)\; IODE = \frac{h}{3}(y'''' + 4y^v + y_m).$$

Da nun $BCMG + MGIO + IODE = BCDE$, so ergiebt sich durch Addition der Gleichungen 1 bis 3

$$4)\; BCDE = \frac{h}{3}\Big\{(y^n + 4y' + y'') + (y'' + 4y''' + y'''') + (y'''' + 4y^v + y_m)\Big\}$$

$$5)\; BCDE = \frac{h}{3}\Big\{(y_n + 4y' + 2y'' + 4y''' + 2y'''' + 4y_v + y_m)\Big\}$$

Hätten wir die Basis BE in eine beliebige andere **gerade** Anzahl gleicher Theile getheilt, deren jeder gleich h ist, so hätten wir wieder näherungsweise erhalten

$$6)\; BCDE = \frac{h}{3}\Big\{y_n + 4y' + 2y'' + 4y''' + 2y_v + \ldots\ldots + y_m\Big\}.$$

Nehmen wir nun an, dass

$$7)\; y = fx$$

die Gleichung der Curve CL..PD ist, so ist

$$8)\; BCDE = \int_n^m fx\,dx$$

Nach Gleichung 7 wird aber $y_n = f(n)$; $y' = f(n + h)$; $y'' = f(n + 2h) \ldots . y_m = f(m)$. Es folgt demnach aus den Cleichungen 6 und 8

$$9) \int_n^m fx\,.\,dx = \frac{h}{3} \Big\{ f(n) + 4f(n+h) + 3f(n+2h) + 4f(n+3h) + \ldots\ldots + 2f(m-2h) + 4(m-h) + fm. \Big\}$$

Die Formeln 5, 6 oder 9 sind bekannt unter dem Namen Simpsons Regel.

Bemerkungen.

1. Die Simpsonsche Regel giebt meistens sehr genaue Resultate. Sie wird in der technischen Mechanik sehr häufig angewendet.

2. Die Annäherungsformel in Gleichung 9 wird in einigen Lehrbüchern ohne Hülfe graphischer Methoden folgendermassen bewiesen:

Wir setzen nach Taylors Lehrsatze

$$10) \; f(x) = f\{n + (x-n)\} = fn + (x-n)\,.\,f'n + \frac{(x-n)^2}{1\,.\,2} f''n + \ldots$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit dx, so folgt

$$11) \; fx\,.\,dx = (fn + (x-n)\,f'n + \frac{(x-n)^2}{1\,.\,2} f''n + \ldots)\,dx.$$

$$12) \int fx\,dx = \left(x\,f\,n + \frac{(x-n)^2}{2!} f'n + \frac{(x-n)^3}{3!} f''n + \ldots \right) + C.$$

$$13) \int_n^{n+2h} fx\,dx = 2h\,.\,fn + \frac{(2h)^2}{2!} f'n + \frac{(2h)^3}{3!} f''n + \ldots$$

Dieser Ausdruck für $\int_n^{n+2h} fx\,.\,dx$ hat keine bequeme Form, wir setzen deshalb

$$14) \int_n^{n+2h} fx\,.\,dx = A\,fn + B\,f(n+h) + C\,f(n+2h).$$

Wo A, B und C unbestimmte Coefficienten sind, deren Werth wir mit Hülfe von Gleichung 13 nach D. R., Seite 17, Nr. 10, bestimmen wollen.

Zu dem Ende entwickeln wir zunächst $f(n+h)$ und $(fn+2h)$ nach Taylors Lehrsatz, hierdurch erhalten wir für Gl. 14

$$15) \int_n^{n+2h} fx\,dx = A\,.\,fn + B \Big\{ fn + h\,f'n + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''n + \ldots \Big\} + C \Big\{ fn + 2h\,f'n + \frac{(2h)^2}{1\,.\,2} f'' + \ldots \Big\}$$

$$16) \int_n^{n+2h} fx\,.\,dx = \left.\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}\right\} fn + \left.\begin{matrix} B\,h \\ 2\,C\,h \end{matrix}\right\} f'n + \left.\begin{matrix} \dfrac{B\,h^2}{1\,.\,2} \\ \dfrac{C\,.\,(2h)^2}{1\,.\,2} \end{matrix}\right\} f''n + \ldots$$

Verbinden wir Gleichung 16 mit Gl. 13, so folgt

$$17)\ \left.\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}\right\} \left\{ fn + \frac{B\,h}{2\,C\,h} \left\{ f'n + \frac{\frac{B\,h^2}{1\,.\,2}}{\frac{C\,.\,(2h)^2}{1\,.\,2}} \right\} f''n + \ldots - 2h\,fn + \frac{(2h)^2}{2!} f'n \right.$$

$$+ \frac{(2h)^3}{3!} f''n + \ldots$$

Berüksichtigen wir in dieser Gleichung auf jeder Seite nur die drei ersten Glieder, so folgt nach D. R. Seite 17, Nr. 10

$$18)\ A + B + C = 2h$$

$$19)\ \quad B + 2C = 2h$$

$$20)\ \quad B + 2C = \frac{8h}{3}.$$

Lösen wir Gleichung 18 bis 20 für A, B und C auf, so folgt

$$21)\ A = \frac{1}{3}h;\ B = \frac{4}{3}h \text{ und } C = \frac{1}{3}h.$$

Setzen wir nach den Gleichungen 21 die Werthe von A, B und C in Gleichung 14 ein, so folgt **annäherungsweise**

$$22)\ \int_n^{n+2h} fx\,.\,dx = \frac{h}{3}\left\{fn + 4\,(n+h) + f\,(n+2h)\right\}.$$

Aus Gleichung 22 folgt weiter

$$23)\ \int_{n+2h}^{n+4h} fx\,dx = \frac{h}{3}\left\{f\,(n+2h) + 4\,f\,(n+3h) + f\,(n+4h)\right\}$$

$$\begin{matrix}\cdot & & \cdot\\ \cdot & & \cdot\\ \cdot & & \cdot\end{matrix}$$

$$24)\ \int_{n+2(k-1)h}^{n+2k\,.\,h} fx\,.\,dx = \frac{h}{3}\left\{f\Big(n + 2\,(k-1)\,h\Big) + 4\,f\,\Big(n + (2k-1)\Big)\right.$$

$$\left. + f\,(n + 2\,k\,h)\right\}.$$

Setzen wir

25) $n + 2k\,.\,h = m$, so lässt sich Gleichung 24 folgendermassen schreiben:

$$26)\ \int_{m-2h}^{m} fx\,dx = \frac{h}{3}\left\{f(m-2h) + 4\,f\,(m-h) + f\,m\right\}$$

Der bessern Uebersicht wegen wollen wir die Gleichungen 22, 23...26 noch ein mal wieder hinschreiben.

$$22)\ \int_n^{n+2h} fx\,dx = \frac{h}{3}\left\{fn + 4\,f\,(n+h) + f\,(n+2h)\right\}$$

$$23) \int_{n+2h}^{n+4h} fx \,.\, dx = \frac{h}{3} \Big\{ f(n+2h) + 4 f(n+3h) f(n+4h) \Big\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$26) \int_{m-2h}^{m} fx \,.\, dx = \frac{h}{3} \Big\{ f(m-2h) + 4 f(m-h) + f m \Big\}$$

Nun ist aber die Summe der linken Seiten von Gl. 22, 23 und 26 gleich $\int_n^m fx\,dx$; demnach ergiebt sich durch Addition dieser Gleichungen

$$27) \int_n^m fx\,dx = \frac{h}{3} \Big\{ f n + 4 f(n+h) + f(n+2h) + f(n+2h) + 4 f(n+3h) + f(n+4h) + \ldots \ldots + f(m-2h) + 4 f(m-h) + f(m) \Big\}.$$

$$28) \int_n^m fx\,dx = \frac{h}{3} \Big\{ fn + 4 f(n+h) + 2 f(n+2h) + 4 f(n+3h + \ldots \ldots + 2 f(m-2h) + 4 f(m-h) + fm \Big\}.$$

Ein Resultat, welches mit Gleichung 9, Seite 188, genau übereinstimmt.

3. Der aufmerksame Leser wird bemerkt haben, dass die Gleichungen 22 und 28 deshalb nur annähernd richtig sein können, weil in den unendlichen Reihen auf beiden Seiten von Gl. 17 nur 3 Glieder berücksichtigt sind; und dass nach Gl. 25 in Gleichung 28 $(m - n)$ ein Multiplum von $2h$ sein muss.

§. 78.

Uebungs-Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Näherungsformeln von §. 75 bis 77 benutzen, um den Werth von $\int_3^7 3x^2\,dx$ zu ermitteln.

Auflösung 1. Setzen wir $h = 2$, so finden wir nach §. 75

$$1) \int_3^7 3x^2\,dx = 2 \Big\{ \frac{3 \,.\, 3^2}{2} + 3 \,.\, 5^2 + \frac{3 \,.\, 7^2}{2} \Big\}$$

$$2) \int_3^7 3x^2\,dx = 2 \{ 13{,}5 + 75 + 73{,}5 \}$$

$$3)\ \int_3^7 3\,x^2\,dx = 2\,.\,162 = 324 \quad \text{annäherungsweise}$$

Bemerkung. Bekanntlich wird der Werth von $\int_3^7 3\,x^2\,dx$ genau ausgedrückt durch die Gleichung

$$4)\ \int_3^7 3\,x^2\,dx = 7^3 - 3^3 = 316.$$

Hiernach ist also der **Näherungs-Werth** von $\int_3^7 3\,x^2\,dx$ nach Gl. 3 um 8 Einheiten, d. h. beinahe $2^1/_2$ pro Cent zu gross.

Auflösung 2. Setzen wir $h = 1$, so folgt nach §. 75

$$5)\ \int_3^7 3\,x^2\,dx = 1 \left\{ \frac{3\,.\,3^2}{2} + 3\,.\,4^2 + 3\,.\,5^2 + 3\,.\,6^2 + \frac{3\,.\,7^2}{2} \right\}.$$

$$= 13{,}5 + 48 + 75 + 108 + 73{,}5.$$

$$6)\ \int_3^7 3\,x^2\,dx = 3\,.\,18.$$

Dieser Näherungs-Werth von $\int_3^7 3\,x^2\,dx$ ist also um 2 Einheiten, d. h. ca. $^3/_5$ pro Cent zu gross.

Auflösung 3. Setzen wir $h = 2$, so folgt aus Gl. 9 oder 28 von §. 73

$$7)\ \int_3^7 3\,x^2\,dx = \frac{2}{3} \left\{ 3\,.\,3^2 + 4\,.\,3\,.\,5^2 + 3\,.\,7^2 \right\}$$

$$= \frac{2}{3} \left\{ 27 + 300 + 147 \right\}$$

$$8)\ \int_3^7 3\,x^2\,dx = \frac{2}{3}\,.\,474 = 316.$$

Diese **Näherungs-Formel** giebt also den Werth von $\int_3^7 3\,x^2\,dx$ genau an. Worin liegt der Grund? Vergl. Bemerkung zu §. 76, Seite 185

Auflösung 4. Setzen wir $h = 1$, so folgt aus Gl. 9 oder 28, §. 77

$$9)\ \int_3^7 3\,x^2\,dx = \frac{1}{3} \left\{ 3\,.\,3^2 + 4\,.\,3\,.\,4^2 + 2\,.\,3\,.\,5^2 + 4\,.\,3\,.\,6^2 + 3\,.\,7^2 \right\}$$

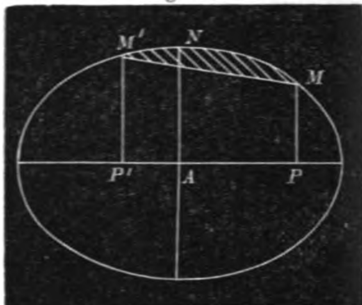
$$= \frac{1}{3} \left\{ 27 + 192 + 150 + 432 + 147 \right\}$$

$$10)\ \int_3^7 3x^2\,dx = \frac{1}{3} \cdot 948 = 316.$$

Diese Näherungs-Formel giebt ebenfalls den Werth von $\int_3^7 3x^2\,dx$ genau. (Vergl. Bemerk. zu §. 76, Seite 185.)

Aufgabe 2. In der Ellipse Fig. 56 sei $a = 6$, $b = 4$, $AP' = -1$, $AP = 5$. Man soll die Fläche P'M'NMP mit Hülfe der Näherungsformeln von §. 75 bis 77 berechnen.

Fig. 56.



Auflösung 1. Die Gleichung unserer Ellipse ist

$$1)\ 4 = \frac{4}{6}\sqrt{36 - x^2}$$

Hieraus folgt

$$2)\ P'M'NMP = \frac{2}{3}\int_{-1}^{5}\sqrt{36 - x^2} \, . \, dx.$$

Setzen wir nun in die Formel von §. 75, $h = 2$ so folgt aus Gl. 2

$$3)\ P'M'NMP = \frac{2}{3} . 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{36-1} + \sqrt{36-1} + \sqrt{36-9} + \frac{1}{2}\sqrt{36-25}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left\{2{,}958 + 5{,}916 + 5{,}196 + 1{,}658\right\}.$$

$$4)\ P'M'NMP = 20{,}971\,..$$

Vergleichen wir diesen Näherungswerth mit dem Werthe von P'M'NMP in Gleichung 2, Seite 154, so ergiebt sich, dass derselbe um 0,364.. Einheiten, d. h. reichlich $1^1/_2$ pro Cent zu klein ist.

Auflösung 2. Setzen wir in Näherungsformel 9, Seite 188, oder Gl. 28, Seite 189, $h = 3$, so folgt aus Gleichung 2

$$5)\ P'M'NMP = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3}\left\{\sqrt{36-1} + 4\sqrt{36-4} + \sqrt{36-25}\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\left\{5{,}916 + 22{,}63 + 3{,}316\right\}$$

6) $P'M'NMP = 21{,}241\,..$

Dieser Näherungswerth ist nach Gleichung 2, Seite 154, um 0,094.. Einheiten, d. h. um fast $^1/_2$ pro Cent, zu klein.

Auflösung 3. Um eine grössere Genauigkeit im Resultate zu erlangen, wollen wir in die Näherungsformel 9 oder 28, Seite 188 oder 190, $h = 1$ setzen, dann folgt

$$7)\quad P'M'NMP = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \Big\{ \sqrt{36-1} + 4\sqrt{36+2}\sqrt{36-1} + 4\sqrt{36-4} + 2\sqrt{36-9} + 4\sqrt{36-16} + \sqrt{36-25} \Big\}$$

$$= \frac{2}{9} \Big\{ 5{,}916 + 24 + 11{,}832 + 22{,}628 + 10{,}392 + 17{,}888 + 3{,}316.$$

$$8)\quad P'M'NMP = \frac{2}{9} \,.\, 95{,}972 = 21{,}327.$$

Dieser Näherungswerth ist nach Gl. 2, Seite 154, um 0,008 zu klein, der Fehler beträgt demnach weniger als $^4/_{100}$ pro Cent.

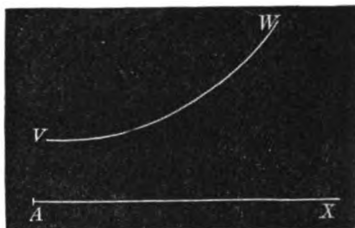
VII. Capitel.

Rectification der Curven.

§. 79.

Rectification von Curven, welche auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System bezogen sind.

Fig. 57.



Wenn eine beliebige Curve, VW, Figur 57, auf rechtwinklige Coordinaten bezogen ist, und die Länge eines beliebigen Bogenstückes gleich s gesetzt wird, so ist nach D. R., Seite 205

$$1)\quad d\,s^2 = dx^2 + dy^2$$

$$2)\quad d\,s^2 = dx^2 \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}$$

$$3)\quad ds = dx \,.\, \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Integriren wir Gleichung 3, so folgt

$$4)\quad s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,.\, dx + C.$$

Die Gleichung 4 giebt uns ganz **allgemein** einen Ausdruck für ein Bogenstück einer beliebigen Curve, welche auf rechtwinklige Coordinaten bezogen ist. — Wollen wir diese Gleichung zur Ermittelung der Bogenlänge einer bestimmten Curve anwenden, so müssen wir **für diese Curve den Werth von $\frac{dy}{dx}$ ermitteln**, und denselben in Gl. 4 einsetzen. Führen wir darauf die Integration aus, welche in Gl. 4 nur angedeutet werden konnte, so ist damit der Werth von s bestimmt.

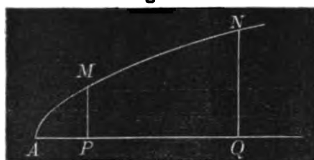
§. 80.

Fortsetzung.

Aufgabe 1. Die Gleichung einer Parabel, Fig. 58, sei

1) $y^2 = ax$.

Fig. 58.



AP = m, AQ = n.

Man soll die Länge der Bogen NMA und NM berechnen, wenn die Abscissen der Punkte M und N resp. gleich m und n sind.

Auflösung. Nach Gleichung 4, §. 79, ist **für jede Curve**

2) $s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, . \, dx.$

In diese allgemeine Gleichung müssen wir für $\frac{dy}{dx}$ den Werth einschalten, welcher der Gleichung unserer Parabel entspricht. Nun folgt aus Gleichung 1

3) $y = a^{1/2} x^{1/2}$

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{a^{1/2}}{2\, x^{1/2}}$

Setzen wir den Werth von $\frac{dy}{dx}$ nach Gleichung 4 in Gleichung 2 ein, so folgt

5) $s = \int \sqrt{1 + \frac{a}{4x}} \, . \, dx + C$, also

6) $\overset{\frown}{AN} = \int_0^n \sqrt{1 + \frac{a}{4x}} \, . \, dx$

7) $\overset{\frown}{MN} = \int_m^n \sqrt{1 + \frac{a}{4x}} \, . \, dx.$

Um die Werthe der bestimmten Integrale in Gleichung 6 und 7 zu lösen, müssen wir vor der Hand das allgemeine Integral in Gleichung 5 zu ermitteln suchen. Zu dem Ende setzen wir nun

$$8)\ \sqrt{1+\frac{a}{4x}} = u, \text{ also } x = \frac{a}{4}\cdot\frac{1}{u^2-1}$$

so ist

$$9)\ \int\sqrt{1+\frac{a}{4x}}\,.\,dx = \int u\,.\,dx = ux\,.\int x\,du$$

$$10)\ \int\sqrt{1+\frac{a}{4x}}\,.\,dx = u\,x - \int\frac{a}{4}\cdot\frac{du}{u^2-1}$$

Entwickeln wir den Werth von $\int\frac{a}{4}\cdot\frac{du}{u^2-1}$ nach Gleichung 11, Seite 47, so folgt

$$11)\ \int\sqrt{1+\frac{a}{4x}}\,.\,dx = u\,x - \frac{a}{8}\,l\,\frac{u-1}{u+1} + C.$$

Setzen wir darauf den Werth von u nach Gl. 8 in Gl. 11 ein, so folgt

$$12)\ \int\sqrt{1+\frac{a}{4a}}\,.\,dx = x.\sqrt{1+\frac{a}{4x}} - \frac{a}{8}\,l\,\frac{\sqrt{1+\frac{a}{4x}}-1}{\sqrt{1+\frac{a}{4x}}+1} + C.$$

$$= \sqrt{x^2+\frac{ax}{4}} + \frac{a}{8}\,l\,\frac{\sqrt{1+\frac{a}{4x}}+1}{\sqrt{1+\frac{a}{4x}}-1} + C.$$

$$= \sqrt{x^2+\frac{ax}{4}} + \frac{a}{8}\,l\,\frac{\sqrt{4x+a}+\sqrt{4x}}{\sqrt{4x+a}-\sqrt{4x}} + C.$$

$$= \sqrt{x^2+\frac{ax}{4}} + \frac{a}{8}\,l\,\frac{(\sqrt{4x+a}+\sqrt{4x})^2}{a} + C.$$

$$13)\ \int\sqrt{1+\frac{a}{4x}}\,.\,dx = \sqrt{x^2+\frac{ax}{4}} + \frac{a}{8}\,l\,\frac{(8x+a)+4\sqrt{4x^2+ax}}{a} + C.$$

Verbinden wir Gleichung 13 mit den Gleichungen 6 und 7, so folgt

$$14)\ \widehat{AN} = \sqrt{n^2+\frac{an}{4}} + \frac{a}{8}\,l\,\frac{8n+a+4\sqrt{4n^2+an}}{a}$$

$$15)\ \overset{\frown}{MN} = \sqrt{n^2 + \frac{an}{4}} + \frac{a}{8}\, l\, \frac{8n + a + 4\sqrt{4n^2 + an}}{a}$$
$$- \sqrt{m^2 + \frac{am}{4}} - \frac{a}{8}\, l\, \frac{8m + a + 4\sqrt{4m^2 + am}}{a}$$

$$16)\ \overset{\frown}{MN} = \sqrt{n^2 + \frac{an}{4}} - \sqrt{m^2 + \frac{am}{4}} + \frac{a}{8}\, l\, \frac{8n + a + 4\sqrt{4n^2 + an}}{8m + a + 4\sqrt{4m^2 + am}}$$

Bemerkungen.

1. Wir empfehlen dem Anfänger, zu der vorstehenden Aufgabe so wie zu den folgenden Aufgaben entsprechende Zahlen-Beispiele zu bilden.

2. Ist es nothwendig, **bestimmte** Integrale anzuwenden, um die Werthe der Bogen $\overset{\frown}{AN}$ und $\overset{\frown}{MN}$ zu ermitteln? (Vergl. §. 63, Seite 157 ff. so wie Bemerkung Seite 2.)

3. Man kann $\int \sqrt{1 + \frac{h}{4x}}$ auch dadurch lösen, dass man setzt

$$\sqrt{1 + \frac{h}{4x}} = \sqrt{\frac{x + \frac{h}{4}}{x}} = \frac{x + \frac{h}{4}}{\sqrt{x^2 + x \cdot \frac{h}{4}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x \cdot \frac{h}{4}}} + \frac{\frac{1}{4}h}{\sqrt{x^2 + x \cdot \frac{h}{4}}}$$

Wie ist das Verfahren dann weiter? (Vergl. Capitel III.)

Aufgabe 2. Eine Kettenlinie (D. R. Seite 131) ist gegeben durch die Gleichung

$$1)\ y = m \cdot \frac{e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}}{2}$$

Man soll dieselbe rectificiren.

Auflösung. Nach Gleichung 4, Seite 194, ist für **jede Curve**

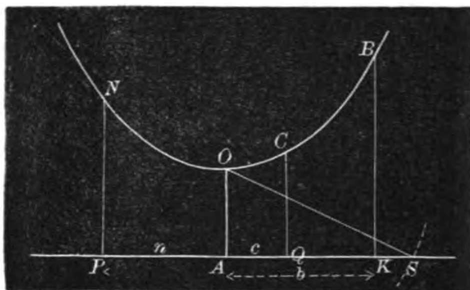
$$2)\ s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

In diese allgemeine Gleichung müssen wir für $\frac{dy}{dx}$ den Werth einsetzen, welcher unserer Curve entspricht. Nun folgt aus Gl. 1

$$3)\ \frac{dy}{dx} = \frac{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}}{2}$$

Fig. 59.

Setzen wir diesen Werth von $\frac{dy}{dx}$ in Gleichung 2 ein, so folgt



Wenn $OS = BK$, so ist $AS = \overset{\frown}{OB}$. } vergl. Bemerk. 2.

$$4)\quad s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}}{2}\right)^2} \, . \, dx.$$

$$5)\quad s = \int \frac{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}}{2} \, . \, dx \quad \text{vergl. Bemerkung 1.}$$

$$6)\quad s = m \, . \, \frac{e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}}{2} + C.$$

Hieraus ergiebt sich nach den Bezeichnungen unserer Figur 59

$$7)\quad \overset{\frown}{OB} = s_0^b = m \, . \, \frac{e^{\frac{b}{m}} - e^{-\frac{b}{m}}}{2}$$

$$8)\quad \overset{\frown}{CB} = s_c^b = m \, . \, \frac{e^{\frac{b}{m}} - e^{-\frac{b}{m}}}{2} - m \, . \, \frac{e^{\frac{c}{m}} - e^{-\frac{c}{m}}}{2}$$

$$9)\quad \overset{\frown}{AB} = s_a^b = m \, . \, \frac{e^{\frac{b}{m}} - e^{-\frac{b}{m}}}{2} + m \, . \, \frac{e^{\frac{n}{m}} - e^{-\frac{n}{m}}}{2}.$$

Bemerkungen.

1. Für den weniger geübten Leser wollen wir hier noch zeigen, wie man Gleichung 5 aus Gleichung 4 ableiten kann. Zu dem Ende setzen wir

$$10)\ 1+\left(\frac{e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}}}{2}\right)^2 = 1+\frac{e^{\frac{2x}{m}}-2e^{\frac{x}{m}}.e^{-\frac{x}{m}}+e^{-\frac{2x}{m}}}{4}$$

$$=\frac{4}{4}+\frac{e^{\frac{2x}{m}}-2+e^{-\frac{2x}{m}}}{4}$$

$$=\quad\frac{e^{\frac{2x}{m}}+2+e^{-\frac{2x}{m}}}{4}$$

$$=\quad\frac{e^{\frac{2x}{m}}+2e^{\frac{x}{m}}.e^{-\frac{x}{m}}+e^{-\frac{2x}{m}}}{4}$$

$$11)\ 1+\left(\frac{e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}}}{2}\right)^2 = \quad \left(\frac{e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}}}{2}\right)^2.$$

Setzen wir nach Gleichung 11 den Werth von $1+\left(\frac{e^{\frac{x}{m}}+e^{-x}}{2}\right)^2$ in Gleichung 4 ein, so folgt

$$12)\int\sqrt{1+\left(\frac{e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}}}{2}\right)^2} = dx\int\frac{e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}}{2}.dx \text{ w. z. b. w.}$$

2. Aus Gleichung 7 folgt

$$13)\ \overset{\frown}{OB}^2 = m^2\left(\frac{e^{\frac{b}{m}}-e^{-\frac{b}{m}}}{2}\right)^2 = m^2.\frac{e^{\frac{2b}{m}}-2+e^{-\frac{2b}{m}}}{4}$$

$$=m^2.\left\{\frac{e^{\frac{2b}{m}}-2+e^{-\frac{2b}{m}}+4}{4}-\frac{4}{4}\right\}$$

$$=m^2.\left\{\frac{e^{\frac{2b}{m}}+2+e^{-\frac{2b}{m}}}{4}-1\right\}$$

$$=m^2.\left(\frac{e^{\frac{b}{m}}+e^{-\frac{b}{m}}}{2}\right)^2-m^2.$$

Setzen wir in Gl. 1 $x = b$, so ist (Fig. 59) $y = BK = m\,\frac{e^{\frac{b}{m}}+e^{-\frac{b}{m}}}{2}$; ferner ist nach Gl. 1 $m = AO$. Demnach folgt aus Gleichung 13

$$14)\ \overset{\frown}{OB}^2 = \overline{BK}^2 - \overline{AO}^2.$$

Der Bogen $\overset{\frown}{OB}$ lässt sich also genau rectificiren. Beschreibt man nämlich mit BK als Radius einen Kreisbogen um O, so schneidet dieser

Kreisbogen von der Abscissenachse ein Stück, $\overline{AS}$, ab, welches gleich $\overset{\smile}{OB}$ ist. —

3. Man soll die Länge der Bogen $\overset{\smile}{BN}$ und $\overset{\smile}{BC}$ auf der Abscissenachse abtragen.

4. Im Anhange werden noch mehrere Aufgaben vorkommen, die sich auf die Kettenlinie beziehen. —

Aufgabe 3. Eine Cycloide ist gegeben durch die Gleichungen

$$1)\quad y = r(1 - \cos t)$$

$$2)\quad x = r(t - \sin t).$$

Man soll sie rectificiren (vergl. D. R. Seite 134).

Auflösung. Wir gehen wieder aus von der **allgemeinen Gleichung**

$$3)\quad s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)} \,.\, dx.$$

Nun folgt aus den Gleichungen 1 und 2

$$4)\quad dx = 2r \,.\, \sin^2 \frac{t}{2} dt$$

$$5)\quad \frac{dy}{dx} = \quad \operatorname{ctg} \quad \frac{t}{2}$$

Setzen wir diese Werthe von dx und $\frac{dy}{dx}$ in Gleichung 3 ein, so folgt

$$6)\quad s = \int \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}} \,.\, 2r \,.\, \sin^2 \frac{t}{2} \,.\, dt$$

$$7)\quad s = \int 2r \,.\, \sin \frac{t}{2} dt = -4r \cos \frac{t}{2} + C.$$

Wollen wir die Länge der **ganzen** Cycloide bestimmen, so müssen wir das vorstehende Integral zwischen den Grenzen 0 und 2π nehmen. Hierdurch finden wir für die **ganze Cycloide**

$$8)\quad \overset{2\pi}{\underset{0}{s}} = \int_0^{2\pi} 2r \,.\, \sin \frac{t}{2} dt = -4r \,.\, \cos \frac{2\pi}{2} + 4r \,.\, \cos 0$$

$$9)\quad \overset{2\pi}{\underset{0}{s}} = 8r.$$

Der ganze Bogen einer gemeinen Cycloide ist demnach 8 mal so lang, als der Radius des erzeugenden Kreises. Vergl. D. R. Seite 219.

Aufgabe 4. Man soll den Umfang einer Ellipse berechnen.

Auflösung. Nach Gleichung 4, Seite 195, ist für jede Curve

$$1)\ s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, . \, dx.$$

Die Gleichung der Ellipse ist nun

$$2)\ y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$ Hieraus folgt

$$3)\ \frac{dy}{dx} = - \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Setzen wir diesen Werth von $\frac{dy}{dx}$ in Gleichung 1 ein, so folgt

$$4)\ s = \int \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}} \, . \, dx.$$

Um den Ausdruck unter dem Integralzeichen etwas zu vereinfachen, setzen wir

$$5)\ \sqrt{a^2 - b^2} = e \text{ (lineare Excentricität)}$$

$$6)\ \frac{e}{a} = \varepsilon \text{ (numerische Excentricität).}$$

Hieraus folgt

$$7)\ \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}} = \sqrt{\frac{a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2}{a^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}$$

Setzen wir nach Gleichung 7 den Werth von

$\sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2}}$ in Gleichung 4 ein, so folgt

$$8)\quad s = \int \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}} \, . \, dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite von Gleichung 8 lässt sich in geschlossener Form nicht ausführen. Wir wollen deshalb das Integral in eine unendliche Reihe zu entwickeln suchen. Zu dem Ende setzen wir

$$9)\quad x = a \, . \cos u, \text{ also } dx = - a \sin u \, . \, du.$$

Aus der Gleichung 8 folgt dann

$$10)\quad s = \int \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}} \, dx = \int - \frac{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 . a^2 . \cos^2 u}}{a \, . \sin u} \, . \, a \sin u \, du$$

$$11)\quad s = - a \int \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 u} \, du$$

Setzen wir hierin den Werth von $\int \sqrt{1 - \varepsilon^2 . \cos^2 u} \, . \, du$ nach Gl. 8, Seite 174, ein, so folgt

$$12)\quad s = C - a \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{3}{8} \varepsilon^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot \frac{10}{32} \varepsilon^6 \ldots \right) . \, u \\ - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{4}{8} \varepsilon^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot \frac{15}{32} \varepsilon^6 \ldots \right) \cdot \frac{\sin 2u}{2} \\ - \left(\qquad \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{1}{8} \varepsilon^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot \frac{6}{32} \varepsilon^6 \ldots \right) \cdot \frac{\sin 4u}{4} \\ \qquad\qquad - \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot \frac{1}{32} \varepsilon^6 \ldots \Big) \cdot \frac{\sin 6u}{6} \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Wollen wir nach dieser Formel den Quadranten der Ellipse berechnen, so haben nach den Gleichungen 10 oder 11 s zwischen den Grenzen

$$x = 0 \text{ und } x = a$$

d. h. nach Gl. 9, wir haben s zwischen den Grenzen

$$u = \frac{\pi}{2} \text{ und } u = 0 \text{ zu nehmen.}$$

Nun ist aber sin 2u, sin 4u, sin 6u etc. gleich **sowohl wenn $u = \frac{\pi}{2}$ als auch wenn $u = 0$.** Demnach folgt nach Gleichung 12 für den **Quadranten der Ellipse**

$$13)\quad s = \frac{a\pi}{2}\left\{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{3}{8}\varepsilon^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{10}{36}\varepsilon^6 \ldots\right\}.$$

Bemerkung. Die Integration von $\sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}\,dx$, welche in Gl. 8 angedeutet ist, kann man auch dadurch einleiten, dass man

$$14)\quad u = \frac{x}{a} \text{ setzt.}$$

Dann ist

$$15)\quad \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - \varepsilon^2}}\,.\,dx = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 u^2}{1 - u^2}}\,.\,du.$$

Nun ist nach dem binomischen Lehrsatze

$$16)\quad \sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 u^2 - \frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4 u^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon^6 u^6 - \ldots$$

Setzen wir diesen Werth von $\sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2}$ in Gleichung 15 ein, so folgt

$$17)\quad \int\sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}\,.\,dx = \frac{1}{a}\left\{\int\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} - \frac{1}{2}\varepsilon^2\int\frac{u^2\,du}{\sqrt{1 - u^2}} - \frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4\,.\int\frac{u^4\,du}{\sqrt{1 - u^2}} - \ldots\right\}.$$

Ueber die weitere Ausführung der Integration sehe man Capitel III.

Aufgabe 5. In nebenstehender Ellipse ist die halbe grosse Achse $a = 5$ und die halbe kleine Achse $b = 3$.

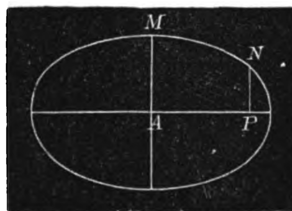
Man soll den Bogen MN nach Simpsons Regel berechnen, wenn $AP = 4$ ist.

Auflösung. Weil $a = 5$ und $b = 3$, so ergiebt sich nach den Gleichungen 5 und 6, Seite 201

$$1)\quad \varepsilon = 0{,}8.$$

Hieraus folgt in Uebereinstimmung mit Gleichung 8, Seite 201

Fig. 60.



AP = 4.

$$2)\ MN = \int_0^4 \sqrt{\frac{5^2 - 0{,}8 \,.\, x^2}{5^2 - x^2}}\, dx = \int_0^4 \sqrt{\frac{25 - 0{,}8 \,.\, x^2}{25 - x^2}} \,.\, dx.$$

Wenden wir zur Entwickelung dieses bestimmten Integrals die Formel in Gl. 9, Seite 185, an, so folgt

$$3)\ MN = \frac{2}{3}\left\{1 + 4\sqrt{\frac{25 - 0{,}8 \,.\, 4}{25 - 4}} + \sqrt{\frac{25 - 0{,}8 \,.\, 16}{25 - 16}}\right\}$$

$$4)\ MN = \frac{2}{3}\left\{1 + 4 \,.\, 1{,}019 + 1{,}164\right\}.$$

$$5)\ MN = \frac{2}{3} \,.\, 6{,}24 = 4{,}16.$$

§. 81.

Rectification von Polar-Curven.

Um einen allgemeinen Ausdruck für das Differential des Bogens von Polar-Curven zu erhalten, nehmen wir an, dass

$$1)\ r = f(u)$$

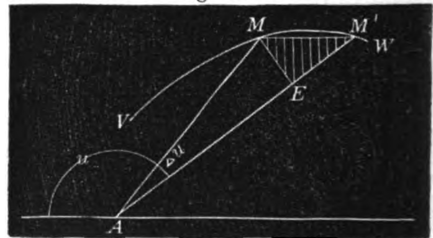
die Polargleichung der Curve VW, Fig. 61, sei.

Ist nun der Bogen $VM = s$, so lassen wir diesen Bogen zunächst um ein endliches Stück

$$\overset{\frown}{MM'} = \Delta s$$

zunehmen.

Fig. 61.



Nach den Bezeichnungen der Figur ist

$AM = r,\ AM' = r + \Delta r.$

$$2)\ \overline{MM'}^2 = \overline{ME}^2 + \overline{M'E}^2.$$

Ferner ist

$$3)\ ME = r \,.\, \sin(\Delta u)$$

$$4)\ M'E = M'A - AE = (r + \Delta r) - r \cos(\Delta u).$$

Setzen wir nach den Gleichungen 3 und 4 die Werthe von ME und M'E in Gleichung 2 ein, so folgt

$$5)\quad \overline{MM'}^2 = r^2 \sin^2(\Delta u) + \{r + \Delta r - r \,.\, \cos \Delta u\}^2$$
$$= r^2 . \sin^2(\Delta u) + \{r \,.\, (1 - \cos \Delta u) + \Delta r\}^2$$
$$= r^2 . \sin^2(\Delta u) + r^2 (1 - \cos \Delta u)^2 + 2r . \Delta r (1 - \cos \Delta u) + (\Delta u)^2$$
$$= r^2 . \sin^2 \Delta u + (r^2 \,.\, \cos^2 \Delta u - 2r^2 \cos \Delta u + r^2)$$
$$+ 2r \,.\, \Delta r \,.\, 2 \sin^2 \frac{\Delta u}{2} + (\Delta r)^2$$
$$= 2 \,.\, r^2 - 2r^2 \,.\, \cos \Delta u + 4r \,.\, \Delta r \,.\, \sin^2 \frac{\Delta u}{2} + (\Delta r)^2$$
$$= 2r^2 (1 - \cos \Delta u) + 4r \,.\, \Delta r \,.\, \sin^2 \frac{\Delta u}{2} + (\Delta r)^2$$
$$= 4r^2 \sin \frac{\Delta u}{2} + 4r \,.\, \Delta r \,.\, \sin^2 \frac{\Delta u}{2} + (\Delta r)^2$$

$$6)\quad \overline{MM'}^2 = r^2 \,.\, \frac{4 \sin^2 \frac{\Delta u}{2}}{4 \left(\frac{\Delta u}{2}\right)^2} \,.\, (\Delta u)^2 + r \,.\, \Delta r \,.\, \frac{4 \sin^2 \frac{\Delta u}{2}}{4 \,.\, \left(\frac{\Delta u}{2}\right)^2} \,.\, (\Delta u)^2 + (\Delta r)^2$$

$$7)\quad \frac{\overline{MM'}^2}{\overset{\frown}{MM'}^2} = r^2 \,.\, \frac{\sin^2 \frac{\Delta u}{2}}{\left(\frac{\Delta u}{2}\right)} \,.\, \frac{(\Delta u)^2}{\overset{\frown}{MM'}^2} + r \,.\, \Delta r \,.\, \frac{\sin^2 \frac{\Delta u}{2}}{\left(\frac{\Delta u}{2}\right)^2} \frac{(\Delta u)^2}{\overset{\frown}{MM'}^2} + \frac{(\Delta r)^2}{\overset{\frown}{MM'}^2}.$$

Diese Gleichung gilt für jeden Werth von Δu; sie gilt also auch dann noch, wenn Δu verschwindet. Aus Gleichung 7 folgt demnach

$$8)\quad \lim \frac{\overline{MM'}^2}{\overset{\frown}{MM'}^2} = \lim \left\{ r^2 \,.\, \frac{\sin^2 \frac{\Delta u}{2}}{\left(\frac{\Delta u}{2}\right)^2} \,.\, \frac{(\Delta u)^2}{\overset{\frown}{MM'}^2} + r . \Delta r . \frac{\sin^2 \frac{\Delta u}{2}}{\left(\frac{\Delta u}{2}\right)^2} \,.\, \frac{(\Delta u)^2}{\overset{\frown}{MM'}^2} + \frac{(\Delta r)^2}{\overset{\frown}{MM'}^2} \right\}.$$

Nun ist aber

$$9)\quad \lim \frac{\overline{MM'}^2}{\overset{\frown}{MM'}^2} = 1$$

$$10)\quad \lim \frac{\sin^2 \frac{\Delta u}{2}}{\left(\frac{\Delta u}{2}\right)^2} . = 1$$ (D. R. Seite 49, Gl. 12).

$$11)\ \lim \frac{(\Delta u)^2}{\overset{\frown}{MM'}^2} = \lim \frac{(\Delta u)^2}{(\Delta s)^2} = \frac{du^2}{ds^2}$$

$$12)\ \lim r . \Delta r = 0$$

$$13)\ \lim \frac{(\Delta r)^2}{\overset{\frown}{MM'}^2} = \lim \frac{(\Delta r)^2}{(\Delta s)^2} = \frac{dr^2}{ds^2}.$$

Schalten wir die Werthe von $\lim \frac{\overline{MM'}^2}{\overset{\frown}{MM'}^2}$ etc. nach den Gleichungen 9 bis 13 in Gleichung 8 ein, so folgt

$$14)\ 1 = r^2 . 1 . \frac{du^2}{dr^2} + 0 . 1 . \frac{du^2}{ds^2} + \frac{dr^2}{ds^2}$$

$$15)\ 1 = r^2 . \frac{du^2}{ds^2} + \frac{dr^2}{ds^2}.$$

Aus Gleichung 15 folgt endlich

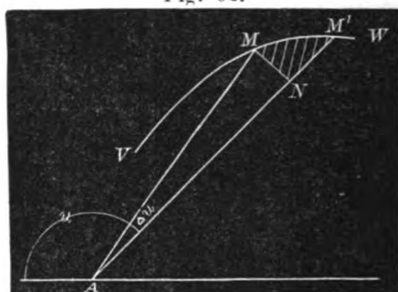
$$16)\ ds = \sqrt{r^2 . du^2 + dr^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{du}\right)^2} . du$$

$$17)\ s = \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{du}\right)^2} . du.$$

Bemerkungen.

1. Nach der **Infinitesimal-Methode** kann man den Werth von ds folgendermassen bestimmen:

Fig. 62.



Wenn Δu sehr klein ist, so kann man **näherungsweise** den Kreisbogen MN so wie den Bogen MM' für gerade Linien ansehen, und demgemäss die Figur MM'N **näherungsweise** als ein rechtwinkliges △ behandeln.

Demnach wäre

$$18)\ MM'^2 = MN^2 + M'N^2$$

$$19)\ \Delta s^2 = r^2 . (\Delta u)^2 + (\Delta r)^2$$

Die Annäherung wird um so grösser, je kleiner Δu wird, und Gleichung 2 wird **genau richtig**, wenn Δu in du übergeht. Demnach ist

$$20)\ ds^2 = r^2 . du^2 + dr^2$$

$$21)\ ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{du}\right)^2} . du \text{ (vergl. Gleichung 16).}$$

2. **Der Leser mag aus dem Vorstehenden entnehmen, dass die Infinitesimal-Methode in vielen Fällen schneller zum Ziele führt, und mehr Uebersicht gewährt, als die sogenannte Grenz-Methode.**

§. 82.

Fortsetzung.

Aufgabe. Eine archimedische Spirale ist gegeben durch die Gleichung

$$1)\ r = \frac{a}{2\pi} \cdot u.$$

Man soll dieselbe rectificiren.

Auflösung. Aus Gleichung 1 folgt

$$2)\ \frac{dr}{du} \cdot = \frac{a}{2\pi}.$$

Setzen wir nach Gl. 2 den Werth von $\frac{dr}{du}$ in Gl. 16 oder 21, Seite 206, ein, so folgt

$$3)\ ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2} \cdot du.$$

Setzt man hierin den Werth von r ein nach Gl. 1, so folgt

$$4)\ ds = \sqrt{\left(\frac{a}{2\pi}u\right)^2 + \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2} \cdot du = \frac{a}{2\pi} \sqrt{1 + u^2} \cdot du.$$

Soll nun die Länge der Spirale zwischen den Grenzen m und n berechnet werden, so folgt

$$5)\ \overset{n}{\underset{m}{s}} = \frac{a}{2\pi} \cdot \int_m^n \sqrt{1 + u^2} \cdot du.$$

Es bleibt nun noch über, dass allgemeine Integral $\int \sqrt{1 + u^2} \cdot du$ zu lösen. Dasselbe ergiebt sich, wenn wir in Gleichung 4, Seite 85, $a = 1$ und $x = u$ setzen. Danach folgt aus Gl. 5

$$6)\quad s_m^n = \frac{a}{4\pi}\left\{n\sqrt{1+n^2} - l(\sqrt{1+n^2} - n)\right\}$$
$$- \frac{a}{4\pi}\left\{m.\sqrt{1+m^2} - l(\sqrt{1+m^2} - m)\right\}$$

$$7)\quad s_m^n = \frac{a}{4\pi}\left\{n\sqrt{1+n^2} - m\sqrt{1+m^2} + l\frac{\sqrt{1+m^2} - m}{\sqrt{1+n^2} - n}\right\}$$

VIII. Capitel.

Berechnung der Volumina von Körpern.

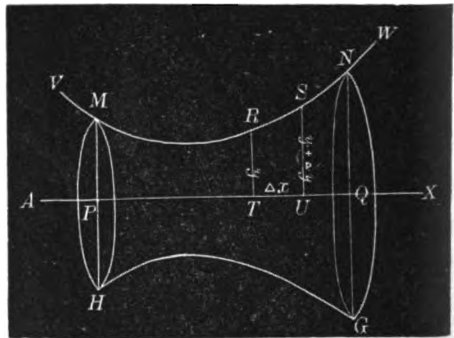
§. 83.

Berechnung von Rotationskörpern.

Bekanntlich kann man jeden Rotationskörper dadurch herstellen, dass man Fig. 63 eine **ebene** Curve VW (die sogenannte Meridianlinie) um eine Achse AX rotiren lässt, welche in der Ebene der Curve liegt.

Ist nun von unserm Rotationskörper Fig. 63 dasjenige Stück zu berechnen, welches durch zwei Ebenen begrenzt wird, die in den Punkten P und Q normal zu der Achse AX stehen, so beziehen wir die rotirende Curve VW auf ein Coordinaten-System, dessen Abscissen-Achse mit der **Rotations-Achse AX zusammenfällt.**

Fig. 63.



Die Gleichung der Curve sei dann

1) $y = f(x)$.

Setzen wir nun die Abscisse des Punktes $R = x$, ferner $TU = \Delta x$, und bezeichnen wir das Volumen im Allgemeinen mit V, so ist ΔV gleich dem Körper, welcher durch Rotation der Fläche RSUT entsteht. Der Werth von ΔV liegt also

2) zwischen $y^2 . \pi . \Delta x$ und $(y + \Delta y)^2 . \pi . \Delta x$

oder es ist

3) $\frac{\Delta V}{\Delta x} = (y + \Theta . \Delta y)^2 \pi$ {In dieser Gleichung ist Θ eine absolute Zahl, deren Werth kleiner als $+1$ ist. Vergl. übrigens die Bemerkung ** auf Seite 140.}

Aus dieser Gleichung folgt

4) $\frac{dV}{dx} = y^2 \pi$

5) $dV = y^2 \pi . dx$.

Hieraus folgt unmittelbar, dass das Volumen des Körpers MNGH, welches zwischen den Grenzen $x = m$ und $x = n$ liegt durch folgende Gleichung ausgedrückt wird

6) $V_m^n = \int_m^n y^2 \pi . dx$.

§. 84.

Fortsetzung.

In dem vorigen §. wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass die Gleichung der Meridianlinie

1) $y = f(x)$

für jeden Werth von x nur **einen** Werth von y giebt. — Wenn statt dessen **mehrere** Werthe von y für **denselben** Werth von x existiren, so bleibt die Sache im Wesentlichen dieselbe. Rotirt

z. B. die Curve Fig. 64 um die Achse AX, und bezeichnen wir die kleinere von den beiden Ordinaten, welche **demselben** Werthe von x entsprechen, durch y, die grössere dagegen durch v, so folgt durch eine Betrachtungsweise, welche der des vorigen §. analog ist, dass der Werth von $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ zwischen

Fig. 64.



$\pi . (\mathrm{y}^2 - y^2)$ und $\pi . \{(\mathrm{y} + \Delta \mathrm{y})^2 - (y + \Delta y)^2\}$ liegt.

Hieraus folgt

$$2)\ \frac{\Delta V}{\Delta x} = \pi . \{(\mathrm{y} + \Theta . \Delta \mathrm{y})^2 - (y + \Theta . \Delta y)^2\}$$

Wird Δx und in Folge dessen Δy und Δy zu Null, so geht $\pi . \{(\mathrm{y} + \Theta . \Delta \mathrm{y})^2 - (y + \Theta . \Delta y)^2\}$ über in $\pi . (\mathrm{y}^2 - y^2)$.

Demnach ergiebt sich aus Nr. 2

$$3)\ \frac{dV}{dx} = \pi (\mathrm{y}^2 - y^2)$$

Der Leser beachte, dass y die grössere und y die kleine der beiden Ordinaten vorstellt, welche einem beliebigen Werthe von x entsprechen.

$$4)\ dV = \pi (\mathrm{y}^2 - y^2)\, dx$$

$$5)\ V_m^n = \pi . \int_m^n (\mathrm{y}^2 - y^2)\, dx.$$

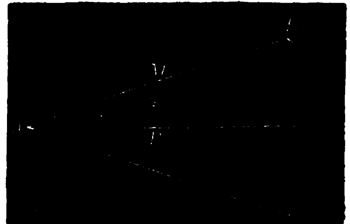
§. 85.

Fortsetzung. Aufgaben.

Aufgabe 1. Ein normaler Kegel mit Kreisbasis ist durch seine Höhe (h) und den Radius seiner Basis (r) bestimmt. Man soll das Volumen desselben ermitteln.

Auflösung. Offenbar kann man unsern normalen Kegel mit Kreisbasis dadurch entstanden denken, dass die gerade Linie AB um die geometrische Achse (AC) desselben rotirt.

Fig. 65.



AC = h.

Wir können deshalb das

Volumen derselben nach den allgemeinen Formeln berechnen, welche in §. 83, Seite 208, entwickelt sind. —

Beziehen wir nun die rotirenden Grade AB auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System, dessen Abscissenache die Linie AC und dessen Anfangspunkt der Punkt A ist, so entspricht die Grade AC der Gleichung

1) $y = \frac{r}{h} x.$ Um die Gleichung der Graden AB abzuleiten, nehme man in AB den beliebigen Punkt M an, und finde auf AC die Normale MP, dann ist $\Delta AMP \sim ABC$, also $y : x = h : r$, oder $y = \frac{r}{h} x.$ —

Setzen wir nach unserer Gleichung 1 den Werth von y in Gleichung 6, Seite 208, ein, so folgt

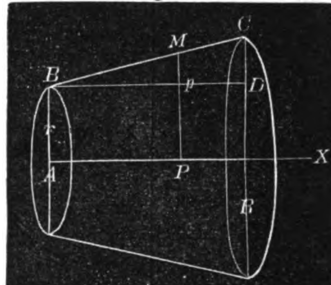
2) $dV = \frac{r^2}{h^2} x^2 \pi . dx.$

Integriren wir diese Gleichung zwischen den Grenzen 0 und h, so erhalten wir das **gesuchte Volumen unseres normalen Kegels mit Kreisbasis**

3) $V_0^h = \frac{r^2}{h^2} \pi \int x^2 0 = 1/_3 \frac{r^2}{h^2} \pi . h^3 = \frac{1}{3} r^2 \pi . h.$ Vergl. Bemerk. 1, Seite 213.

Aufgabe 2. Ein abgestumpfter normaler Kegel mit Kreisbasis ist gegeben durch die Radien seiner Endflächen (R und r), so wie durch seine Höhe (h). Man soll dessen Volumen berechnen. —

Fig. 66.



Auflösung. Wir fassen unsern abgestumpften Kegel als einen Rotationskörper auf, welcher durch Rotation der Linie BC, um die (mit BC in derselben Ebene liegende) Achse AX entsteht.

Beziehen wir nun die Linie BC auf ein rechiwinkliges Coordinaten-System, dessen Abscissenachse AX und dessen Anfangspunkt der Punkt A ist, so entspricht die Grade BC der Gleichung

14*

$$1)\quad y = r + \frac{R-r}{h}x.$$

Um die Gleichung abzuleiten, gehe man aus von der Proportion

$$BD : CD = Bp : Mp$$

$$h : R - r = x : yp.$$

Hieraus folgt $Mp = \frac{R-r}{h}x$. Demnach ist $y = Pp + Mp = r + \frac{R-r}{h}x$.

Setzen wir nach dieser Gleichung 1 den Werth von y in Gleichung 5, Seite 209, ein, so folgt

$$2)\quad dV = \pi . \left(r + \frac{R-r}{h}x\right)^2 dx.$$

Hieraus erhalten wir für **das gesuchte Volumen unseres abgestumpften Kegels**

$$3)\quad V_0^h = \pi . \int_0^h \left(r + \frac{R-r}{h}x\right)^2 dx.$$

Um den Werth des bestimmten Integrals auf der rechten Seite unserer Gleichung zu ermitteln, gehen wir aus von dem allgemeinen Integral.

Zunächst ist

$$4)\quad \int (r + \frac{R-r}{h}x)^2 dx = \frac{h}{R-r} \int \left(r + \frac{R-r}{h}x\right)^2 \frac{R-r}{h} dx.$$

Setzen wir

$$5)\quad \frac{R-r}{h}x = u \text{ also } \frac{R-r}{h}dx = du$$

so folgt

$$6)\quad \int (r + \frac{R-r}{h}x) . dx = \frac{h}{R-r} \int (r+u)^2 . du$$

$$= \frac{1}{3} \frac{h}{R-r} (r+u)^3 + C.$$

$$7)\quad \int (r + \frac{R-r}{h}x)\, dx = \frac{1}{3} \frac{h}{R-r} \left\{ r + \frac{R-r}{h}x \right\}^3 + C.$$

$$8)\quad \int_0^h (r + \frac{R-r}{h}x)\, dx = \frac{1}{3} \frac{h}{R-r} \left\{ r + \frac{R-r}{h}h \right\}^3 - \frac{1}{3} \frac{h}{R-r} r^3$$

$$= \frac{1}{3} \frac{h}{R-r} \left\{ (r + R - r)^3 - r^3 \right\} = \frac{h}{3} . \frac{R^3 - r^3}{R-r}$$

Nun ist

$$9)\ \frac{R^3 - r^3}{R - r} = R^2 + Rr + r^2.$$

Setzen wir nach Gleichung 9 den Werth von $\frac{R^3 - r^3}{R - r}$ in Gleichung 8 ein, so folgt

$$10)\ \int_0^h \left(r + \frac{R - r}{h} x\right) dx = \frac{h}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

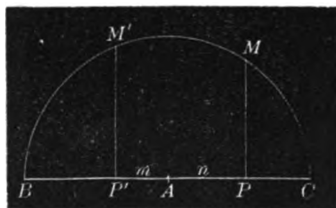
Wird der Werth von $\int_0^h \left(r + \frac{R - r}{h} x\right) dx$ nach Gleichung 10 in Gleichung 3 eingesetzt, so ergiebt sich für das Volumen des abgestumpften Kegels

$$11)\ V_0^h = \frac{h\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$ { Vergl. Bemerkung 7, Seite 214.

Aufgabe 3. Der Radius einer Kugel ist gleich r. Man soll sein Volumen berechnen.

Auflösung. Bekanntlich entsteht eine Kugel, wenn man Fig. 67 einen Halbkreis um seinen Durchmesser BC rotiren lässt. Beziehen wir nun unsern Halbkreis auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System, dessen Abscissen-Achse dieser Durchmesser BC und dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt A ist, so ist die Gleichung des Kreises

Fig. 67.



$$1)\ y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Setzen wir nach dieser Gleichung den Werth von y in Gleichung 5, Seite 208, ein, so folgt

$$2)\ dV = (r^2 - x^2) . \pi . dx.$$

Hieraus ergiebt sich das Volumen der ganzen Kugel,

$$V_{-r}^{+r} = \pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)\, dx$$

4) $V_{-r}^{+r} = \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \pi\left(-r^3 - \frac{r^3}{3}\right)$

5) $V_{-r}^{+r} = \frac{4}{3}\pi . r^3$. —

Bemerkungen.

1. Wir machen darauf aufmerksam, dass die Körper, welche in den Auflösungen von Aufgabe 1 bis 3 berechnet sind, mit Hülfe der niedern Mathematik berechnet werden können; dass also hierdurch ein Mittel geboten ist, die Richtigkeit unserer Methode zu prüfen. —

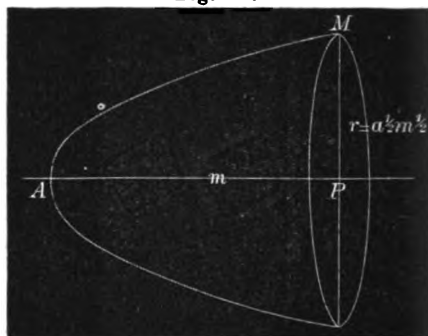
2. Wie gross ist das Volumen $\left(V_{-m}^{n}\right)$ des Körpers, welcher durch Rotation der Fläche M′P′PM entsteht?

Aufgabe 4. Wie gross ist das Stück des Rotations-Paraboloids, welches Fig. 68 dadurch entsteht, dass die Parabelfläche AMP und die geometrische Achse AP rotirt, wenn der Parameter der rotirenden Parabel = a ist?

Auflösung. Die Gleichung unserer Parabel ist

1) $y^2 = ax$.

Fig. 68.



Setzen wir diesen Werth von y^2 in die Gleichung 5, Seite 208, ein, so folgt

2) $dV = \pi ax . dx$.

Daraus folgt für das gesuchte Volumen die Gleichung

3) $V_0^m = \pi a \int_0^m x\, dx = \frac{\pi a m^2}{2}$.

Bemerkungen.

1. Setzen wir AP = m, MP = r, so folgt aus Gleichung 1

4) $am = r^2$, also erhalten wir nach Gl. 3

5) $V_0^m = \frac{m r^2 \pi}{2}$.

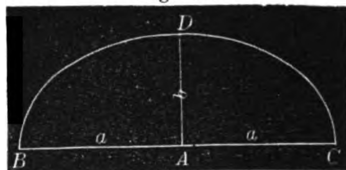
2. Das Volumen eines Cylinders mit Kreisbasis, dessen Höhe = h und dessen Radius gleich r ist, ist bekanntlich gleich $m r^2 \pi$; mithin ist nach Gleichung 5 **ein Cylinder doppelt so gross, als ein Rotations-Paraboloid, welches mit ihm gleiche Basis und gleiche Höhe hat.**

3. Ist eine Kugel gegeben, und ausserdem ein Rotations-Paraboloid, ein Kegel und ein Cylinder, deren Durchmesser an der Grundfläche und deren Höhen gleich dem Durchmesser der Kugel sind. Man soll beweisen, dass sich die Volumina dieser Körper wie $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : 1$ oder wie $4:3:2:6$ verhalten.

4. Ein Rotations-Paraboloid wird durch Ebenen geschnitten, welche normal zur Rotations-Achse stehen, wie gross ist das Volumen (V_n^m), welches zwischen diesen beiden Ebenen liegt, wenn deren Entfernungen vom Scheitelpunkte resp. n und m sind. (Vergl. Gl. 2.)

Aufgabe 5. Man soll das Volumen (V) eines Ellipsoids berechnen, welches dadurch entsteht, dass sich eine Ellipse um ihre grosse Achse dreht. —

Fig. 69.



Auflösung. Die Mittelpunkts-Gleichung der Ellipse ist bekanntlich

$$1) \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Setzen wir diesen Werth von y in Gleichung 5, Seite 208, ein, so folgt

$$2) \quad dV = \frac{b^2}{a^2} \pi . (a^2 - x^2)\, dx.$$

Hieraus ergiebt sich das Volumen unseres Rotations-Ellipsoides

$$3) \quad V_{-a}^{+a} = \frac{b^2}{a^2} \pi \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\, dx$$

$$= \frac{4}{3} a^2 b \pi.$$

Aufgabe 6. Eine Ellipse rotirt um ihre kleine Achse. Man soll das Volumen des entstandenen Rotationskörpers ermitteln.

Auflösung. Nach der Auflösung der vorigen Aufgabe ist einleuchtend, dass das gesuchte Volumen ausgedrückt wird durch die Gleichung

$$1)\quad V = \frac{a^2}{b^2}\pi . \int_{-b}^{+b} (b^2 - y^2)\, dy.$$

Hieraus folgt

$$2)\quad V = \frac{4}{3} a^2 b \pi.$$

Bemerkungen.

1. Setzen wir in den Aufgaben 5 und 6 $a = b = r$, so werden die beiden dort befindlichen Ellipsoide zu Kugeln vom Radius r. Hiernach erhalten wir für das Volumen einer Kugel

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi. \quad \text{(Vergl. Aufgabe 3.)}$$

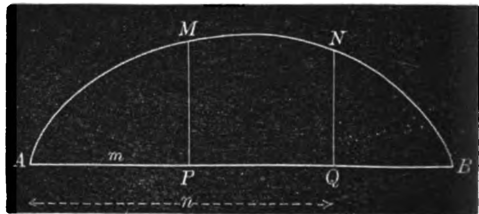
2. Ein Rotations-Ellipsoid, welches durch Umdrehung einer Ellipse um die kleine Achse entsteht, ist ein sogenanntes abgeplattetes Rotations-Ellipsoid.

Aufgabe 7. Man soll das Volumen eines Rotations-Hyperboloides berechnen.

(Die Auflösung überlassen wir dem Leser.)

Aufgabe 8. Eine Cycloide rotirt um die Grade AB, welche deren Endpunkte verbindet. Man soll das Volumen des entstandenen Rotationskörpers berechnen. —

Fig. 70.



Auflösung. Beziehen wir Figur 70 unsere Cycloide auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System, dessen Abssissenachse die Linie AB und dessen Anfangspunkt der Punkt A ist, so entspricht nach D. R., Seite 135, Gleichung 5 und 6, die Cycloide den Gleichungen

1) $x = r(t - \sin t)$

2) $y = r(1 - \cos t)$.

Aus Gleichung 1 folgt

3) $dx = r(1 - \cos t)\, dt$.

Setzen wir nach den Gleichungen 2 und 3 die Werthe von y und dx in Gleichung 5, Seite 208, ein, so folgt

4) $dV = \pi . r^2 (1 - \cos t)^2 . r (1 - \cos t)\, dt$

5) $dV = \pi r^3 (1 - \cos t)^3\, dt = 8 \pi r^3 \sin^6 \frac{t}{2} . dt$.

Hieraus ergiebt sich für den Werth des **ganzen Rotationskörpers die Gleichung**

6) $V_0^{2\pi} = 8 \pi r^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} . dt$.

Um das Integral $\int \sin^6 \frac{t}{2} dt$ zu lösen, entwickeln wir $\sin^6 \frac{t}{2}$ nach D. R. §. 45, Seite 77.

Hierdurch ergiebt sich

7) $\sin^6 \frac{t}{2} = \frac{1}{32} \left\{ - \cos 6 \frac{t}{2} + 6 \cos 4 . \frac{t}{2} - 15 \cos 2 \frac{t}{2} + 10 \right\}$

$= \frac{1}{32} \left\{ - \cos 3t + 6 \cos 2t - 15 \cos t + 10 \right\}$.

Setzen wir diesen Werth von $\sin^6 \frac{t}{2}$ in Gleichung 6 ein, und führen wir darauf die Integration aus, so folgt

8) $V_0^{2\pi} = \frac{\pi r^3}{4} \left\{ - \frac{\sin 6\pi}{3} + 6 \frac{\sin 4\pi}{2} - 15 \sin 2\pi + 20 \pi \right\}$

$- \frac{\pi r^3}{4} \left\{ - \frac{\sin 0}{3} + 6 . \frac{\sin 0}{2} - 15 . \sin 0 \right\}$.

Nun ist $\sin 0$, $\sin 2\pi$, $\sin 4\pi$, $\sin 6\pi$ gleich 0. Demnach ergiebt sich aus Gleichung 8

9) $V_0^{2\pi} = \frac{\pi r^3}{4} . 20 \pi = 5 \pi^2 r^3$.

Wie müsste man verfahren, wenn man $\int (1 - \cos t)^3 \, dt$ nach Gleichung 7, Seite 27, lösen wollte?

Aufgabe 9. Man soll das Volumen des Rotationskörpers berechnen, welcher entsteht, wenn Fig. 70 die Fläche MPQN um die Achse AB rotirt.

Auflösung. Nach Gleichung 5, Seite 217, ist

$$1)\ dV = \pi r^3 (1 - \cos t)^3 \, dt.$$

Sind nun α und β diejenigen Werthe von t, welche den Werthen $x = m$ und $x = n$ entsprechen, so ist das gesuchte Volumen

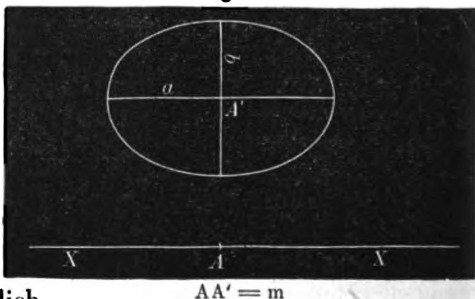
$$2)\ V_m^n = \pi r^3 \int_\alpha^\beta (1 - \cos t)^3 \, dt.$$

Die weitere Ausführung können wir dem Leser überlassen.

Bemerkung. Wenn die Lage der Punkte M und N durch die Abscissen m und n gegeben ist, so müssen wir die Werthe von α und β nach Gleichung 1 Seite 217 berechnen. Da nun aber die Gleichung 1 für t sich nicht in geschlossener Form auflösen lässt, so kann man für α und β nur **Näherungswerthe** finden. — Wir empfehlen dem Anfänger, für r so wie für m und n bestimmte Zahlenwerthe anzunehmen, und die Rechnung durchzuführen.

Aufgabe 10. Man soll dass Volumen des Rotationskörpers berechnen, welcher dadurch entsteht, dass die Ellipse Fig. 71 um die Achse XX rotirt, wenn man voraussetzt, dass XX die Ellipse nicht schneidet und ihrer grossen Achse parallel ist.

Fig. 71.



$AA' = m$

Auflösung. Die Mittelpunkts-Gleichung der Ellipse ist bekanntlich

$$1)\ y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Beziehen wir nun unsere Ellipse auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System, dessen Abscissen-Achse die Linie XX und dessen Anfangspunkt der Punkt A ist, so ergiebt sich folgende Gleichung für unsere Ellipse

$$2)\ y = m \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Da nun in Gleichung 2 unsere Ellipse auf ein Coordinaten-System bezogen ist, dessen **Absissen-Achse** mit der **Rotations-Achse** zusammenfällt, so können wir Gleichung 4, Seite 209, benutzen, um das Volumen unseres Rotations-Körpers zu berechnen.

Wir erhalten demnach

$$3)\ dV = \pi . \left\{ \left(m + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \left(m - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 \right\} dx$$

$$4)\ dV = \pi . \left\{ 4\frac{bm}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \right\} dx.$$

Hieraus ergiebt sich für das **ganze Volumen** unseres Körpers die Gleichung

$$5)\ V = \frac{4\,bm}{a}\pi . \int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx.$$

Nun ist

$$6)\ \int\sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C.$$

Hieraus ergiebt sich weiter nach §. 42, Seite 96

$$7)\ \int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{+a}{a}\right) - \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{-a}{a}\right).$$

Nun ist

$$8)\ \arcsin\frac{+a}{a} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$9)\ \arcsin\frac{-a}{a} = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Setzen wir die Werthe von $\arcsin\frac{+a}{a}$ und $\arcsin\frac{-a}{a}$ nach den Gleichungen 8 und 9 in Gleichung 7 ein, so folgt

$$10)\ \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{a^2}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a^2 \pi}{2}.$$

Aus den Gleichungen 10 und 5 folgt weiter

$$11)\ V = \frac{4\,bm}{a} \cdot \frac{a^2 \,.\, \pi^2}{2} = 2\,abm\,\pi^2.$$

Bemerkungen.

1. Der Ausdruck $2\,abm\,\pi^2$ lässt sich in die beiden Factoren $2m\pi$ und $ab\pi$ zerlegen. Der eine von diesen Factoren ist gleich dem Umfange des Kreises, den der Mittelpunkt unserer Ellipse beschreibt, der andere Factor ist gleich der Fläche der Ellipse. Da nun der Mittelpunkt der Ellipse zugleich ihr Schwerpunkt ist, so ergiebt sich, dass das Volumen unseres Rotations-Körpers gleich ist dem Produkt aus der erzeugenden Fläche und dem Wege, den der Schwerpunkt derselben bei der Drehung zurücklegt.

2. Dieser Satz gilt in allen Fällen, in denen eine ebene Figur um eine feste Achse rotirt, die in ihrer Ebene liegt und die Figur nicht schneidet. Er ist bekannt unter dem Namen der Guldinschen Regel.

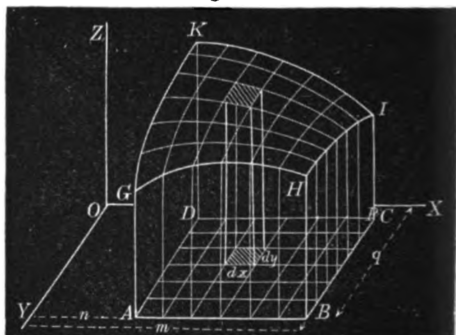
3. Kann man nach Gleichung 11 das Volumen eines Rotations-Körpers berechnen, der dadurch entsteht, dass ein Kreis um eine Achse rotirt, die in dessen Ebene liegt, und den Kreis nicht schneidet?

§. 86.

Cubatur der Körper von beliebiger Gestalt.

Wir wollen in den folgenden drei Aufgaben drei Fälle behandeln, die den Leser hoffentlich in den Stand setzen, sich in jedem besonderen Falle zurecht zu finden.

Fig. 72.



Aufgabe 1. Auf der XY-Ebene steht Fig. 72 ein normaler prismatischer Körper, dessen Basis das Rechteck ABCD ist, und welcher oben in GHIK durch eine krumme Fläche begrenzt wird, welche bestimmt ist durch die Gleichung

1) $z = f(x, y)$.

Man soll das Volumen dieses prismatischen Körpers berechnen.

Auflösung. Diese Aufgabe ist schon §. 57, Seite 134 ff., gelöst, worauf wir hiermit verweisen.

Aufgabe 2. Die Gleichung einer krummen Fläche sei

1) $z = f(x, y)$.

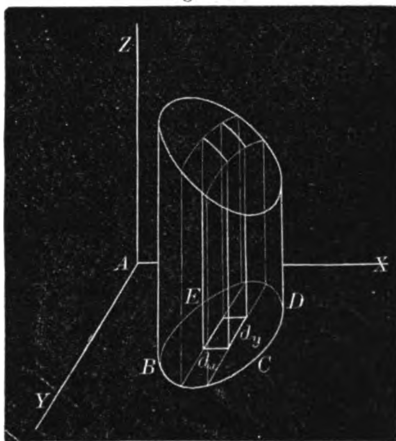
Ferner sei in der horizontalen Coordinaten-Ebene eine geschlossene Figur EBCD gegeben, deren Peripherie der Gleichung

2) $y = \varphi(x)$

entspricht.

Man soll Fig. 73 das Volumen desjenigen Körpers berechnen, welcher begrenzt wird durch die krumme Fläche Gl. 1, durch die Figur EBCD (Gl. 2) und durch eine normale Cylinderfläche, deren Basis die Figur EBCD ist.

Fig. 73.



Auflösung. Wir setzen das Volumen unseres Körpers gleich V. Theilen wir denselben durch 2 Systeme von Ebenen, welche resp. ≠ der XZ-Ebene und XY-Ebene sind, in prismatische Elementar-Körper, deren Basis gleich dx . dy ist, so lässt sich die Grösse jedes dieser Elemente ausdrücken durch die Differential-Function

„$f(x . y) . dx . dy$."

Hieraus folgt

3) $\frac{\delta^2 V}{dx\, dy} . dx\, dy = f(x . y) . dx\, dy$, also

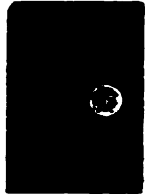
$$4)\quad V = \int_{y_0}^{x_1}\int_{x_0}^{y_1} f(x\,.\,y)\,dx\,.\,dy$$

$$5\quad V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x\,.\,y)\,dx$$

In Gleichung 4 und 5 hängt der Werth der Grenzen x_0, x_1 und y_0, y_1 von der Natur der Gleichung 2 ab, und es sind y_0 und y_1 Functionen von x. Vergleiche Seite 181 ff. und Aufgabe 2, Seite 224.

Aufgabe 3. Die Gleichung einer in sich geschlossenen krummen Fläche Fig. 74 sei

Fig. 74.



$$1)\quad z = f(x\,.\,y).$$

Man soll das Volumen des Körpers berechnen, der durch diese krumme Fläche begrenzt wird.

Auflösung. Wir denken uns den Körper in drei Systeme von Ebenen, welche resp. den 3 Coordinaten-Ebenen parallel sind, in Elementar-Körper zerlegt, deren jeder sich durch das Product dx . dy . dz ausdrücken lässt.

Summiren wir nun diese Elementar-Körper zunächst in Gruppen, so dass die Elemente einer jeden Gruppe einen normalen prismatischen Körper mit dem Querschnitt dx . dy bilden;

summiren wir darauf die prismatischen Gruppen zu Schichten, welche parallel der ZY-Ebene sind;

und addiren wir dann alle diese Schichten, so ist die letzte Summe gleich dem gesuchten Volumen.

Dieser dreifachen Addition entspricht eine dreifache Integration, erst nach z, darauf nach y und schliesslich nach x.

Es ist demnach

$$2)\quad V = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} dx\,dy\,.\,dz = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} dz.$$

In dieser Gleichung sind die Grenzen x_0 und x_1, y_0 und y_1, sowie z_0 und z_1 abhängig von der Gleichung (1) der krummen Fläche, welche das gesuchte Volumen einschliesst, und es lässt sich leicht erkennen, dass z_0 und z_1 Functionen von x und y, so wie dass y_0 und y_1 Functionen von x sind. (Vergl. Aufgabe 3, Seite 225 ff.)

§. 87.

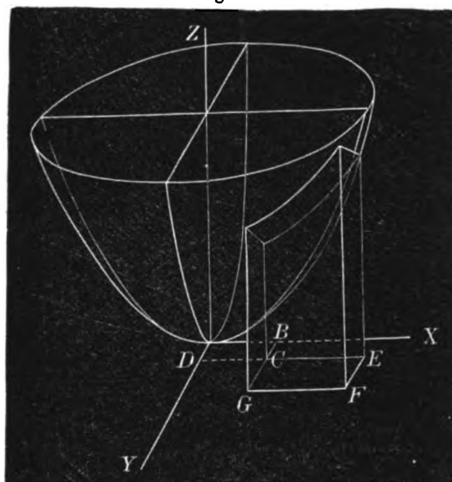
Fortsetzung. — Uebungs-Beispiele.

Aufgabe 1. Die Gleichung eines Rotations-Paraboloides Fig. 75 sei

$$1)\quad Z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9}.$$

In der XY-Ebene liegt ein Rechteck CEFG. Man soll den normalen prismatischen Körper berechnen, dessen Basis das Rechteck CEFG ist, und welches oben durch die Fläche des genannten Rotations-Paraboloides (Gl. 1) begrenzt wird, wenn

Fig. 75.



$$2)\quad \begin{cases} BC = 1, & BG = 3 \\ CD = 2, & DE = 5 \end{cases}$$

Auflösung. Nach §. 86, Aufgabe 1, oder nach §. 57, Seite 135 ff., erhalten wir für das gesuchte Volumen die Gleichung

$$3)\quad V = \int_2^5 dx \int_1^3 \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9}\right) . dy.$$

Hieraus folgt

$$4)\quad V = \int_2^5 dx \left\{\left(\frac{3x^2}{9} + \frac{3^3}{27}\right) - \left(\frac{x^2}{9} + \frac{1}{27}\right)\right\}$$

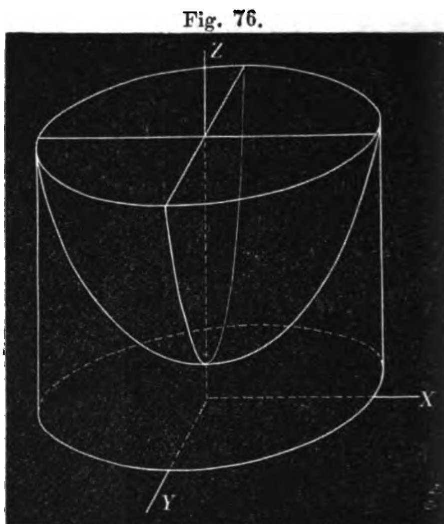
$$5)\quad V = \int_2^5 \left\{\frac{2}{9}x^2 + \frac{26}{27}\right\} dx = \left\{\frac{2}{9} \cdot \frac{5^3}{3} + \frac{26}{27} \cdot 5\right\} - \left\{\frac{2}{9} \cdot \frac{2^3}{3} + \frac{26}{27} \cdot 2\right\}$$

$$6)\quad V = 11\frac{5}{9}.$$

Aufgabe 2. Die Gleichung eines Rotations-Paraboloids sei Fig. 76

1) $z = 1 + \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9}$.

Fig. 76.



Ferner liege in der XY-Ebene ein Kreis, dessen Gleichung sei

2) $x^2 + y^2 = 25$.

Man soll das Volumen desjenigen normalen cylindrischen Körpers berechnen, dessen Basis der Kreis (Gl. 2) ist, und welcher oben durch die Fläche unseres Rotations-Paraboloides (Gl. 1) begrenzt ist.

Auflösung. Nach der Lösung von Aufgabe 2, Seite 220, erhält man

3) $V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \left(1 + \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9}\right) . dy$.

Die Grenzen x_0, x_1, so wie y_0 und y_1 bestimmen sich sehr leicht aus Gleichung 2. Zunächst ist

4) $y = \pm \sqrt{25 - x^2}$.

Hieraus folgt

5) $y_0 = - \sqrt{25 - x^2}$, $y_1 = + \sqrt{25 - x^2}$.

Da ferner die äussersten Werthe für x nach Gleichung 2 resp. -5 und $+5$ sind, so folgt

6) $x_0 = -5$, $x_1 = +5$,

Setzen wir die Werthe von y_0, y_1 und x_0, x_1 nach Gl. 5 und 6 in Gleichung 3 ein, so folgt

$$7)\quad V = \int_{-5}^{+5} dx . \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{+\sqrt{25-x^2}} \left(1 + \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9}\right) dy.$$

Hieraus folgt nach §. 42, Seite 96

$$8)\quad V = \int_{-5}^{+5} 2\left(\sqrt{25 - x^2} + \frac{x^2}{9}\sqrt{25 - x^2} + \frac{\sqrt{(25 - x^2)^3}}{27}\right) dx.$$

$$9)\quad V = 2\int_{-5}^{+5} \sqrt{25 - x^2}\left(1 + \frac{x^2}{9} + \frac{25 - x^2}{27}\right) . dx.$$

$$= 2\int_{-5}^{+5} \sqrt{25 - x^2} . \left(1 + \frac{25 + 2x^2}{27}\right) . dx.$$

Setzen wir in Gleichung 9

$$10)\quad x = 5 . \sin u, \quad dx = 5 \cos u . du$$

so folgt nach §. 47, Seite 117 ff.

$$11)\quad V = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 5 \cos u \left(1 + \frac{25 + 50 \cos^2 u}{27}\right) . 5 \cos u\, du.$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 25 \left(\frac{102 - 50 \cos^2 u}{27}\right) . \cos^2 u\, du.$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{2550 \cos^2 u\, du - 1250 \cos^4 u\, du}{27} .$$

Nun ergiebt sich weiter aus Gleichung 7, S. 27

$$12)\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du = \frac{\pi}{2} .$$

$$13)\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4 u\, du = \frac{3}{4} . \frac{1}{2} \pi = \frac{3}{8} \pi.$$

Verbinden wir die Gleichungen 11, 12 und 13, so folgt

$$14)\ V = 2\left\{\frac{2550.\frac{\pi}{2} - 1250.\frac{3}{8}\pi.}{27}\right\} = 2.\frac{10200 - 3750}{8.27}\pi.$$

$$15)\ V = \frac{6450}{108}\pi = \frac{1075}{18}\pi = 59\frac{13}{18}\pi.$$

Bemerkung. Der Körper, dessen Volumen wir in Gleichung 15 gefunden haben, ist ein Rotations-Körper. — Wie kann man diese Bemerkung benutzen, um die Richtigkeit der Methode zu prüfen, welche in der vorstehenden Auflösung angewandt ist? (Vergl. Seite 208 ff.)

Aufgabe 3. Man soll das Volumen des dreiachsigen Ellipsoides berechnen, wenn dessen halbe Achsen resp. a, b und c sind.

Auflösung. Die Mittelpunkts-Gleichung des genannten dreiachsigen Ellipsoides ist

$$1)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Vergl. Gl. 10,} \\ \text{Seite 229.} \end{array} \right.$$

$$2)\ z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Setzen wir nun das gesuchte Volumen gleich V, so ergiebt sich nach Gleichung 2, Seite 222

$$3)\ V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} dz.$$

In Gleichung 3 sind die Werthe der Grenzen x_0, x_1, y_0, y_1, z_0 und z_1 noch zu bestimmen. Nun ergiebt sich zunächst aus Gl. 2

$$4)\ z_0 = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},\ z_1 = +c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Um die Werthe von y_0 und y_1 zu finden, beachte man, dass man aus Gleichung 1 für **jeden Werth** von x_1 die äusser-

sten Werthe von y dann erhält, wenn man $z = 0$ setzt. Die Grenzen von y ergeben sich demnach aus der Gleichung

$$5)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ oder } y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Hieraus folgt

$$6)\quad y_0 = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},\quad y_1 = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Endlich folgt noch aus Gleichung 1, dass man die äussersten Werthe von x erhält, wenn man y und z gleich Null setzt, und hieraus folgt dann

$$7)\quad x_0 = -a,\quad x_1 = +a.$$

Setzen wir nun nach den Gleichungen 4, 6 und 7 die Grenzwerthe in Gleichung 3 ein, so folgt

$$8)\quad V = \int_{-a}^{+a} dy \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz.$$

Hieraus folgt

$$9)\quad V = 2\int_{-a}^{+a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,.\,dy.$$

Ferner nach §. 37, Seite 82 ff.

$$10)\quad V = 2\int_{-a}^{+a} \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2)\frac{\pi}{2} = \frac{bc\pi}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)\,.\,dx.$$

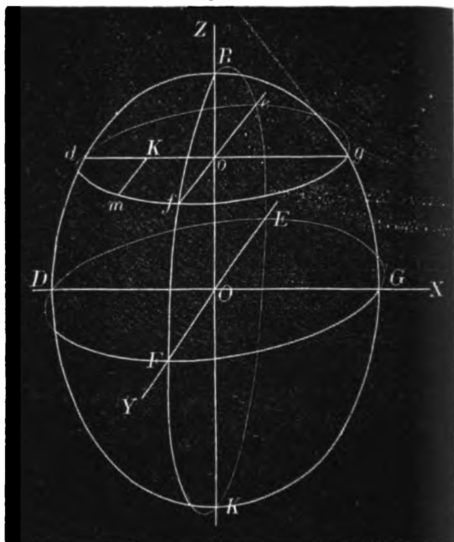
Dies giebt

$$11)\quad V = \frac{bc\pi}{a^2}\left\{\frac{4}{3}a^3\right\} = \frac{4}{3}abc\pi. \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{Vergl. Bemerk. 3,}\\ \text{Seite 229.}\end{array}\right.$$

Bemerkungen.

1. Man kann ein dreiachsiges Ellipsoid auf folgende Weise entstanden denken: Wir construiren Fig. 77 zwei Ellipsen DBGK und EBFK, welche eine gemeinschaftliche Haupt-Achse BK haben und deren Ebenen sich in dieser gemeinschaftlichen Haupt-Achse rechtwinklig schneiden. Denken wir dann eine dritte Ellipse d e g f, deren Ebene rechtwinklig zu der Linie BK steht, und deren Haupt-Achsen eine solche Lage haben, dass deren Endpunkte e und f, sowie d und g auf den genannten Ellipsen (EBFK und DBGK) liegen, und nehmen wir ferner an, dass die Ellipse d e g f sich parallel mit ihrer ursprünglichen Lage in dem Intervall zwischen B und K fortbewegt, und dass sich dieselbe bei dieser Bewegung so ändert, das die Punkte, welche den Punkten d und e so wie f und g entsprechen, stets auf den Ellipsen DBGK und EBFK bleiben, so beschreibt dieselbe bei ihrer Bewegung ein dreiachsiges Ellipsoid.

Fig. 77.



2. Um die Gleichung dieses dreiachsigen Ellipsoides aufzustellen, beziehen wir dasselbe auf ein Coordonaten-System, dessen Achsen mit den Haupt-Achsen des Ellipsoids zusammenfallen, und setzen die Halb-Achsen

$$OD = a,\ OF = b \text{ und } OB = a.$$

Darauf nehmen wir auf der Oberfläche des Ellipsoides einen beliebigen Punkt m an, dessen Coordinaten resp. x, y und z sind. Legen wir darauf durch den Punkt m eine Ebene =|= XY-Ebene, so ist der Schnitt derselben eine Ellipse, d e g f, und es ist zunächst

$$1)\ \overline{od}^2 . y^2 + \overline{of}^2 . x^2 = \overline{od}^2 . \overline{of}^2$$ folgt aus der Gleichung der Ellipse degf.

Nun ist weiter

$$2)\ \overline{of}^2 . c^2 + z^2 . b^2 = b^2 c^2$$
$$3)\ \overline{of}^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 - z^2)$$
folgt aus der Gleichung der Ellipse EGBK.

4) $\overline{od}^2 . c^2 + a^2 z^2 = a^2 c^2$
5) $\overline{od}^2 = \frac{a^2}{c^2} (c^2 - z^2)$
} folgt aus der Gleichung der Ellipse DBGK.

Schalten wir die Werthe von $\overline{of}^2$ und $\overline{od}^2$ nach den Gleichungen 3 und 5 in Gleichung 1 ein, so folgt

$$6)\quad \frac{a^2}{c^2} (c^2 - z^2) . y^2 + \frac{b^2}{c^2} (c^2 - z^2) x^2 = \frac{a^2 b^2}{c^4} (c^2 - z^2)^2$$

$$7)\quad \frac{a^2}{c^2} y^2 \qquad + \frac{b^2}{c^2} x^2 \qquad = \frac{a^2 b^2}{c^4} (c^2 - z^2)$$

$$8)\quad a^2 c^2 y \qquad + a^2 b^2 x^2 \qquad = a^2 b^2 c^2 - a^2 b^2 c^2$$

$$9)\quad a^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2$$

$$10)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \qquad = 1.$$ (Vergl. Gl. 1, Seite 219.)

3. Das dreiachsige Ellipsoid wird zur Kugel, wenn man die drei Achsen einander gleich setzt. Wie kann man diese Bemerkung benutzen, um die Richtigkeit von Gleichung 11, Seite 227, zu prüfen?

IX. Capitel.

Complanation von Flächen.

§. 88.

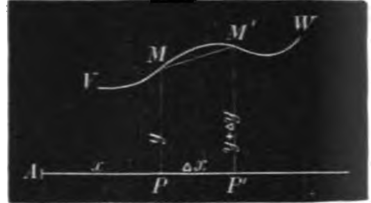
Berechnung der Oberfläche von Rotations-Körpern.

Wir haben schon §. 83 bemerkt, dass man jeden Rotationskörper herstellen kann, indem man eine **ebene** Curve (die sogenannte Meridianlinie) um eine feste Achse rotiren lässt, die in ihrer Ebene liegt. Wir wollen deshalb in dem Folgenden annehmen, dass die Gleichung der Meridianlinie gegeben sei in Bezug auf ein Coordinaten-System, dessen Abscissen-Achse mit der Rotations-Achse zusammenfällt. Ist z. B. die Gleichung der Curve VW Fig. 78

1) $y = f(x)$

und lassen wir dieselbe um die Achse AX rotiren, so entsteht hierdurch eine Rotationsfläche. Setzen wir dann die Coordinaten des Punktes M resp. gleich x und y, ferner $PP' = \Delta x$, und bezeichnen wir die Grösse der Oberfläche durch O, so ist ΔO gleich derjenigen Fläche, welche durch den Bogen $\breve{MM'}$ beschrieben wird. Um für diese Fläche einen allgemeine Ausdruck zu finden, gehen wir aus von der Kegelfläche, welche durch die Sehne $\overline{MM'}$ behrieben wird.

Fig. 78.



Bezeichnen wir diese Kegelfläche durch ΔK, so folgt

1) $\Delta K = (MP + M'P') . \overline{MM'} . \pi = (y + y + \Delta y . \pi . \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

2) $\frac{\Delta K}{\Delta x} = (2y + \Delta y)\pi . \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$

3) $\frac{\Delta K}{\Delta O} \cdot \frac{\Delta O}{\Delta x} = (2y + \Delta y) . \pi . \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$

also

4) $\lim \frac{\Delta K}{\Delta O} \cdot \frac{\Delta O}{\Delta x} = 2y\pi . \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$

Wenn aber Δx immer kleiner wird, so wird der Quotient $\frac{\text{Sehne } \overline{MM'}}{\text{Bogen } MM'}$ sich der Einheit immer mehr nähern, und zuletzt — wenn Δx gleich Null wird — wird dieser Quotient gleich 1 werden, d. h. $\lim \frac{\Delta K}{\Delta O} = 1$. Demnach folgt aus Gl. 4

5) $\frac{dO}{dx} = 2y . \pi . \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

6) $dO = 2y\,\pi \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} . dx.$

Hieraus folgt unmittelbar

$$7)\ \overset{n}{\underset{m}{O}} = \int_{m}^{n} 2\mathrm{y} \,.\, \pi \,.\, \sqrt{1+\left(\frac{d\mathrm{y}}{d\mathrm{x}}\right)^2} \,.\, d\mathrm{x}.$$

Lassen sich die Gl. 6 und 7 nach der Infinitisimalmethode einfacher ableiten? (Vergl. Bemerkung Seite 206.)

§. 89.

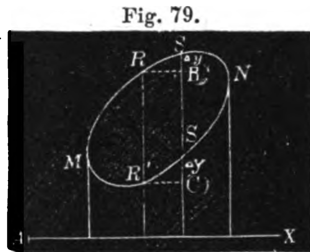
Fortsetzung.

In dem vorigen Paragraphen wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass die Gleichung der Meridianlinie

$$1)\ \mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$$

für jeden Werth von x nur **einen** Werth von y habe. Giebt ein Werth von x mehrere Werthe für y, so wird die Sache nicht wesentlich geändert.

Fig. 79.



Wenn z. B. die Curve Fig. 79 um die Achse AX rotirt, und wenn dann die grössere der beiden Ordinaten, welche einem Werthe von x entsprechen, durch y, die kleinere durch y bezeichnet wird, so ergiebt sich durch eine Betrachtungsweise, welche der des vorigen §. analog ist, die Gleichung

$$1)\ d0 = \left\{ 2\mathrm{y} \,.\, \sqrt{1+\left(\frac{d\mathrm{y}}{d\mathrm{x}}\right)^2} + 2y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{d\mathrm{x}}\right)^2} \right\} \pi \,.\, d\mathrm{x}.$$

§. 90.

Fortsetzung. — Aufgaben.

Aufgabe 1. Eine Parabel AMN Fig. 80 dreht sich um ihre geometrische Achse AQ. Man soll die krumme Fläche berechnen, die durch den Parabel-Bogen AMN erzeugt wird.

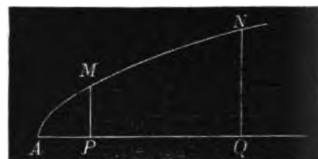
Auflösung. Die Gleichung der Parabel sei

$$1)\ y^2 = ax$$

dann ist

$$2)\ \frac{dy}{dx} = \frac{a^{1/2}}{2x^{1/2}}$$

Fig. 80.



AQ = n.

Setzen wir nun die Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$ nach Gleichung 1 und 2 in Gleichung 6, Seite 230, ein, so folgt

$$3)\ dO = 2a^{1/2}x^{1/2}\pi . \sqrt{1 + \frac{a}{4x}} . dx$$

$$= 2a^{1/2}\pi . \sqrt{x + \frac{a}{4}} . dx.$$

Hieraus ergiebt sich für die gesuchte Oberfläche die Gleichung

$$4)\ O_0^n = 2a^{1/2}\pi . \int_0^n \sqrt{x + \frac{a}{4}} . dx$$

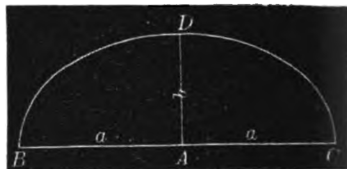
$$5)\ O_0^n = 2a^{1/2}\pi . \left\{ \frac{2}{3}\left(n + \frac{a}{4}\right)^{3/2} - \frac{2}{3}\left(\frac{a}{4}\right)^{3/2} \right\}$$

$$= \frac{1}{6}\pi . \left\{ (4n + a)^{3/2} a - a^2 \right\}$$

Wie gross ist die krumme Fläche, welche durch den Bogen $\overset{\frown}{MN}$ beschrieben wird?

Aufgabe 2. Eine halbe Ellipse Fig. 81 dreht sich um ihre grosse Achse. Man soll die Oberfläche des hierdurch entstehenden Rotations - Ellipsoids berechnen.

Fig. 81.



Auflösung. Die Gleichung unserer halben Ellipse ist

$$1)\ y = + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Hieraus folgt

$$2)\ \frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Setzen wir nach den Gleichungen 1 und 2 die Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$ in Gleichung 6, Seite 230, ein, so folgt

$$3)\ dO = 2\pi \cdot \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{b^2 z^2}{a^2(a^2 - x^2)}} \cdot dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2}{a^2}} \cdot dx.$$

Setzen wir hierin

$$4)\ a^2 - b^2 = e^2,$$

so folgt

$$5)\ dO = 2\pi \cdot \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - e^2 4^2}\, xd.$$

Hieraus erhalten wir für die **ganze Oberfläche** unseres Rotations-Ellipsoides

$$6)\ O = \frac{2\pi \cdot b}{a^2} \cdot \int_{-a}^{+a}\sqrt{a^4 - e^2 x^2} \cdot dx.$$

Nun ist nach Gleichung 18, Seite 84

$$7)\ \int\sqrt{a^4 - e^2 x^2}\, dx = e\int\sqrt{\frac{a^4}{e^2} - x^2} \cdot dx =$$

$$= \frac{a^4}{2e}\arcsin\frac{ex}{a^2} + ex\frac{\sqrt{\frac{a^4}{e^2} - x^2}}{2} + C.$$

Setzen wir diesen Werth von $\int\sqrt{a^4 - e^2 x^2} \cdot dx$ in Gleichung 6 ein, so folgt

$$8)\ O = \frac{2\pi \cdot b}{a^2}\left\{\frac{a^4}{e} \cdot \arcsin\frac{e}{a} + ae \cdot \sqrt{\frac{a^4}{e^2} - a^2}\right\}$$

$$9)\ O = \frac{2\pi \cdot ba^2}{e}\arcsin\frac{e}{a} + 2\pi \cdot b^2$$

Setzen wir hierin für e seinen Werth nach Gleichung 4, so folgt

$$10)\quad O = \frac{2\pi . ba^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} . \text{arc sin} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} + 2\pi b^2$$

$$= \frac{2\pi b a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} . \text{arc sin} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} + 2\pi b^2.$$

Bemerkung. **Setzen wir $a = b = r$, so wird unser Rotations-Ellipsoid zu einer Kugel vom Radius r. — Wollen wir diese Bemerkung benutzen, um die Richtigkeit des Resultats in Gleichung 10 zu prüfen, so müssen wir in Gleichung 10 $a = b = r$ setzen; in diesem Falle aber nimmt der Ausdruck $\frac{2\pi b a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} . \text{arc sin} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ die Form $\infty . 0$ an.**

Aus diesem Grunde setzen wir nach Gleichung 10

$$11)\quad O = 2\pi b a^2 . \frac{\text{arc sin} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}{\sqrt{a^2 - b^2}} + 2\pi b^2.$$

Darauf denken wir uns b als variable Grösse, und bestimmen nach D. R. Seite 103 ff. den Werth von $\frac{\text{arc sin} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ für den Fall, dass b gleich a wird. In diesem Falle wird

$$12)\quad \frac{\text{arc sin} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{0}{0} = \frac{1}{a}.$$

Setzen wir nun in Gleichung 11 $a = b = r$, und schalten wir unter dieser Voraussetzung den Weg von $\frac{\text{arc sin} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ nach Gl. 12 in Gleichung 11 ein, so folgt für die Oberfläche der Kugel

$$13)\quad O = 2\pi . r . r^2 \frac{1}{r} + 2\pi . r^2 = 4 r^2 \pi,$$

eine Gleichung, deren Richtigkeit durch die Elementar-Mathematik bestätigt wird.

Aufgabe 3. Die halben Achsen einer Ellipse sind a und b. Man soll die Oberfläche desjenigen Rotations-Ellipsoides (des sogenannten abgeplatteten Ellipsoids) berechnen, welches entsteht, wenn die Ellipse sich um die kleine Achse dreht.

Auflösung. Wir beziehen unsere Ellipse auf ein Coordinaten-System, dessen Abscissen-Achse mit der kleinen Achse

zusammenfällt, und dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt der Ellipse ist. **Unter dieser Voraussetzung** ist die Gleichung der halben Ellipse Fig. 82

Fig. 82.

$$1)\quad y = +\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$$

Hieraus folgt

$$2)\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{ax}{b\sqrt{b^2 - x^2}}$$

$$3)\quad dO = 2\pi . \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^4 - b^2x^2 + a^2x^2}{b^2}} . dx.$$

$$4)\quad O = \frac{2a\pi}{b^2}\int_{-b}^{+b}\sqrt{b^4 + e^2x^2} . dx$$

$$5)\quad O = \frac{2ae\pi}{b^2}\int_{-b}^{+b}\sqrt{\frac{b^4}{e^2} + x^2} . dx.$$

Hieraus folgt weiter nach Gleichung 4, Seite 85

$$6)\quad O = 2a^2\pi + \frac{2ab^2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} . l\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

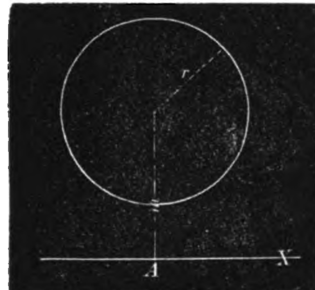
Man soll aus Gleichung 6 den Werth von O finden, für den Fall, dass $a = b = r$ wird, d. h. dass unser Rotations-Ellipsoid eine Kugel vom Radius r wird. (Vergl. Bemerk. Seite 234.)

Aufgabe 4. Die Gleichung eines Kreises Fig. 83 sei

$$1)\quad y = m \pm \sqrt{r^2 - x^2} \text{ wo } m > r.$$

Man soll die Oberfläche des Rotations-Körpers berechnen, welcher entsteht, wenn unser Kreis um die Abscissen-Achse rotirt.

Fig. 83.



Auflösung. Aus Gleichung 1 folgt

$$2)\quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Hieraus folgt nach Gleichung 1, Seite 231

$$3)\ dO = 4m\pi \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} . dx.$$

$$4)\ dO = 4m\pi \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} . dx = 4mr\pi \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$5)\ O = 4mr \int_{-r}^{+r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} .$$

Dies giebt nach Gleichung 5, Seite 77

$$6)\ O = 4mr . \pi^2.$$

Bemerkungen.

1. Der Ausdruck für O in Gleichung 6 lässt sich in die beiden Factoren $2m\pi$ und $2r\pi$ zerlegen, der eine Factor ($2r\pi$) ist gleich dem Umfange des rotirenden Kreises, der andere Factor ($2m\pi$) ist gleich dem Umfange des Kreises, den der Mittelpunkt des rotirenden Kreises beschreibt, so dass in unserm Falle die Oberfläche des Rotations-Körpers gleich ist dem Producte aus der Länge der rotirenden Linie und dem Wege, den der Mittelpunkt (Schwerpunkt) derselben bei der Rotation beschreibt. (Guldlins Regel.)

2. Wenn man $m = 0$ setzt, so geht nach Gleichung 1 die Dreh-Achse durch den Mittelpunkt des Kreises, und es müsste nach Gl. 13, Seite 234, $O = 4r^2\pi$ sein, nach Gleichung 6 wird in diesem Falle aber $O =$ Null. Wie reimt sich dies zusammen?

§. 91.

Krumme Flächen, welche ganz allgemein durch Gleichungen zwischen ihren rechtwinkligen Coordinaten gegeben sind.

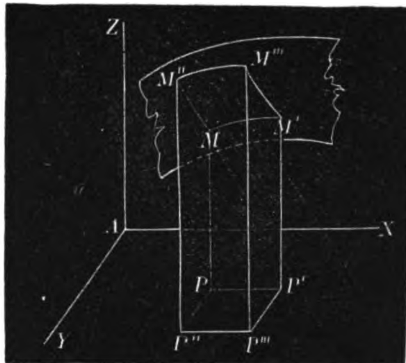
Wir wollen annehmen, dass

$$1)\ z = f(x, y)$$

die Gleichung einer krummen Fläche (Fig. 84) sei. Nehmen wir dann in der genannten Fläche einen beliebigen Punkt M

an, dessen Coordinaten x, y und z seien, und zeichnen wir die Projection (P) dieses Punktes in der XY-Ebend, deren Coordinaten resp. gleich x und y seien; legen wir dann weiter durch P die Linien PP' und PP'' parallel den Achsen von X und Y, und zeichnen wir schiesslich das Rechteck PP'P'''P'', dessen Seiten resp. gleich Δx und Δy sind, so können wir Fig. 84 das Rechteck PP'P'''P'' als Projection eines Elementes (MM'M''M'') unserer gesuchten Fläche auffassen.

Fig. 84.



Lassen wir Δx und Δy immer kleiner werden, so werden die Punkte P' und P'' immer näher an P, und die Punkte M' und M'' immer näher an M rücken, schliesslich — wenn Δx und Δy in dx und dy übergegangen sind — **ist MM'M'''M'' zu $\frac{\partial^2 O}{dx\,.\,dy}\,.\,dx\,dy$ geworden.** Wir dürfen also zunächst setzen

$$2)\quad \frac{\partial^2 O}{dx\,.\,dy}\,.\,dx\,.\,dy = \lim MM'M'''M''.$$

Setzen wir nun den Neigungswinkel, welchen die Berührungs-Ebene des Punktes M mit der XY-Ebene bildet, gleich α, und berücksichtigen wir, dass die Projection von lim MM'M'''M'' (Gleichung 2) gleich dx . dy ist, so ergiebt sich

$$3)\quad \frac{\partial^2 O}{dx\,.\,dy}\,.\,dx\,.\,dy\,.\,\cos\alpha = dx\,.\,dy. \Big\}\ \text{Vergl. Bemerk. 1.}$$

$$4)\quad \frac{\partial^2 O}{dx\,.\,dy} = dx\,.\,dy\,.\,\frac{1}{\cos\,.\,\alpha} = dx\,.\,dy\,.\sqrt{1 + \operatorname{tg}\alpha.}$$

Der Werth von $\cos\alpha$ ist offenbar eine Function von x und y. Um denselben zu ermitteln, beachten wir, dass nach D. R.,

Seite 231 bis 233, die Gleichung der Berührungs-Ebene des Punktes M folgende Form hat.

$$5)\quad w - z = \frac{\partial z}{dx}(u - x) + \frac{\partial z}{dy}(v - y).$$

Hieraus folgt

$$6)\quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{dy}\right)^2}$$ Vergleiche Bemerkung Seite 20.

Setzen wir nach Gleichung 6 den Werth von $\operatorname{tg}\alpha$ in Gleichung 4 ein, so folgt

$$7)\quad \frac{\partial^2 O}{dx \,.\, dy} \,.\, dx \,.\, dy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{dx}\right)^2} \,.\, dx \,.\, dy.$$

Hieraus folgt weiter

$$8)\quad O = \int_{y_0}^{x_1}\int_{y_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{dy}\right)^2} \,.\, dy$$

wo die Werthe der Grenzen x_0, x_1, y_0 und y_1 noch näher zu bestimmen sind.

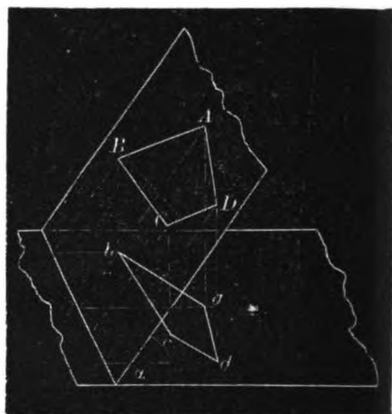
Bemerkungen.

1. Gleichung 3 folgt aus dem allgemeinen Satze, dass die rechtwinklige Projection einer **ebenen** Figur gleich ist dem Producte aus dieser Figur und dem cosinus des Neigungswinkels ihrer Ebene gegen die Projections-Ebene.

Hiernach wäre z. B. in Fig. 85

$$abcd = ABCD \,.\, \cos\alpha.$$

Fig. 85.

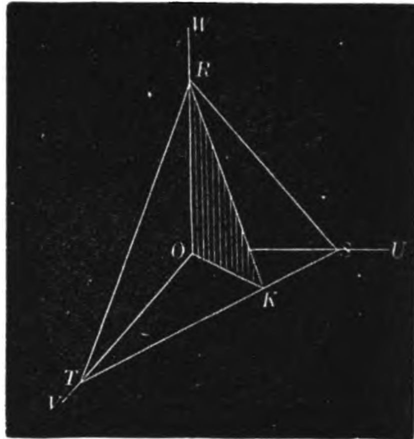


2. Um zu zeigen, wie Gleichung 6 aus Gleichung 5 folgt, wollen wir annehmen, dass eine beliebige Ebene, RST Fig. 86, durch die Gleichung 9 gegeben sei, nämlich

$$9)\quad w = Au + Bv + C$$

und uns zunächst die Aufgabe stellen: **den Neigungswinkel dieser Ebene gegen die XY-Ebene zu bestimmen.**

Fig. 86.



Zu dem Ende fällen wir Fig. 86 von O aus eine Normale OK auf TS, und verbinden darauf R mit K. Hierdurch ist der Neigungswinkel (OKR $= \alpha$) unserer Ebene Gl. 9 mit der XY-Ebene bestimmt, und wir können seinen Werth ausdrücken durch die Gleichung

$$10)\quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{OR}{OK}.$$

Es handelt sich also nur noch darum, die Werthe von OR und OK aus der Gleichung unserer Ebene (Gl. 9) zu berechnen, und dieselbe in Gleichung 10 einzusetzen.

Nun ist OR derjenige Werth von w, der sich ergiebt, wenn in Gl. 9 u und v gleich Null gesetzt werden. Demnach ist

$$11)\quad OR = C.$$

Um OK zu erhalten, bestimmen wir zunächst die Gleichung der Graden TS (der Durchschnittslinie unserer Ebene (Gl. 9) mit der XY-Ebene). Wir erhalten die Gleichung dieser Graden aus Gleichung 9 dadurch, dass wir $w = 0$ setzen. Dies giebt

$$12)\quad 0 = A\,u + B\,v + C$$

$$13)\quad v = -\frac{A}{B}\,u - \frac{C}{B}.$$

Hieraus folgt

$$14)\quad \operatorname{tg} OST = -\frac{A}{B}.$$

Nun ist

$$15)\quad OK = OS \,.\, \sin OST$$

$$16)\quad OK = OS \,.\, \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 OST}{1 + \operatorname{tg}^2 OST}}.$$

Der Werth von OS ergiebt sich als Werth von u, wenn man in Gleichung 9, w und v gleich 0 setzt. Demnach ist

$$17)\ OS = -\frac{C}{A}.$$

Setzen wir die Werthe von OS und tg OST nach den Gleichungen 17 und 14 in Gleichung 16 ein, so folgt

$$18)\ OK = +\frac{C}{A}\sqrt{\frac{\frac{A^2}{B^2}}{1+\frac{A^2}{B^2}}} = +\frac{C}{A}\sqrt{\frac{A^2}{A^2B^2}}$$

$$19)\ OK = \frac{C}{AB}.$$

Setzen wir nun die Werthe von OR und OK nach den Gleichungen 11 und 19 in Gleichung 10 ein, so folgt

$$20)\ tg\,\alpha = \frac{C}{\frac{C}{AB}} = AB.$$

3. Dem Vorstehenden liegt stillschweigend die Voraussetzung zu Grunde, dass in Gl. 1 denselben Werthen von x und y nur ein Werth von z entspricht. — Wie ändert sich die Sache, wenn denselben Werthen von x und y zwei oder mehrere Werthe von z entsprechen?

§. 92.

Fortsetzung.

Aufgabe. Eine Halbkugel ist durch die Gleichung

$$1)\ z = +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

gegeben. Man soll nach Anleitung des vorigen Paragraphen ihre Oberfläche berechnen.

Auflösung. Aus Gleichung 1 folgt zunächst

$$2)\ \frac{\partial z}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

$$3)\ \frac{\partial z}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

Setzen wir nach den Gleichungen 2 und 3 die Werthe von $\frac{\partial y}{dx}$ und $\frac{\partial z}{dy}$ in Gleichung 7, Seite 238, ein, so folgt

$$4)\ \frac{\partial^2 O}{dx\,.\,dy}\,.\,dx\,.\,dy = \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{r^2-x^2-y^2}}\,.\,dx\,.\,dy.$$

$$5)\ \frac{\partial^2 O}{dx\,.\,dy}\,.\,dx\,.\,dy = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\,.\,dx\,.\,dy.$$

Hieraus folgt

$$6)\ O = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\,.\,dy.$$

Um die Werthe der Grenzen in Gleichung 6 zu ermitteln, beachte man, dass die Projection unserer Halbkugel ein Kreis ist, welcher der Gleichung

$$7)\ y^2+x^2=r^2$$

entspricht.

Hieraus folgt, dass

$$8)\ y_0 = -\sqrt{r^2-x^2} \text{ und } y_1 = +\sqrt{r^2-x^2}$$

$$9)\ x_0 = -r \qquad\qquad x_1 = +r.$$

Setzen wir nun nach den Gleichungen 8 und 9 für x_0, x_1, y_0 und y_1 ihre Werthe in Gleichung 6 ein, so folgt

$$10)\ O = \int_{-r}^{+r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\,dy.$$

Hieraus folgt nach Gl. 5, Seite 78

$$11)\ O = \int_{-r}^{+r} 2r\,.\,\frac{\pi}{2}\,dx = 2r^2\,\pi.$$

In Gleichung 11 bedeutet O die halbe Kugelfläche, demnach ist die ganze Kugelfläche $= 4\,r^2\,\pi$, — **ein Resultat, welches schon aus der Stereometrie bekannt ist.** —

Lässt sich dies Resultat nach der Lösung von Aufgabe 2, Seite 232, prüfen?

X. Capitel.

Differential-Gleichungen.

§. 93.

Begriffs-Erklärungen. Differential-Gleichungen und deren Auflösungen.

Jede Gleichung, in welcher Differentiale von variablen Grössen (x und y) oder deren Differential-Quotienten vorkommen, heisst eine Differential-Gleichung dieser Variabeln; so z. B. sind die folgenden Gleichungen 1 bis 3 Differential-Gleichungen oder Variabeln x und y.

$$1)\ \frac{dy}{dx} = a \quad \text{oder } dy = a\,dx$$

$$2)\ y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a \quad \text{oder } y \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\,dx$$

$$3)\ x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x^2 \quad \text{oder } x \cdot d^2y - dx \cdot dy = x^2\,dx^2.$$

Durch eine Differential-Gleichung zwischen den Variabeln x und y sind dieselben offenbar in eine gegenseitige Abhängigkeit gebracht. Man kann demnach die Aufgabe stellen: **durch eine neue Gleichung zwischen x und y allein** — d. h. mit Vermeidung der Differentiale oder Differential-Quotienten — **diejenige Beziehung zwischen diesen Variabeln x und y auszudrücken, welche nach der gegebenen Differential-Gleichung zwischen ihnen Statt findet.** Diese neue Gleichung nennt man die **Auflösung der gegebenen Differential-Gleichung.**

§. 94.

Fortsetzung.

Die Auflösung einer gegebenen Differential - Gleichung nennt man häufig deren **primitive Gleichung** oder deren **Integral-Gleichung.** Der Benennung „**primitive Gleichung**" liegt der Gedanke zu Grunde, dass die gegebene Differential-Gleichung durch Differentiation (und andere analytische Operationen) aus ihrer Auflösung abgeleitet ist.

Nach dieser Auffassung sieht man also die Auflösung einer gegebenen Differential-Gleichung als das Ursprüngliche an, aus welchem die Differential-Gleichung durch Differentiation etc. abgeleitet ist, so z. B. ist die Gleichung

1) $y^2 = x^2 + 2$

die Auflösung der Differential-Gleichung

2) $\frac{dy}{x} - \frac{dx}{y} = 0.$

Sehen wir nun Gleichung 1 als die ursprüngliche (primitive) Gleichung an, und differentiiren wir dieselbe, so folgt

3) $2\,y\,dz = 2\,x\,dx.$

Hieraus folgt weiter

4) $y\,dz - x\,dx = 0$

5) $\frac{dz}{x} - \frac{dx}{z} = 0.$

Es kann demnach Gleichung 2 resp. 5 aus Gleichung 1 abgeleitet werden, so dass wir Gleichung 1 in Beziehung zu Gleichung 2 resp. 5 als die primitive Gleichung ansehen können.

Oben wurde schon gesagt, dass man die Auflösung einer Differential-Gleichung auch deren **Integral-Gleichung** nennt. Dieser Benennung liegt die Voraussetzung zu Grunde, **dass**

die Auflösung einer gegebenen Differential-Gleichung durch Integration erfolgt sei.

Hierzu ist jedoch zu bemerken, dass man in manchen Fällen auch ohne Integration aus einer gegebenen Differential-Gleichung die Differentiale oder Differential-Quotienten entfernen kann. Die Auflösung, die man auf diesem Wege erhält, nennt man im Gegensatze zu der Integral-Gleichung die **besondere Auflösung** der gegebenen Differential-Gleichung.

§. 95.

Eintheilung der Differential-Gleichungen.

Man theilt die Differential-Gleichungen in verschiedene **Ordnungen** nach der **Ordnungs-Zahl**, welche die Ordnung des höchsten Differentials resp. des höchsten Differential-Quotienten angiebt, der in einem Differential vorkommt, und zwar heisst eine Differential-Gleichung, in welcher nur Differentiale resp. Differential-Quotienten der **ersten Ordnung** vorkommen, eine **Differential-Gleichung der ersten Ordnung.**

Eine Differential-Gleichung, in welcher die **höchste Ordnung** der vorkommenden Differentiale oder Differential-Quotienten die zweite Ordnung ist, heisst eine **Differential-Gleichung der zweiten Ordnung.**

In ähnlicher Weise findet die Eintheilung weiter Statt; ist demnach allgemein **n die höchste Ordnungzahl** für die Differentiale resp. Differential-Quotienten, welche in einer Differential-Gleichung vorkommen, so ist die Differential-Gleichung eine **Differential-Gleichung n^{ter} Ordnung.**

Hiernach ergeben sich die Ordnungen der Differential-Gleichungen 1 bis 7, wie sie daneben bemerkt sind.

$$1)\quad (3y^2 + bx^2)\,dy + (12\,xy + bx^2)\,dx = 0$$

$$2)\quad (3y^2 + bx^2)\frac{dy}{dx} + (12\,xy + bx^2) = 0$$

$$3)\quad y^2 - ax \, . \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = o$$

$$4)\quad y \, . \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a$$

$$5)\quad dy + by^2\,dx = ax^m\,dx$$

(1–5) Differential-Gleichungen erster Ordnung.

$$6)\quad H\frac{d^2y}{dx^2} = G \, . \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$7)\quad \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = a$$

(6–7) Differential-Gleichungen zweiter Ordnung.

$$8)\quad \frac{d^ny}{dx^n} + P \, . \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q \, . \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots U = 0$$

(8) Differential-Gleichung der n^{ten} Ordnung.

Man theilt die Differential-Gleichungen ferner noch ein nach den Potenzen der Differentiale der abhängigen Variablen.

Eine Differential-Gleichung, in welcher die Differentiale der **abhängigen** Variablen nur in der ersten Potenz vorkommen, heisst eine **Differential-Gleichung ersten Grades.**

Eine Differential-Gleichung, in welcher die höchste Potenz von Differentialen der abhängig veränderlichen Grössen die zweite Potenz ist, heisst eine **Differential-Gleichung des zweiten Grades.**

Eine Differential-Gleichung, in welcher die höchste Potenz von Differentialen der abhängig veränderlichen Grösse die n^{te} Potenz ist, heisst eine **Differental-Gleichung des n^{ten} Grades.**

Hiernach sind die obenstehenden Gleichungen 1, 2 und 5 Differential-Gleichungen **des ersten Grades** und der ersten Ordnung.

Die Gleichungen 3 und 4, Seite 245, sind Differential-Gleichungen erster Ordnung **zweiten Grades.**

Aus der Gleichung 6, Seite 245, entsteht die Gleichung

$$8)\ H^2.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = G^2\left(1+\left(\frac{d^2y}{dx}\right)^2\right).$$

Diese Gleichung ist demnach eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung und zweiten Grades.

§. 96.

Die Constanten in der Integral-Gleichung.

Es liegt auf der Hand (nach Seite 2), dass die Integral-Gleichung, welche einer gegebenen Differential-Gleichung entspricht, eben so viel **Integrations-Constanten** enthalten muss, als die Anzahl der Integrationen ist, welche nöthig war, um aus der gegebenen Differential-Gleichung die zugehörige Integral-Gleichung zu erhalten.

Wegen der Unbestimmtheit dieser Integrations-Constanten wird demnach auch die Integral-Gleichung in dieser Beziehung unbestimmt bleiben.

Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, nehmen wir an, es sei gegeben:

$$1)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Hieraus folgt

$$2)\ dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}\,.\,dx$$

$$3)\ y \ = a^{1/2}x^{1/2} + C.$$

In Gleichung 3 kann C jeden beliebigen **constanten** Werth haben. (Vergl. Seite 2.) Es folgt also, dass die Beziehung zwischen x und y, welche durch die Differential-Gleichung 1 ausgedrückt wird, **nicht vollkommen bestimmt ist;** dass sie

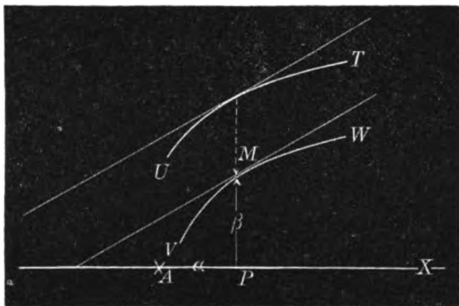
vielmehr **erst dann bestimmt ist, wenn wir in Gleichung 3 für C einen ganz bestimmten Werth setzen.**

Man kann das Vorstehende auf geometrischem Wege erläutern, wenn man annimmt, dass x und y die rechtwinkligen Coordinaten einer Curve seien. In diesem Falle ist (D. R., Seite 32) $\frac{dy}{dx}$ gleich der trigonometrischen Tangente desjenigen Winkels (γ), den die Berührende mit der Abscissen-Achse bildet. Es folgt demnach aus Gleichung 1

$$4)\quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Hierdurch ist also die Richtung unserer Curve für jeden Werth von x bestimmt. Weil aber auch **weiter Nichts** aus Gleichung 1, resp. 4, folgt, so ist klar, dass man **unzählig viele Curven** (wie VW und UV, Fig. 87) zeichnen kann, die der Gleichung 1, resp. 4, genügen. **Alle diese Curven stimmen darin überein, dass für jeden Werth von x, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$ ist.**

Fig. 87.



Stellen wir aber die Forderung, dass eine Curve **nicht allein** der Gleichung 1, resp. 4 genüge, **sondern auch,** dass für einen bestimmten Werth von x, ebenfalls y einen bestimmten Werth habe, etwa **dass $y = \beta$ sei, wenn $x = \alpha$ ist,** d. h. dass die Curve durch einen bestimmten Punkt (M Fig. 87) gehe, so ist hierdurch die Curve vollkommen bestimmt.

Durch die Bedingung, **dass $y = \beta$ sei, wenn $x = \alpha$ ist,** wird die Constante in Gleichung 3 bestimmt. Wir erhalten hierdurch aus Gl. 3 ohne Weiteres

5) $\beta = a^{1/2} \alpha^{1/2} + C$ oder

6) $C = \beta - a^{1/2} \alpha^{1/2}$.

Schalten wir diesen Werth von C in Gleichung 3 ein, so folgt

7) $y = a^{1/2} x^{1/2} - a^{1/2} \alpha^{1/2} + \beta$

8) $y - \beta = a^{1/2} x^{1/2} - a^{1/2} \alpha^{1/2}$.

Aus dieser Gleichung ist jede Unbestimmtheit beseitigt, und man erkennt leicht, dass sie die Curve darstellt, welche der Gleichung 1 resp. 4 entspricht, und welche ausserdem noch durch den Punkt M ($x = \alpha$, $y = \beta$) geht.

§. 97.

Einige Bemerkungen über die Anwendungen der Auflösungen von Differential-Gleichungen.

Um den Leser schon hier auf den Nutzen hinzuweisen, den die Auflösung von Differential-Gleichungen gewährt, bemerken wir, dass es sehr häufig vorkommt, dass die Beziehungen zwischen variablen Grössen (x und y) durch Differential-Gleichungen ausgedrückt sind, z. B. in der Geometrie, der Mechanik etc. Will man hieraus Gleichungen zwischen den Variabeln (x und y) **allein** — d. h. mit Vermeidung der Differentiale oder Differential-Quotienten — entwickeln, so muss man die gegebenen Differential-Gleichungen auflösen.

Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir annehmen, dass die Gleichung einer Curve aufgestellt werden solle, deren **Subnormale constant**, etwa gleich a sei.

In diesem Falle muss die Curve zunächst folgender Gleichung genügen

1) $Sn = a$.

Nun ist nach D. R., Seite 128, Gleichung 7

2) $Sn = y \cdot \frac{dy}{dx}$.

Der Ausdruck für Sn in Gl. 2 gilt für **alle Curven**, welche auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System bezogen sind. Sie gilt demnach auch für unsere Curve (Gl. 1) — von welcher wir vorläufig noch annehmen wollen, dass sie unbekannt sei —. Setzen wir nun den **allgemeinen** Werth von Sn nach Gl. 2 in Gl. 1 so folgt

$$3)\ y \cdot \frac{dy}{dx} = a.$$

Wenn also die Subnormale einer Curve für jeden Punkt derselben gleich a sein soll, so müssen die Coordinaten (x, y) derselben der Differential-Gleichung 3 genügen. **Wir sehen also in unserm Beispiele, dass die Beziehungen zwischen den Coordinaten (x und y) unserer Curve durch eine Differential-Gleichung ausgedrückt sind.** Wollen wir hieraus die Gleichung der Curve ableiten, so müssen wir die Differential-Gleichung (3) auflösen. Zu dem Ende setzen wir nach Gl. 3.

$$4)\ y\,dy = a\,dx$$

$$5)\ \int y\,dy = \int a\,.\,dx$$

$$6)\ \frac{y^2}{2} = ax + C$$

$$7)\ y^2 = 2\,ax + C.$$

Wenn also eine Curve so beschaffen sein soll, dass für jeden Punkt derselben die Subnormale **denselben** Werth (a) habe, so muss sie der Gleichung 7 genügen. Diese Gleichung ist offenbar die Gleichung einer Parabel, deren geometrische Achse mis der Abscissen-Achse zusammenfällt, deren Parameter gleich 2a ist, und deren Scheitelpunkt **irgendwo auf der Abscissen-Achse** liegt. (Vergl. D. R. Seite 131.)

Bemerkung. Wenn für C ein bestimmter Werth gesetzt wird, so ist dadurch die Lage des Scheitelpunktes und damit die Parabel **vollkommen** bestimmt. (Vergl. Bemerk. Seite 2, so wie §. 96, Seite 246 ff.)

§. 98.

Integration der Differential-Gleichungen erster Ordnung ersten Grades durch Trennung der Veränderlichen. — Differential-Gleichungen von der Form $X . Y . dx + X' Y' dy = 0$. — Aufgaben.

Eine Differential-Gleichung erster Ordnung ersten Grades, z. B. die Differential-Gleichung

$$x y dy = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 y^4} dx - x^3 y dy$$

lässt sich stets auf die Form

$$1) \quad M dx + N dy = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{hier sind M und N im Allgemeinen} \\ \text{wieder Functionen von x und y.} \end{array} \right.$$

bringen. Will man eine solche Differential-Gleichung auflösen, so ist es am einfachsten, sie auf die Form

$$2) \quad X dx = Y dy \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{hier ist X irgend eine Function von x} \\ \text{allein und Y eine Function von y allein} \end{array} \right.$$

zu bringen. **Wenn dies gelingt,** so ist die Auflösung der Differential-Gleichung auf die gewöhnliche Integration zurückgeführt, und es wird sich dann nur noch darum handeln, **die Integrale $\int X dx$ und $\int Y dy$ auszuführen.**

Die vorhin erwähnte Umformung von Gleichung 1 ist immer möglich, wenn M und N resp. gleich $X . Y$ und $X' . Y'$ sind, d. h., wenn die gegebene Differential-Gleichung sich auf die Form

$$3) \quad X . Y . dx + X' . Y' . dy = 0$$

bringen lässt, unter der Voraussetzung, dass die Grössen X und X' Functionen von x, und die Grössen Y und Y' Functionen von y sind.

In diesem Falle nämlich lassen sich die Variabeln leicht dadurch trennen, dass man die Gleichung 3 mit dem Factor $\frac{1}{Y . X'}$ multiplicirt.

Hierdurch entsteht aus Gleichung 3 resp. 1 die Gleichung

4) $\frac{X}{X'} dx + \frac{Y'}{Y} dy = 0.$

5) $\frac{X}{X'} dx = -\frac{Y'}{Y} dy.$

Der Leser beachte wohl, dass X und X' Functionen von x und dass Y und Y' Functionen von y sind.

wodurch die Auflösung der Differential-Gleichung auf gewöhnliche Integration zurückgeführt ist.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

1) $y\,dx - x\,dy = 0$

auflösen.

Auflösung. Wir multipliciren Gleichung 1 mit dem Factor $\frac{1}{x \cdot y}$. Hierdurch entsteht die Gleichung

2) $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$

3) $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$

4) $l\,y = l\,x + l\,C$

5) $y = Cx.$

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

1) $x^3y\,dx + y\,dx + y^2x\,dy - x\,dy = 0$

integriren.

Auflösung. Wir geben der vorliegenden Differential-Gleichung (1) zunächst folgende Form

2) $(x^3 + 1) \cdot y\,dx + (y^2 - 1)\,x \cdot dy = 0.$

Hierdurch haben wir offenbar die Form von Gl. 3, Seite 250, hergestellt. Multipliciren wir Gleichung 2 mit dem Factor $\frac{1}{y \cdot x}$, so erhalten wir die Gleichung

3) $\frac{x^3 + 1}{x} dx + \frac{y^2 - 1}{y} dy = 0$

$$4)\ \frac{y^2-1}{y}\,dy = -\frac{x^3+1}{x}\,dx$$

$$5)\ \int\frac{y^2-1}{y}\,dy = \int\frac{x^3+1}{x}\,dx.$$

Hieraus folgt durch Ausführung der Integration

$$6)\ \frac{y^2}{2} - l\,y = \frac{x^3}{3} + lx + C.$$

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Function

$$1)\ x\,y\,dy + x^3\,y\,dy - \sqrt{x^2\,y^2 - x^2\,y^4}\,dx = 0$$

integriren.

Auflösung. Durch einfache Umformungen erhalten wir aus der vorliegenden Differential-Gleichung (1) folgende Gleichungen

$$2)\ y\,(x + x^3)\,dy = x\sqrt{y^2 - y^4}\,dx.$$

Wenn wir diese Gleichung nach Seite 250 mit dem Factor $\frac{1}{(x+x^3)\,.\,\sqrt{y^2-y^4}}$ multipliciren, so folgt

$$3)\ \frac{y\,.\,(x+x^3)\,dy}{(x+x^3)\,.\,\sqrt{y^2-y^4}} = \frac{x\sqrt{y^2-y^9}\,dx}{(x+x^3)\,.\,\sqrt{y^2-y^4}}$$

$$4)\ \frac{y\,.\,dy}{\sqrt{y^2-y^4}} = \frac{x\,.\,dx}{x+x^3}$$

$$5)\ \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{1+x^2}$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Integration

$$6)\ \text{arc sin}\,y = \text{arc tg}\,x + C,\ \text{oder}$$

$$7)\ \text{arc sin}\,y - \text{arc tg}\,x - C = 0.$$

§. 99.

Fortsetzung. — Homogene Differential-Gleichungen. — Aufgaben.

Differential-Gleichungen, in denen die Summe der Exponenten der Veränderlichen in jedem Gliede dieselbe ist, heissen **homogene Differential-Gleichungen, so z. B. sind die Gleichungen**

$$1)\quad x^2\,dx + x\,y\,dy + y^2\,dx = 0$$

$$2)\quad x\,dx + y\,dx + y\,dy - x\,dy = 0$$

homogene Differential-Gleichungen. In der ersten Gleichung ist die Summe der Exponenten der Veränderlichen **in jedem Gliede** gleich 2, in Gleichung 2 dagegen ist diese Summe gleich 1.

Bei homogenen Differential-Gleichungen lässt sich die Trennung der Variabeln immer dadurch ausführen, dass man setzt

3) **entweder** $x = u\,y$ **oder** $y = u\,x$.

Diese lässt sich leicht allgemein beweisen, indessen ziehen wir vor, es an einigen speciellen Beispielen zu zeigen, und überlassen dem geübteren Leser, den allgemeinen Beweis selbst zu erfinden. (Vergl. Seite 250.)

Aufgabe 1. Man soll die Differential-Gleichung

$$1)\quad x^2\,dx + x\,y\,dy + y^2\,dx = 0$$

integriren.

Auflösung. Die vorliegende Differential-Gleichung (1) ist eine **homogene Differential-Gleichung.** Wir setzen demnach in Gl. 1

2) $y = u\,x$. } **Vergl. Bemerkung 1.**

Hieraus folgt

$$3)\quad dy = u\,dx + x\,du.$$

Setzen wir nach den Gleichungen 2 und 3 die Werthe von y und dy in Gleichung 1 ein, so ergiebt sich

4) $x^2\,dy + u\,x^2\,(u\,dx + x\,du) + u^2\,x^2\,dx = 0$

5) $x^2\,dx + 2\,u^2\,x^2\,dx + u\,x^3\,du \qquad = 0.$

Dividiren wir durch x^2, so folgt weiter

6) $(1 + 2\,u^2)\,dx + u\,x\,du = 0$

7) $\frac{dx}{x} = -\frac{u\,du}{1 + 2\,u^2}$. $\left\{\right.$ folgt aus Gl. 6 durch Multiplication mit $\frac{1}{x\,.\,(1 + 2\,u^2)}$.

Hieraus folgt durch Integration

8) $l x = -\frac{1}{4}\,l\,(1 + 2\,u^2) + l\,C.$

Setzen wir hierin für u seinen Werth nach Gl. 2, so folgt

9) $l x = -\frac{1}{4}\,l\left(1 + 2\,\frac{y^2}{x^2}\right) + l\,C.$

10) $l\,x + \frac{1}{4}\,l\left(\frac{x^2 + 2y^2}{x^2}\right) = l\,C.$

11) $l\,x + \frac{1}{4}\,l\,(x^2 + 2\,y^2) - \frac{1}{2}\,l\,x = l\,C.$

12) $l\,x + \frac{1}{2}\,l\,(x^2 + 2\,y^2) = 2\,l\,C.$

13) $l\,\{x\sqrt{x^2 + 2\,y^2}\} = l\,C^2.$

14) $x\,.\,\sqrt{x^2 + 2\,y^2} = C^2.$

Bemerkungen.

1. Man hätte die Auflösung unserer Aufgabe auch dadurch einleiten können, dass man gesetzt hätte

15) $x = u\,y;\; dx = u\,dy + y\,du.$

Setzen wir hiernach die Werthe von x und dx in Gleichung 1 ein, so folgt

16) $u^2\,y^2\,(u\,dy + y\,du) + u\,y^2\,dy + y^2\,(u\,dy + y\,du) = 0.$

17) $u^3\,y^2\,dy + u^2\,y^3\,du + u\,y^2\,dy + y^2\,u\,dy + y^3\,du = 0.$

18) $u^3\,dy + u^2\,y\,du + u\,dy + u\,dy + y\,du = 0.$

19) $(u^3 + 2u)\,dy + (u^2\,y + y)\,du = 0.$

20) $(u^3 + 2u)\,dy = -(1 + u^2)\,y\,du.$

21) $\frac{dy}{y} = -\frac{1 + u^2}{u^3 + 2u}\,du.$

Zerlegen wir die rechte Seite von Gl. 21 in Partial-Brüche nach Capitel II., Seite 33 ff., so folgt

$$22)\ \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{du}{u} + \frac{u\,du}{2+u^2}\right\}.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$23)\ ly = -\frac{1}{2}\left\{\ lu + \frac{1}{2}\,l(2+u^2\right\} + lC.$$

Setzen wir hier den Werth von u nach Gleichung 15, so folgt

$$24)\ ly = -\frac{1}{2}\left\{\ l\,\frac{x}{y} + \frac{1}{2}\,l\left(2+\frac{x^2}{y^2}\right)\right\} + l\,C.$$

$$25)\ ly + \frac{1}{2}\,l\,\frac{x}{y}\sqrt{2+\frac{x^2}{y^2}} = l\,C.$$

$$26)\ 2\,ly + l\frac{x}{y}\sqrt{2+\frac{x^2}{y^2}} = 2\,l\,C.$$

$$27)\ l\,y^2.\frac{x}{y}\sqrt{2+\frac{x^2}{y^2}} = 2\,l\,C.$$

$$28)\ l\,x\,\sqrt{2\,y^2+x^2} = 2\,l\,C.$$

$$29)\ x.\sqrt{2\,y^2+x^2} = C^2.$$ | Vergl. Gl. 14, Seite 254.

2. Man sieht, dass die erste Auflösung weniger Rechenschwierigkeit macht, als die zweite Auflösung. — Dies rührt daher, dass in Gleichung 1 dx zwei mal vorkommt, während dy nur einmal darin enthalten ist.

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$1)\ x\,dx + y\,dx + y\,dy - x\,dy = 0$$

auflösen.

Auflösung. Die vorliegende Differential-Gleichung ist eine **homogene Differential-Gleichung.** Wir setzen demnach

$$2)\ y = u\,x;\ dy = u\,dx\,u\,du.$$

Setzen wir nach Gl. 2 die Werthe von y und dy in Gl. 1 ein, so folgt

$$3)\ x\,dx + u\,x\,dx + u\,x\,(u\,dx + x\,du) - x(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$4)\ (x + u\,x + u^2x - u\,x)\,dx + (u\,x^2 - x^2)\,du = 0$$

$$5)\ x\,(1+u^2)\,dx + (u-1)\,x^2\,du = 0.$$

Dividiren wir diese Gleichung durch x, so folgt weiter

$$6)\ (1+u^2)\,dx + (u-1)\,.\,x\,.\,du = 0$$

$$7)\ \frac{dx}{x} = \frac{1-u}{1+u^2}\,du$$

$$8)\ l\,x = \operatorname{arc\,tg} u - \frac{1}{2}\,l\,(1 + u^2) + l\,C.$$

Setzen wir in Gl. 8 den Werth von u nach Gl. 2, so folgt

$$9)\ l\,x = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\,l\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + l\,C.$$

$$10)\ l\,x + l\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + l\,C.$$

$$11)\ l\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + l\,C.$$

$$12)\ l(c.\sqrt{x^2 + y^2}) = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

Der Umwandlung von Gl. 11 in Gl. 12 liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass $c = \frac{1}{C}$ also $lC = -lc$ ist.

$$13)\ c\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}}.$$

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

$$1)\ y\,dy + x\,dx + 2\,y\,dx = 0$$

auflösen.

Auflösung. Die vorliegende Differential-Gleichung ist **homogen.** Wir setzen deshalb

$$2)\ y = u\,x,\ dy = u\,dx + x\,du.$$

Hieraus folgt

$$3)\ u\,x\,(u\,dx + x\,du) + x\,dx + 2\,u\,x\,dx$$

$$4)\ u^2\,dx + u\,x\,du + dx + 2\,u\,dx$$

$$5)\ (u^2 + 2\,u + 1)\,dx = -\,u\,x\,du$$

$$6)\ \frac{dx}{x} = -\,\frac{u\,du}{u^2 + 2\,u + 1}$$

$$7)\ \frac{dx}{x} = -\,\frac{u\,du}{(u + 1)^2}$$

Integriren wir beide Seiten von Gl. 7, so folgt

$$8)\ l\,x = -\,l\,(u + 1) - \frac{1}{u + 1} + c.$$

Setzen wir hierin nach Gl. 2 den Werth von u ein, so folgt

$$9)\ l\mathrm{x} = -l\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}+1\right) - l\mathrm{C} - \frac{1}{\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}+1}$$ Hier ist $l\,\mathrm{C} = \mathrm{c}$ gesetzt.

$$10)\ l\,\mathrm{C}(\mathrm{y}+\mathrm{x}) = -\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}+\mathrm{x}}$$

$$11)\ \mathrm{C}.(\mathrm{y}+\mathrm{x}) = e^{-\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}+\mathrm{x}}} = \frac{1}{e^{\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}+\mathrm{x}}}}.$$

§. 100.

Fortsetzung. — Einige andere Fälle, in denen man die Trennung der Veränderlichen ausführen kann. — Aufgaben.

Ausser in den vorhin angeführten Fällen lässt sich die Trennung der Variabeln noch durch passende Substitutionen bewerkstelligen; indessen lässt sich keine allgemeine Regel hierfür aufstellen. Es kommt hier vor allen Dingen auf **grosse Fertigkeit in den arithmetischen Operationen an.**

Ist z. B. eine Differential-Gleichung von der Form

$$1)\ \mathrm{dy} + f\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right)\mathrm{dx} = 0$$

gegeben, so setze man wie bei den homogenen Differential-Gleichungen *)

$$2)\ \mathrm{y} = \mathrm{u\,x},\ \mathrm{dy} = \mathrm{u\,dx} + \mathrm{x\,du}.$$

Hieraus folgt

$$3)\ \mathrm{u\,dx} + \mathrm{x\,du} + f\mathrm{u}.\mathrm{dx} = 0$$

$$4)\ \mathrm{x\,du} = -(\mathrm{u} + f\mathrm{u}).\mathrm{dx}$$

$$5)\ \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{u}+f\mathrm{u}} = -\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}.$$

*) Der aufmerksame Leser wird bemerken, dass Gl. 1 eine Form hat, auf welche sich auch die homogenen Differential-Gleichungen bringen lassen.

Hierdurch ist also die Trennung der Variabeln erreicht, und es käme nur noch darauf an, die Integration von Gl. 5 auszuführen.

Aufgabe. Man soll die Differential-Gleichung

$$1)\quad dy - \left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right) dx = 0$$

integriren.

Auflösung. Die vorliegende Differential-Gleichung hat die Form von Gleichung 1, Seite 257. Wir setzen demnach

$$2)\quad y = u\,x,\; d\,y = u\,dx + x\,du.$$

Setzen wir diese Werthe von y und dy in Gleichung 1 ein, so folgt

$$3)\quad u\,dx + x\,du - (u + \sqrt{1 + u^2})\,dx = 0$$

$$4)\quad x\,du = \sqrt{1 + u^2}\,.\,dx$$

$$5)\quad \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{dy}.$$

Hiermit ist die Trennung der Variabeln erreicht. Integriren wir nun beide Seiten von Gl. 5, so folgt (Gl. 10, Seite 82)

$$6)\quad l\,\{\sqrt{1 + u^2} + u\} = l\,x + l\,C.$$

Setzen wir in Gl. 6 den Werth von u nach Gl. 2, so folgt weiter

$$7)\quad l\left\{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}\right\} = l\,Cx$$

$$8)\quad \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{x}{y} = Cx$$

$$9)\quad \sqrt{y^2 + x^2} + y = Cx^2.$$

Bemerkung. Statt der Gleichung 9 hätte man auch schreiben können

$$10)\quad y = \frac{1 - C^2x^2}{2\,C}.$$

Wie lässt sich Gleichung 10 aus Gleichung 9 ableiten?

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

$$1)\ a\,dx = (y - x)\,dy$$

integriren.

Auflösung. Die Trennung der Variabeln gelingt, wenn wir setzen

$$2)\ y - x = u,\ dx = dy - du.$$

Substituiren wir dann nach Gleichung 2 die Werthe von $y - x$ und dx in Gleichung 1 ein, so folgt

$$3)\ a(dy - du) = u\,dy$$

$$4)\ a\,du = (a - u)\,dy$$

$$5)\ \frac{du}{a - u} = \frac{dy}{a}$$

$$6)\ l(a - u) = \frac{y}{a} + C.$$

Setzen wir in Gl. 6 den Werth von u nach Gleichung 2, so folgt

$$7)\ -l(a + x - y) = \frac{y}{a} + C.$$

$$8)\ y + aC + a\,l(a + x - y) = 0.$$

§. 101.

Auflösung der Differential-Gleichung erster Ordnung ersten Grades durch unmittelbare Integration.

Wenn man die Differential-Gleichung

$$1)\ M\,dx + N\,dy = 0$$ hier sind M und N im Allgemeinen wieder Functionen von x und y.

nicht nach den vorstehenden Methoden auflösen kann, und wenn ausserdem

$$2)\ M = \frac{\partial f(x, y)}{dx};\ N = \frac{\partial f(x, y)}{dy},$$

so lässt sich die vorliegende Differential-Gleichung (1) oft durch die Methode der unmittelbaren Integration auflösen.

In diesem Falle ist nämlich die linke Seite von Gl. 1 das vollständige Differential der Function f(x, y) oder es ist

3) $M\,dx + N\,dy = d\,f(x, y)$.

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir also ohne Weiteres

4) $f(x, y) + C = 0$

als Integral-Gleichung, welche der Differential-Gleichung 1 entspricht.

§. 102.

Fortsetzung.

Wollen wir die Betrachtungen des vorigen §. zur Auflösung einer Differential-Gleichung von der Form

1) $M\,dx + N\,dy = 0$ { Hier bedeuten M und N im Allgemeinen beliebige Functionen von x und y.

anwenden, so würde es sich also um zweierlei handeln.

I. **zu untersuchen, ob der Ausdruck $M\,dx + N\,dy$ ein vollständiges Differential irgend einer Function von x und y ist** und

II. wenn dies constatirt ist, **diese Function von x und y zu ermitteln.**

Existirt wirklich eine Function von x und y, deren vollständiges Differential gleich $M\,dx + N\,dy$ ist, und bezeichnen wir dieselbe durch das Symbol f(x, y), so folgt schon aus §. 101, dass

2) $\frac{\partial\, d\,(x, y)}{dx} = M, \ \frac{\partial\, f\,(x, y)}{dy} = N$ ist.

Nach D. R. Seite 230, Gl. 6, ist aber

3) $$\frac{\partial \frac{\partial f(x, y)}{dx}}{dy} = \frac{\partial \frac{\partial f(x, y)}{dy}}{dx}.$$

Aus den Gleichungen 2 und 3 folgt also, dass M dx + N dy (Gl. 1) **ein vollständiges Differential ist, wenn**

$$4)\ \frac{\partial M}{dy} = \frac{\partial N}{dx}.$$

Wenn also die Functionen M und N der Gleichung 4 genügen, so giebt es eine Function $\{f(x,y)\}$, deren vollständiges Differential gleich der linken Seite von Gl. 1 ist, und es ist nach Gl. 2

$$5)\ M\,dx = \frac{\partial f(x,y)}{dx}\,dx.$$

Setzen wir Gl. 5 von rückwärts und integriren wir beide Seiten dieser Gleichung, **so als ob in den Functionen f(x, y) und M, x allein variabel sei,** dann ergiebt sich

$$6)\ f(x,y) = {}_x\!\int M\,dx + Y.$$

{ Das Symbol $_x\!\int M\,dx$ bedeutet, dass bei der Integratione alle Grössen ausser x wie constante Grössen behandelt sind.

In dieser Gleichung bedeutet Y eine Grösse, welche die Integrations-Constante vertritt. Weil nun bei der obigen Integration y wie eine constante Grösse behandelt ist, so kann in derselben sehr wohl y vorkommen, **demnach ist Y im Allgemeinen eine Function von y.**

Um Y näher zu bestimmen, differentiiren wir die Gleichung 6. Hierdurch erhalten wir

$$7)\ \frac{\partial f(x,y)}{dx}\,dx + \frac{\partial f(x,y)}{dy}\,dy = {}^{*)}M\,dx + \frac{\partial\ {}_x\!\int M\,dx}{dy}\,dy + dY.$$

Setzen wir in Gleichung 7 die Werthe von $\frac{\partial f(x,y)}{dx}\,.\,dx$ und $\frac{\partial f(x,y)}{dy}\,.\,dy$ nach Gl. 2, so folgt

---

*) Man beachte, dass nach Gl. 6, $\frac{\partial\ {}_x\!\int M\,dx}{dx}\,dx = M\,dx$ ist.

$$8)\quad M\,dx + N\,dy = M\,dx + \frac{\partial \int_x M\,.\,dx}{dy}\,dy + dY$$

$$9)\quad N\,dy = \frac{\partial \int_x M\,.\,dx}{dy}\,dy + dY$$

$$10)\quad dY = N\,dy - \frac{\partial \int_x M\,dx}{dy}\,dy.$$

$$11)\quad Y = {}_y\!\int\left(N\,dy - \frac{\partial \int_x M\,dx}{dy}\,dy\right).$$

Setzen wir nach Gleichung 11 den Werth von Y in Gl. 6 ein, so folgt

$$12)\quad f(x, y) = {}_x\!\int M\,dx + {}_y\!\int\left(N\,dy - \frac{\partial \int_x M\,dx}{dy}\,dy\right).$$

Da nun nach Gleichung 2 und 1

$$d\,f(x, y) = M\,dx + N\,dy = 0$$

so folgt aus Gleichung 12, dass

$$13)\quad {}_x\!\int M\,dx + {}_y\!\int\left(N\,dy - \frac{\partial \int_x M\,dx}{dy}\,dy\right) = 0$$

die Integral-Gleichung ist, welche der gegebenen Differential-Gleichung (1) entspricht.

§. 103.

Fortsetzung. Beispiel zur Erläuterung.

Aufgabe. Man soll die Integral-Gleichung ermitteln, welche der folgenden Differential-Gleichung entspricht.

$$1)\quad 3x^2 + (8xy)\,.\,dx + (4x^2 + 3y^2)\,dy = 0.$$

Auflösung. Zunächst untersuchen wir, ob die linke Seite unserer Gleichung 1 ein vollständiges Differential irgend einer Function von x und y ist. Zu dem Ende differentiiren wir den Factor von dx nach y, und den Factor von dy nach x. Hierdurch ergiebt sich

$$2)\ \frac{\partial(3x^2+8xy)}{dy}=8x$$

$$3)\ \frac{\partial(4x^2+3y^2)}{dx}=8x.$$

Aus den Gleichungen 2 und 3 folgt

$$4)\ \frac{\partial(3x^2+8xy)}{dy}=\frac{\partial(4x^2+3y^2)}{dx}$$

und hieraus folgt weiter, dass die linke Seite von Gl. 1 ein **vollständiges Differential** irgend einer (noch unbekannten) Function von x und y ist. Bezeichnen wir diese Function durch das Symbol „$f(x, y)$“, so folgt aus Gleichung 1 (vergl. Gl. 5 und 6, Seite 261)

$$5)\ f(x,y)={}_x\!\int(3x^2+8xy)\,dx+Y$$

$$6)\ f(x,y)=x^3+4x^2y+Y.$$

Differentiiren wir diese Gleichung nach x und y, so folgt

$$7)\ \partial_x f(x,y)+\partial_y f(x,y)=(3x^2+8xy)\,dx+4x^2dy+dY.$$

Weil aber die linke Seite von Gleichung 1 das vollständige Differential von $f(x, y)$ ist, so ist

$$8)\ \partial_x f(x,y)+\partial_y f(x,y)=(3x^2+8xy)\,dx+(4x^2=3y^2)\,dy.$$

Subtrahiren wir Gleichung 8 von Gleichung 7, so ergiebt sich weiter

$$9)\ 0\ \ =3y^2\,dy-dY$$

$$10)\ dY=3y^2\,dy.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$11)\ Y\ \ =y^3+C.$$

Setzen wir nach Gleichung 11 den Werth von y in Gleichung 6 ein, so folgt

12) $f(x, y) = x^3 + 4x^2y + y^3 + C.$

Berücksichtigen wir nun, dass f(x, y) diejenige Function ist, deren vollständiges Differential die linke Seite von Gleichung 1 ist, so ergiebt sich als **Integral-Gleichung** von Gl. 1 die Gleichung

13) $x^3 + 4x^2y + y^3 + C = 0.$

Bemerkungen.

1. Das Resultat in Gleichung 13 lässt sich sehr leicht durch Differentiation prüfen.

2. Von Gleichung 5 an hätten wir auch einen andern Weg zur Lösung unserer Aufgabe einschlagen können, dadurch dass wir statt der Gleichung 5 gesetzt hätten

$$f(x, y) = {}_y\int(4x^2 + 3y^2)\,dy + X.$$

Welchen Verlauf hätte unsere Aufgabe dann weiter genommen?

3. Veranlasst Seite 261 Gleichung 6 zu einer ähnlichen Bemerkung?

Aufgabe 2. Man soll die Differential-Gleichung

1) $(2ay + bx + m)\,dy + (4kx + by + n)\,.\,dx = 0$

integriren.

Auflösung. Differentiiren wir in der vorstehenden Differential-Gleichung den Factor von dy nach x und den Factor von dx nach y, so sind die beiden entstehenden Differential-Quotienten einander gleich; **mithin ist die linke Seite von Gleichung 1 ein vollständiges Differential irgend einer Function von x und y**, welche wir durch das Symbol „f (x, y)“ bezeichnen wollen.

Um nun die Function „f (x, y)“ zu bestimmen, setzen wir nach Gl. 5 und 6, Seite 261

2) $f(x, y) = {}_x\int(4kx + by + n)\,dx + Y.$

Hieraus folgt durch Integration

3) $f(x, y) = 2kx^2 + bxy + xn + Y.$

Differentiiren wir diese Gleichung nach x und y, so folgt

4) $\partial_x f(x,y)\,\partial_y f(x,y) = (4kx + by + n)\,dx + bx\,dy + dY.$

Weil nun die linke Seite von Gleichung 1 gleich dem vollständigen Differential von $f(x,y)$ ist, so ist

5) $\partial_x f(x,y) + \partial_y f(x,y) = (4kx + bx + n)dx + (2ay + bx + m)dy.$

Subtrahiren wir Gleichung 4 von Gl. 5, so folgt

6) $0 \quad = (2ay + m)\,dy - dY$

7) $dY = (2ay + m)\,dy.$

8) Hieraus folgt durch Integration

8) $Y \quad = ay^2 + my + C.$

Setzen wir diesen Werth von Y in Gl. 3 ein, so folgt

9) $f(x,y) = 2kx^2 + bxy + nx + ay^2 + my + C.$

Weil nun das vollständige Differential von $f(x,y)$ gleich der linken Seite von Gl. 1 ist, so ergiebt sich als **Integral-Gleichung von Gl. 1** die Gleichung

10) $2kx^2 + bxy + nx + ay^2 + my + C = 0$, oder

11) $ay^2 + 2kx^2 + bxy + my + nx + C = 0.$

Bemerkung. Die Richtigkeit des Resultates lässt sich durch Differentiation prüfen.

Aufgabe 3. Man soll die Differential-Gleichung

1) $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0$

integriren.

Auflösung. Durch eine einfache Umformung folgt aus Gleichung 1

2) $\dfrac{y}{x^2 + y^2}\,dx - y\,\dfrac{x}{x^2 + y^2}\,dx = 0.$

Nun ist ferner

$$3)\ \frac{\partial \frac{y}{x^2+y^2}}{dy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$4)\ \frac{\partial \frac{-x}{x^2+y^2}}{dx} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Aus den Gleichungen 3 und 4 folgt, **dass die linke Seite in Gleichung 2 und 1 das vollständige Differential irgend einer Function von x und y ist.** Bezeichnen wir diese Function wieder durch des Symbol „$f(x,y)$“, so erhalten wir nach Gl. 5 und 6, Seite 254

$$5)\ f(x,y) = {}_x\!\int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx + Y,$$

also nach Gleichung 5, Seite 17

$$6)\ f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + Y.$$

Differentiiren wir Gleichung 6 nach x und y, so folgt

$$7)\ \partial_x f(x,y) + \partial_y f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x\,dy}{x^2+y^2} + dY.$$

Weil das vollständige Differential von $f(x,y)$ gleich der linken Seite von Gl. 2 ist, so ist

$$8)\ \partial_x f(x,y) + \partial_y f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dx.$$

Subtrahiren wir Gleichung 8 von Gl. 7, so folgt

$$9)\ dY = 0.$$

Aus Gleichung 9 folgt

$$10)\ Y = C.$$

Setzen wir den Werth von Y nach Gl. 10 in Gl. 6 ein, so folgt

$$11)\ f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + C.$$

Das vollständige Differential von $f(x, y)$ ist nach Gl. 1 und 2 gleich Null; demnach folgt aus Gl. 11

12) $\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} + C = 0.$

Bemerkungen.

1. Um Gl. 12 eine einfachere Gestalt zu geben, setzen wir, $C = -c$, dann folgt

13) $\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} = c$

14) $\frac{x}{y} = \operatorname{tg} c.$

15) $y = x \cdot \operatorname{ctg} c.$

Nun ist ctg c offenbar wieder constant, setzen wir deshalb $\operatorname{ctg} c = C'$, so folgt aus Gl. 15

16) $y = C \cdot x.$

2. Zur Auflösung der gegebenen Differential-Gleichung 1 hätte man auch die Trennung der Variablen anwenden können. Zu dem Ende multipliciren wir Gl. 1 mit $x^2 + y^2$, und erhalten dadurch

17) $y\,dx = x\,dy$

18) $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

19) $l\,y = l\,x + l\,C$

20) $y = C\,x,$

ein Resultat, welches mit Gleichung 16 vollkommen übereinstimmt.

§. 104.

Fortsetzung. — Vom integrirenden Factor.

Wenn in der Differential-Gleichung

1) $M\,dx + N\,dy = 0$ { Man beachte, dass M und N im Allgemeinen Functionen von x und y sind.

die linke Seite kein vollständiges Differential ist, so kann man die vorliegende Differential-Gleichung (1) nicht mehr nach der Methode auflösen, welche in den vorstehenden Paragraphen 101 bis 103 gelehrt ist; indessen lässt sich doch immer eine Function von x und y denken, welche mit der linken Seite von Gl. 1 multiplicirt, dieselbe zu einem volltändigen Differential

macht. **Diese Function heisst der integrirende Factor der gegebenen Differential-Gleichung (1).**

Um dieses an einem speciellen Beispiele zu erläutern, wollen wir die Differential-Gleichung

$$2)\ y\,dx - x\,dy = 0$$

betrachten. In dieser Gleichung (2) ist die linke Seite kein vollständiges Differential. Multipliciren wir aber diese Gleichung mit dem Factor $\frac{1}{x^2}$, so entsteht die neue Gleichung

$$3)\ \frac{y\,dx}{x^2} - \frac{dy}{x} = 0.$$

In dieser Gleichung ist die linke Seite ein vollständiges Differential der Function $\frac{y}{x}$. **Demnach ist der Factor $\frac{1}{x^2}$ integrirender Factor der Differential-Gleichung 2.**

Wir wollen uns nun die Aufgabe stellen, eine allgemeine Methode zu finden, nach welcher man den integrirenden Factor einer gegebenen Differential-Gleichung, etwa der Gleichung 1, ermitteln kann. Bezeichnen wir diesen integrirenden Factor durch μ, und multipliciren wir Gl. 1 mit μ, so entsteht die Gleichung

$$4)\ \mu M\,dx + \mu\,.\,N\,.\,dy = 0.$$

Weil nun μ nach der Voraussetzung integrirender Factor von Gleichung 1 ist, so ist die linke Seite von Gl. 4 ein vollständiges Differential; mithin ist nach

$$5)\ \mu\frac{\partial M}{dy} + M\frac{\partial\mu}{dy} = \mu\frac{\partial N}{dx} + N\frac{\partial\mu}{dx}.$$

Könnte man aus dieser Gleichung unter allen Umständen μ ermitteln, so wäre es möglich, jede Differential-Gleichung erster Ordnung und ersten Grades auf gewöhnliche Integration zurückzuführen; indessen leuchtet ein, dass Gl. 5 im Allgemeinen schwieriger zu behandeln ist, als die gegebene Gleichung (1). Aus diesem Grunde lässt sich der integrirende Factor

nur unter bestimmten Voraussetzungen oder durch glückliche Versuche ermitteln. **Diese Versuche erfordern in der Regel eine grosse Gewandtheit in den arithmetischen Operationen.**

Bemerkung. Ein Vergleich mit Aufgabe 3, Seite 265 bis 267, zeigt, dass „$\frac{1}{x^2+y^2}$" ebenfalls ein integrirender Factor von Gl. 2 ist. Wir haben also für unsere Differential-Gleichung 2 integrirende Factoren nachgewiesen, und fügen noch hinzu, dass jede Differential-Gleichung im Allgemeinen unendlich viele integrirende Factoren hat.

§. 105.

Differential-Gleichungen erster Ordnung höhern Grades. Allgemeines.

Nach Seite 244 und 245 lässt sich eine Differential-Gleichung erster Ordnung höhern Grades stets auf folgende Form bringen

$$1)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P.\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \ldots . U\frac{dy}{dx} + T = 0.$$

Hier bedeuten die Coefficianten P.. U, T beliebige Functionen von x und y oder constante Grössen.

Denken wir uns Gl. 1 für $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, so erhalten wir n verschiedene Differential-Gleichungen erster Ordnung ersten Grades. Diese seien

$$2)\quad \frac{dy}{dx} = U_1$$

$$3)\quad \frac{dy}{dx} = U_2$$

$$\vdots$$

$$4)\quad \frac{dy}{dx} = U_n$$

Es versteht sich von selbst, dass $U_1, U_2 \ldots U$ Functionen von x und y oder constante Grössen sein können.

Werden die Gleichungen 2, 3...4 für x integrirt, und erhält man dadurch die Gleichungen

5) $\varphi(x,y)+c_1=0$

6) $\psi(x,y)+c_2=0$

. .

. .

. .

7) $\omega(x,y)+c_n=0$

so wird jede dieser Gleichungen 5, 6...7 der gegebenen Differential-Gleichung (1) entsprechen. Multipliciren wir diese Gleichungen 5, 6...7, so entsteht dadurch folgende Gleichung

8) $\{\varphi(x.y)+c_1\}.\{\psi(x,y)+c_2\}....\{\omega(x,y)+c_n\}=0.$

Diese Gleichung 8 ist die allgemeine Integral-Gleichung der gegebenen Differential-Gleichung (1).

Es leuchtet ein, dass die vorstehende Methode principiell ganz allgemein ist; indessen ist auch klar, dass ihrer Anwendung alle Schwierigkeiten entgegenstehen, welche mit der allgemeinen Lösung der algebraischen Gleichungen höheren Grades verbunden sind; und dass, wenn es wirklich gelingen sollte, aus Gl. 1 die n Wurzeln für $\frac{dy}{dx}$ zu bestimmen, es in der Regel nicht möglich ist, die Integrationen auszuführen, welche die hierdurch entstehenden Gleichungen (2, 3...4) erforden.

Aus diesem Grunde ist die oben gelehrte Methode nur in besonderen Fällen brauchbar zur Auflösung einer Differential-Gleichung von der Form der Gl. 1. In den folgenden Aufgaben werden wir einige von diesen besondern Fällen behandeln.

Aufgabe 1. Man soll die primitive Gleichung zu der folgenden Differential-Gleichung finden

1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=ax.$

Auflösung. Wir lösen Gl. 1 für $\frac{dy}{dx}$ auf. Hierdurch ergiebt sich

$$2)\quad \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{ax}$$

oder

$$3)\quad dy = + \sqrt{ax} \,.\, dx$$

$$4)\quad dy = - \sqrt{ax}\, dx.$$

Integriren wir die Differential-Gleichungen 3 und 4, so folgt

$$5)\quad y - \frac{2}{3} \sqrt{ax^3} + c_1 = 0$$

$$6)\quad y + \frac{2}{3} \sqrt{ax^3} + c_2 = 0.$$

Jede der Gleichungen 5 und 6 kann als **primitive Gleichung** der gegebenen Differential-Gleichung (1) gelten. Wollen wir ihre allgemeine Integral-Gleichung aufstellen, so müssen wir die beiden Gleichungen 5 und 6 multipliciren. Hierdurch erhalten wir

$$7)\quad \left(y - \frac{2}{3} \sqrt{ax^3} + c_1\right) . \left(y + \frac{2}{3} \sqrt{ay^3} + c_2\right) = 0.$$

Setzen wir $c_1 = c_2$, so folgt aus Gl. 7

$$8)\quad (y + c)^2 - \frac{4}{9} a x^3 = 0.$$

Aufgabe 2. Man soll folgende Differential-Gleichung auflösen

$$1)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0.$$

Auflösung.

$$2)\quad (y - ax + c_1) . (y + ax + c_2) = 0$$

oder

$$3)\quad (y + c)^2 - a^2 x^2 = 0.$$

Wir haben hier die Rechnungen weggelassen, weil sie leicht nach der Auflösung von Aufgabe 1 durchgeführt werden können.

Aufgabe 3. Man soll folgende Differential-Gleichung auflösen

$$1)\ y\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\cdot\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Auflösung. Aus Gleichung 1 folgt zunächst

$$2)\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

$$3)\ \frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = \pm\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y}}$$

$$4)\ \frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

d. h. es ist

entweder

$$5)\ \frac{dy}{dx} = \frac{-x + \sqrt{x^2+x^2}}{y}$$

oder

$$6)\ \frac{dy}{dx} = -\frac{x + \sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

Es handelt sich jetzt darum, jede der Gleichungen 5 und 6 zu integriren. Aus Gl. 5 folgt nun

$$7)\ y\,dy = (-x + \sqrt{x^2+y^2})\,dx$$

$$8)\ x\,dz + y\,dy = \sqrt{x^2+y^2}\cdot dx$$

$$9)\ \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = dx.$$

Integriren wir beide Seiten von Gl. 9, so folgt

$$10)\ +\sqrt{x^2+y^2} = x + c.\ ^{*)}$$

---

*) Sollte dieses nicht einleuchten, so setze man in Gleichung 9 $x^2 + y^2 = u$, also $x\,dx + y\,dy = {}^1/_2\,du$. Hieraus folgt

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{{}^1/_2\,du}{\sqrt{u}},\ \text{also}$$

$$\int\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int\frac{{}^1/_2\,du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u}.$$

Setzt man hierin wieder $x^2 + y^2 = u$, so folgt

$$\int\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

In ähnlicher Weise folgt aus Gl. 6

$$11)\quad -\sqrt{x^2+y^2}=x+c_2.$$

Setzen wir in den Gleichungen 10 und 11 $c_1=c_2=c$, so erhalten wir als allgemeine Integral-Gleichung von Gl. 1

$$12)\quad \pm\sqrt{x^2+y^2}=x+c$$

oder

$$13)\quad y^2=2cx+c^2. \text{ \} Gleichung einer Parabel.}$$

Aufgabe 4. Man soll folgende Differential-Gleichung auflösen

$$1)\quad (a^2-x^2)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+bx(a^2-x^2)\cdot\left(\frac{dx}{dy}\right)^2-\frac{dy}{dx}-bx=0.$$

Auflösung. Die vorliegende Differential-Gleichung ist in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ eine algebraische Gleichung vom dritten Grade. Um dieselbe für $\frac{dy}{dx}$ aufzulösen, bringen wir sie in eine bequeme Form, und schreiben deshalb statt ihrer

$$2)\quad \left\{(a^2-x^2)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1\right\}\cdot\left\{\frac{dy}{dx}+dx\right\}=0.$$

Hieraus ergeben sich folgende Wurzeln für $\frac{dy}{dx}$

$$3)\quad \frac{dy}{dx}=-bx$$

$$4)\quad \frac{dy}{dx}=+\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$5)\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Integriren wir die Gleichungen 3, 4 und 5, so folgt

$$6)\quad y=-\frac{bx^2}{2}+c, \qquad \text{oder } y-c_1=-\frac{bx^2}{2}$$

$$7)\quad y=+\arcsin\frac{x}{a}+c_2, \text{ oder } y-c_2=+\arcsin\frac{x}{a}$$

$$8)\quad y=-\arcsin\frac{x}{a}+c_3, \text{ oder } y-c_3=-\arcsin\frac{x}{a}.$$

Setzen wir in den Gleichungen 6, 7 und 8 $c_1 = c_2 = c_3 = c$, **so folgt als allgemeines Integral der gegebenen Differential-Gleichung**

$$9)\ (y - c)^3 = \pm \frac{b x^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} \right)^2.$$

Wir haben schon Seite 269 erwähnt, dass die Methode, welche im Vorstehenden angewendet wurde, sehr oft auf unüberwindliche Schwierigkeiten führt. Wir wollen deshalb in den folgenden Paragraphen noch einige Fälle vorführen, in denen man auf einem andern Wege zur Lösung der Differential-Gleichungen erster Ordnung höhern Grades gelangt.

§. 106.

Fortsetzung. — Die gegebene Differential-Gleichung lässt sich für y auflösen, d. h. sie kann auf die Form $y = f(x, p)$ gebracht werden.*)

Aus der Differential-Gleichung

$$1)\ y = f(x, p)$$

erhält man durch Differentiation

$$2)\ \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f(x,p)}{dx} + \frac{\partial f(x,y)}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}.$$

Weil nun aber $\frac{dy}{dx} = p$, so folgt aus Gl. 2

$$3)\ p = \frac{\partial f(x,p)}{dx} + \frac{\partial f(x,p)}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}.$$

Hier haben wir eine neue Differential-Gleichung zwischen den Variabeln x und p. **Ist es möglich, diese neue Differential-Gleichung aufzulösen,** so braucht man nur mit Hülfe ihrer Auflösung, welche im Allgemeinen die Form

$$4)\ \varphi(x, p . c) = 0$$

---

*) p ist hier eine andere Schreibweise für $\frac{dx}{dx}$ (vergl. D. R., Seite 113, Bemerkung 2).

hat, aus Gl. 1 p zu eliminiren, **um zu der ursprünglichen Gleichung zu gelangen, welche der gegebenen Differential-Gleichung (1) entspricht.**

§. 107.

Fortsetzung. $y = px + f(p)$. — Einige Bemerkungen über besondere Auflösungen von Differential-Gleichungen.

Die Gleichung

1) $y = px + f(p)$

bildet einen speciellen Fall von Gl. 1, §. 106.

Wir müssen also Gl. 1 nach der Regel von §. 106 lösen können. Differentiiren wir nun Gl. 1, so folgt

2) $p = p + x.\frac{dp}{dx} + f'(p).\frac{dp}{dx}$

3) $0 = \{x + f' p\}\frac{dp}{dx}.$

Um p mit Hülfe von Gl. 3 aus Gl. 1 zu eliminiren, beachte man, dass der Gl. 3 genügt wird dadurch, dass man setzt **entweder**

4) $\frac{dp}{dx} = 0$

oder

5) $x + f' p = 0.$

Aus Gleichung 4 folgt ohne Weiteres

6) $p = c.$

Setzen wir nach Gl. 6 den Werth von p in Gl. 1 ein, so folgt

7) $y = cx + f(c).$ } **Integral-Gleichung, welche der Differential-Gleichung 1 entspricht.**

Ausser der Gleichung 7 können wir noch eine andere Auflösung von Gl. 1 erhalten, dadurch, dass wir mit Hülfe

von Gl. 5 p aus Gl. 1 eliminiren. Wir lösen zu dem Ende Gl. 5 für p auf. Erhalten wir dadurch

$$8)\ p = \varphi x \ \}\ \text{als Auflösung von Gl. 5}$$

und setzen wir diesen Werth von p in Gl. 1 ein, so folgt

$$9)\ y - x \cdot \varphi x + f\{\varphi(x)\}. \ \Big\}\ \text{Besondere Auflösung der gegebenen Differential-Gleichung 1.}$$

Es ist klar, dass die Gleichungen 7 und 9 beide Auflösungen (primitive Gleichungen) der gegebenen Differential-Gleichung (1) sind; indessen unterscheiden sich diese beiden Auflösungen wesentlich dadurch, dass die erste, Gl. 7, eine willkürliche Constante enthält, während in der letzteren, Gl. 9, keine Constante enthalten ist. Dieser Unterschied rührt daher, dass die Gleichung 7 durch **wirkliche Integration gefunden ist, während Gl. 9 ohne Integration aus Gl. 1 abgeleitet ist.** — Diese letzte Auflösung der gegebenen Differential-Gleichung (1) heisst ihre **besondere Auflösung** (vergl. Seite 244).

Bemerkung. Die besonderen Auflösungen der Differential-Gleichungen wurden von Euler noch für ein Paradoxon erklärt, welches sich mit den Principien der Differential- und Integral-Rechnung nicht zusammenreimen lasse. Lagrange hat dieselben zuerst vollständig erklärt. Nach dem Zwecke der vorliegenden Schrift müssen wir darauf verzichten, hier noch weiter auf die Behandlung der besonderen Auflösungen einzugehen. In folgendem Capitel werden wir bei einzelnen Aufgaben gelegentlich darauf zurückkommen. Dem gereifteren Leser, der sich hierüber weiter unterrichten will, empfehlen wir Külp, Differential- und Integral-Rechnung; ein Buch, dass auch in anderer Beziehung sehr zu empfehlen ist.

Aufgabe. Man soll die Differential-Gleichung

$$1)\ y\,dx - x\,dy \pm a\sqrt{x^2 + dy^2}$$

auflösen.

Auflösung. Aus der gegebenen Differential-Gleichung (1) folgt

$$2)\ y = px \mp a\sqrt{1 + p^2}.$$

Differentiiren wir diese Gleichung, so folgt weiter

$$3)\ p = p + x\frac{dp}{dx} \mp \frac{a\,p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$4)\ 0 = \left(x \mp \frac{a\,p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx}.$$

Der Gleichung 4 wird nun genügt, dadurch, dass man setzt **entweder**

$$5)\ \frac{dp}{dx} = 0$$

oder

$$6)\ x \mp \frac{a\,p}{\sqrt{1+p^2}} = 0.$$

Aus Gleichung 5 folgt

$$7)\ p = c.$$

Setzen wir diesen Werth von p in Gl. 2 ein, so folgt

$$8)\ y = c\,x \mp a\sqrt{1+c^2}$$ als Integral-Gleichung, welche der Differential-Gleichung 1 entspricht.

Durch Gleichung 6 können wir p **ohne Integration** ermitteln. Aus dieser Gleichung (6) folgt zunächst

$$9)\ x = \pm\frac{a\,p}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$10)\ x^2 = \frac{a^2\,p^2}{1+p^2}$$

$$11)\ x^2 + p^2\,x^2 = a^2\,p^2$$

$$12)\ p^2\,(a^2 - x^2) = x^2$$

$$13)\ p^2 \qquad = \frac{x^2}{a^2 - x^2}$$

$$14)\ p \qquad = \pm\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Setzen wir diesen Werth von p in Gl. 2 ein, so folgt

$$15)\ y = \pm\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mp a.\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}$$

16) $y = \pm \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mp \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

17) $y = \mp \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 = x^2}}$

18) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

19) $x^2 + y^2 = a^2$

Gleichung 19 ist eine besondere Auflösung der gegebenen Differential-Gleichung 1.

Wir empfehlen dem Leser, für verschiedene Werthe von C die Linien zu construiren, welche der Gl. 8 entsprechen, und dazu für dasselbe Coordinaten-System die Curve (Kreis) zu zeichnen, welche der Gl. 19 entspricht.

§. 108.

Fortsetzung. — Die gegebene Differential-Gleichung lässt sich für x auflösen, d. h. sie lässt sich auf die Form „$x = f(y . p)$“ bringen.

Aus der Differential-Gleichung von der Form

1) $x = f(y, p)$

folgt durch Differentiation

2) $1 = \frac{\partial f(y, p)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f(x, p)}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}$.

3) $1 = \frac{\partial f(y, p)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f(x, p)}{dp} \cdot \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Setzen wir hierin $\frac{dy}{dx} = p$, so folgt

4) $1 = \frac{\partial f(y, p)}{dy} . p + p . \frac{\partial f(y, p)}{dp} \cdot \frac{dp}{dy}$.

Die Gleichung 4 enthält nur p und y. **Wenn es möglich ist, dieselbe zu integriren, so hat ihr Integral die Form**

5) $\varphi(y, p, c) = 0$.

Wird dann p mit Hülfe von Gl. 5 p aus Gl. 1 eliminirt, so ist die gegebene Differential-Gleichung gelöst.

§. 109.

Differential - Gleichungen höherer Ordnungen. Allgemeine Bemerkungen.

Die Differential-Gleichungen höherer Ordnungen bieten noch weit mehr Schwierigkeiten, als die Differential-Gleichungen der ersten Ordnung; und es giebt auch nur eine verhältnissmässig geringe Anzahl von speciellen Fällen, in denen sich die Integration der Differential-Gleichungen höherer Ordnungen ausführen lässt. Wir wollen hier deshalb auch nur das Allernothwendigste darüber mittheilen, und behalten uns vor, in dem folgenden Capitel bei den Anwendungen gelegentlich das Versäumte nachzuholen. Wir machen hier jedoch schon darauf aufmerksam, dass die Differential-Gleichungen höherer Ordnungen sich wesentlich von den Differential-Gleichungen der ersten Ordnung dadurch unterscheiden, dass man bei den letzteren ohne wesentliche Modificationen nach Belieben jede der Variabeln als unabhängige Variable ansehen durfte, **während bei den Differential-Gleichungen höherer Ordnungen sorgfältig darauf zu achten ist, welcher von den Variabeln der Character der unabhängigen zukömmt.** (Vergl. D. R. Cap. X Seite 119 ff.)

Bemerkung. Wir machen den Anfänger darauf aufmerksam, dass die Behandlung der Differential-Gleichungen höherer Ordnungen klare und richtige Auffassung der Grundsätze der Differential- und Integral-Rechnung und grosse **Fertigkeit** in den analytischen Operationen erfordern.

§. 110.

Fortsetzung. — $\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$

Wir wollen hier einen sehr einfachen Fall behandeln, und zu dem Ende annehmen, dass gegeben sei:

1) $\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Setzen wir hierin $\frac{d^2y}{dy^2} = q$, $\frac{dy}{dx} = p$ (vergl. D. R. Seite 113), so folgt

2) $q = f(p)$.

Nun ist

3) $q = \frac{dp}{dx}$ also

4) $dx = \frac{dp}{q}$.

Setzen wir hierin für q seinen Werth nach Gl. 1 oder 2, so folgt

5) $dx = \frac{dp}{f(p)}$ also

6) $x = \int \frac{dp}{f(p)} + c_1$.

Ferner ist

7) $d\,y = p \,.\, d\,x$ $\left\{ \text{Dies folgt aus der Gleichung } \frac{dy}{dx} = p. \right.$

Setzt man hierin den Werth von dx nach Gl. 5, so folgt

8) $dy = \frac{p\,d\,p}{f(p)}$

9) $y = \int \frac{p\,dp}{f(p)} + c_2$.

Lassen sich die Integrationen in Gl. 6 und 9 ausführen, und kann man aus den beiden hierdurch entstehenden Gleichungen p eliminiren, so erhält man durch Ausführung dieser Operationen eine primitive Gleichung, welche der gegebenen Differential-Gleichung (1) entspricht.

Die folgende Aufgabe mag dienen, um das Vorstehende zu erläutern.

Aufgabe. Man soll folgende Differential-Gleichung auflösen:

1) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Auflösung. Wir setzen wieder $\frac{d^2y}{dx^2} = q$ und $\frac{dy}{dx} = p$. Hierdurch verwandelt sich Gl. 1 in folgende Gleichung

2) $q = \sqrt{1 + p^2}$.

Setzen wir nach Gl. 2 den Werth von q in Gl. 4, Seite 280 ein, so folgt

3) $dx = \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}$.

Hieraus folgt nach Gl. 10, Seite 82

4) $x = l\left\{\sqrt{1 + p^2} + p\right\} + c_1$.

Ferner ist

5) $dy = p\,dx$ $\left\{ \text{folgt aus der Gleichung } \frac{dy}{dx} = p. \right.$

Setzen wir hierin den Werth von dx nach Gl. 3, so ergiebt sich

6) $dy = \frac{p\,dp}{\sqrt{1 + p^2}}$.

Hieraus folgt durch Integration (nach Gl. 6, Seite 5)

7) $y = \sqrt{1 + p^2} + c_2$.

Aus den Gleichungen 4 und 7 ist jetzt noch p zu eliminiren. Wir setzen zu dem Ende nach Gl. 7

8) $(y - c_2)^2 = 1 + p^2$.

9) $p = \pm\sqrt{(y - c_2)^2 - 1}$.

Schalten wir nach Gl. 9 den Werth von p in Gl. 4 ein, so folgt

10) $x = l\left\{y = c_2 + \sqrt{(y - c_2)^2 - 1}\right\} + c_1$.

Diese Gleichung ist die Integral-Gleichung, welche der gegebenen Differential-Gleichung (1) entspricht. —

Bemerkung. Hätte man aus den Gleichungen 4 und 9 auch eine Gleichung ableiten können, welche auf y reducirt ist, und wie hätte das Verfahren in diesem Falle sein müssen?

§. 111.

Fortsetzung. — Die gegebene Differential-Gleichung hat die Form $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$.

Setzen wir wieder $\frac{d^2y}{dx^2} = q$, $\frac{dy}{dx} = p$, so verwandelt sich die Gleichung

$$1)\ \frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

in die Gleichung

$$2)\ q = f(y).$$

Nun ist

$$3)\ q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Setzen wir den Werth von q nach Gl. 3 in Gl. 2 ein, so folgt

$$4)\ p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y).$$

$$5)\ p \,.\, dp = f(y) \,.\, dy.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$6)\ \frac{1}{2} p^2 = \int f(y)\, dy + c_1.$$

$$7)\ p = \sqrt{2 \int f(y)\, dy + c_1}.$$

$$8)\ \frac{dy}{dx} = \sqrt{2 \int f(y) \,.\, dy + c_1}.$$

$$9)\ dx = \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y)\, dy + c_1}}$$

Hieraus folgt durch Integration

$$10)\ x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}} + c_2.$$

Wir machen darauf aufmerksam, dass Gleichung 10 nur in **formeller Beziehung** als Auflösung der gegebenen Differential-Gleichung (1) gelten kann. Zu der **wirklichen Auflösung der vorliegenden Differential-Gleichung gelangt man erst, wenn man die beiden Integrationen, welche in Gleichung 10 angedeutet sind, wirklich ausführt.**

§. 112.

Fortsetzung. — Die gegebene Differential-Gleichung hat die Form $\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right)$.

Wir wollen hier den einfachen Fall behandeln, dass $n = 3$ ist, dadurch erhalten wir die Differential-Gleichung

$$1)\ \frac{d^3 y}{dx^3} = f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Setzen wir nun nach D. R., Seite 113

$$2)\ \frac{d^3 y}{dx^3} = r;\ \frac{d^2 y}{dx^2} = q,\ \frac{dy}{dp} = p,$$

so erhält Gl. 1 folgende Form

$$3)\ r = f(p).$$

Nun ist

$$4)\ r = \frac{dq}{dx} = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} = q \cdot \frac{dq}{dp}.$$

Setzen wir den Werth von r nach Gl. 4 in Gl. 3 ein, so folgt

$$5)\ q \cdot \frac{dq}{dp} = f(p).$$

6) $q \, . \, dq = f(p) \, . \, dp.$

7) $\frac{1}{2} q^2 = \int f(p) \, . \, dp + c_1.$

8) $q = \sqrt{2 \int f(p) \, . \, dp + c_1}.$

9) $\frac{dp}{dx} = \sqrt{2 \int f(p) \, . \, dp + c_1}.$

10) $dx = \frac{dp}{\sqrt{2 \int f(p) \, . \, dp + c_1}}.$

11) $x = \int \frac{dp}{\sqrt{2 \int f(p) \, . \, dp + c_1}} + c_2.$

Ferner ist nach Gl. 2 und 10

12) $dy = p \, . \, dx = \frac{p \, . \, dp}{\sqrt{2 \int f(p) \, . \, dp + c_1}}.$

Hieraus folgt durch Integration

13) $y = \int \frac{p \, . \, dp}{\sqrt{2 \int f(p) \, . \, dp + c_1}} + c_3.$

Ist es möglich, die drei Integrationen auszuführen, welche in den Gleichungen 11 und 13 angedeutet sind, und p zu eliminiren, so gelangt man dadurch zu der Integral-Gleichung, welche der Differential-Gleichung 1 resp. 3 entspricht.

XI. Capitel.

Anwendungen der Lehre von den Differential-Gleichungen auf Geometrie und Mechanik.

§. 113.

Aufgaben über die Bestimmung von Curven aus den Beziehungen ihrer Subnormalen, Subtangenten, Normalen, Tangenten oder Krümmungs-Halbmesser.

Aufgabe 1. Man soll die Gleichung derjenigen krummen Linien aufstellen, deren Subnormale für alle Punkte der Curve denselben Werth (a) hat.

Auflösung. Nach der Bedingung der Aufgabe ist die gesuchte Curve bestimmt durch die Gleichung

1) $Sn = a.$

Nun ist nach D. R., Seite 128, Gl. 7, für jede Curve

2) $Sn = y \cdot \frac{dy}{dx}.$

Der Ausdruck für Sn in Gl. 2 gilt für jede beliebige Curve; er wird also auch für die gesuchte Curve gelten. Setzen wir denselben in Gl. 1 ein, so folgt

3) $y \cdot \frac{dy}{dx} = a.$

Die Curve, welche wir suchen, muss also der Differential-Gleichung 3 genügen. **Die Auflösung unserer Aufgabe ist also zurückgeführt auf die Auflösung einer Differential-Gleichung (Gl. 3).** Aus Gl. 3 folgt nun

4) $y\,dy = a\,dx.$

5) $\int y\,dy = \int a\,dx.$

6) $y^2 = 2ax + C.$

Die Curve, welche der gegebenen Aufgabe genügt, ist also eine Parabel, deren Parameter = 2a ist, deren geometrische Achse mit der Abscissen-Achse zusammenfällt, und deren Scheitelpunkt auf der Abscissen-Achse eine beliebige Lage hat.

Bemerkung. Der Scheitelpunkt hat deshalb eine beliebige Lage auf der Abscissen-Achse, weil in Gl. 6 die Constante C einen beliebigen Werth hat. Setzt man C = 0, so fällt der Scheitelpunkt mit dem Anfangspunkt des Coordinaten-Systems zusammen.

Wie kann man die Richtigkeit unseres Resultates prüfen? (Vergl. D. R., Capitel XI., Seite 127 ff.

Aufgabe 2. Man soll die Gleichung derjenigen Curven aufstellen, in welcher die Subnormale eines jeden Punktes so gross ist, als die Abscisse.

Auflösung. Nach der Bedingung unserer Aufgabe ist die gesuchte Curve bestimmt durch die Gleichung

1) $Sn = \pm x.$

Nun ist wieder nach D. R., Seite 128, Gl. 7

2) $Sn = y\,\frac{dy}{dx}.$

Der Ausdruck für Sn in Gl. 2 gilt für jede beliebige Curve; er gilt also auch für die gesuchte Curve. Setzen wir denselben in Gl. 1 ein, so folgt

3) $y \cdot \frac{dy}{dx} = \pm x.$

Die Curve, welche wir suchen, muss also der Differential-Gleichung 3 genügen. Aus dieser Gleichung folgt

4) $y\,dy = \pm x\,dx.$

5) $\frac{y^2}{2} = \frac{\pm d^2}{2} + C.$

6) $y^2 \pm x^2 = c$ { Hier ist c statt 2C gesetzt worden, was offenbar zulässig ist.

Je nachdem in Gl. 6 das obere oder untere Zeichen in $\mp$ gilt, ist sie die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, oder eines Kreises (einer Ellipse mit gleichen Achsen). **Diese beiden Curven genügen also der Bedingung unserer Aufgabe.**

Darf man für c jeden beliebigen positiven oder negativen Werth setzen, wenn Gl. 6 einen geometrischen Sinn haben soll?

Aufgabe 3. Man soll die Gleichung derjenigen Curve aufstellen, deren Subnormalen proportional sind den Quadrat-Wurzeln der entsprechenden Abscissen.

Auflösung. Nach der Bedingung unserer Aufgabe ist die gesuchte Curve bestimmt durch die Gleichung

$$1)\ Sn = \pm a \sqrt{x}.$$

Nun ist wieder nach D. R., Seite 128, Gl. 7

$$2)\ Sn = y \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Der Ausdruck für Sn in Gl. 2 gilt für jede Curve; er gilt also auch für die gesuchte Curve. Setzen wir denselben in Gl. 1 ein, so folgt

$$3)\ y \cdot \frac{dy}{dx} = \pm a \sqrt{x}.$$

$$4)\ y\, dy = \pm a \sqrt{x} \cdot dx.$$

$$5)\ \frac{y^2}{2} = \pm \frac{2}{3} a \sqrt{x^3} + C.$$

$$6)\ y^2 = \pm \frac{4}{3} a \sqrt{x^3} + c.$$

Aufgabe 4. Man soll die Gleichung derjenigen Curve auf stellen, deren Subtangente für alle Punkte denselben Werth (a) hat.

Auflösung. Nach der Bedingung unserer Aufgabe ist

$$1)\ St = a.$$

Setzen wir hierin den allgemeinen Ausdruck von St nach D. R., Seite 128, Gl. 8, so folgt

2) $y \cdot \frac{dx}{dy} = a.$

3) $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{a}.$

4) $ly = lc = \frac{x}{a}.$

5) $l\,cy = \frac{x}{a}.$

6) $cy = e^{\frac{x}{a}}.$

7) $y = \frac{1}{c} e^{\frac{x}{a}}.$

Die gesuchte Curve ist also eine Exponental-Linie.

Setzen wir $a = 1$ und $c = 1$, so folgt aus Gl. 7

8) $y = e^x$, vergl. D. R., Seite 133, Gl. 23.

Aufgabe 5. Man soll die Gleichung derjenigen Curve aufstellen, für welche die Subtangenten proportional den entsprechenden Abscissen sind.

Auflösung. Nach der Bedingung unserer Aufgabe ist

1) $St = ax.$

Setzen wir hierin den allgemeinen Ausdruck für St nach D. R., Seite 128, Gl. 8, so folgt

2) $y \cdot \frac{dx}{dy} = ax.$

3) $a \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$

4) $a\,ly = lx + lc.$

5) $y^a = cx.$

Setzen wir $a = 2$, so wird die Curve (Gl. 5), welche unserer Aufgabe entspricht, eine gemeine Parabel. Vegl. D. R., Seite 131, Gl. 4.

Aufgabe 6. Man soll die Gleichung derjenigen Curve bestimmen, deren Tangenten für alle Punkte der Curve denselben Werth (a) haben.

Auflösung. Aus der Bedingung der Aufgabe folgt

1) $T = a.$

Setzen wir hierin den allgemeinen Ausdruck für T nach Gl. 9, Seite 128, so folgt

2) $y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a.$

3) $y^2 + y^2 \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = a^2.$

4) $\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{y^2}}.$

5) $dx = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \cdot dy.$

6) $x = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy + C.$

Um das Integral auf der rechten Seite von Gl. 6 auszuführen, setze man

7) $\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} = u$, also $y = \frac{a}{\sqrt{1 + u^2}}.$

Dann ist weiter nach §. 11, Seite 20 ff.

8) $$\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = \int u\, dy = uy - \int y\, du$$
$$= uy - \int \frac{a\, du}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

9) $\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = uy - a l \left\{ \sqrt{1 + u^2} + u \right\} + C.$ $\Big\}$ nach Gl. 10, Seite 82.

$$10)\ \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = \sqrt{a^2 - y^2} - a l \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + C. \left\{ \begin{array}{l} \text{nach Gl.} \\ \text{9 und} \\ \text{Gl. 7.} \end{array} \right.$$

Setzen wir den Ausdruck für $\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy$ nach Gl. 10 in Gl. 6 ein, so folgt

$$11)\ x = \sqrt{a^2 - y^2} - a l \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + C.$$

Bemerkung. Die Curve, welche der Gleichung 11 entspricht, ist die sogenannte Tractoria (Zuglinie), eine Curve, welche in der praktischen Mechanik zuweilen Anwendung findet. Wir empfehlen dem Leser, die Curve zu construiren, und zu dem Ende sowohl für a, als auch für die **willkürliche Constante** (C) bestimmte Zahlenwerthe anzunehmen.

Welchen Gang würde die Rechnung genommen haben, wenn die Ausführung des Integrals auf der rechten Seite von Gl. 6 dadurch eingeleitet wäre, dass wir nach §. 32, Seite 74, gesetzt hätten $\sqrt{a^2 - y^2} = ny + a$?

Aufgabe 7. Man soll die Gleichung derjenigen Curve bestimmen, deren Tangenten proportional den Quadrat-Wurzeln aus den entsprechenden Ordinaten sind.

Auflösung. Nach der Bedingung unserer Aufgabe wird die Curve bestimmt durch die Gleichung

$$1)\ T = a \sqrt{y}.$$

Setzen wir hierin den allgemeinen Ausdruck für T nach D. R., Seite 128, Gl. 9, so folgt

$$2)\ y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a \cdot \sqrt{y}.$$

$$3)\ y^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right) = a^2 y.$$

$$4)\ \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{a^2 y - y^2}{y^2}.$$

$$5)\ dx = \sqrt{\frac{a^2 - y}{y}} \cdot dy.$$

Hieraus folgt weiter durch Integration

$$6)\ x = \int \sqrt{\frac{a^2 - y}{y}} \,.\, dy.$$

Um die Integration auszuführen, welche rechts in Gl. 6 angedeutet ist, setzen wir

$$7)\ \sqrt{\frac{a^2 - y}{y}} = u, \text{ also } y = \frac{a^2}{1 + u^2}.$$

Hiernach ist

$$8)\ \int \sqrt{\frac{a^2 - x}{y}} \,.\, dy = \int u\, dy = uy - \int y\, du.$$

$$9)\ \int \sqrt{\frac{a^2 - y}{y}} \,.\, dy = uy - \int \frac{a^2}{1 + u^2} du.$$
$$= uy - a^2 \,.\, \text{arc tg}\, u + C.$$

Setzen wir in Gl. 9 den Werth von u nach Gl. 7, so folgt

$$10)\ \int \sqrt{\frac{a^2 - y}{y}} \,.\, dy = \sqrt{a^2 y - y^2} - a^2 \text{ arc tg} \sqrt{\frac{a^2 - y}{y}} + C.$$

Setzen wir nach Gl. 10 den Werth von $\int \sqrt{\frac{a^2 - y}{y}} \,.\, dy$ in Gl. 6 ein, so folgt

$$11)\ x = \sqrt{a^2 y - y^2} - a^2 \text{ arc tg} \sqrt{\frac{a^2 - y}{y}} + C.$$

Diese Gleichung ist die Gleichung der Curve, welche der Forderung unserer Aufgabe genügt.

Wir empfehlen die Curve nach Gl. 11 zu construiren, und dieselbe zu discutiren nach D. R., Cap. XIV etc.

Aufgabe 8. Man soll die Gleichung derjenigen Curve bestimmen, deren Normale für alle Punkte denselben Werth (a) hat.

Auflösung. Nach der Bedingung unserer Aufgabe ist die gesuchte Curve bestimmt durch die Gleichung

$$1)\ N = a.$$

Setzen wir hierin den allgemeinen Ausdruck für N nach D. R., Seite 128, Gl. 10, so folgt

$$2)\ y \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a.$$

Hieraus folgt weiter

$$3)\ \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a^2-y^2}{y^2}}.$$

$$4)\ \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = dx.$$

$$5)\ \int\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = x + C.$$

$$6)\ \mp\sqrt{a^2-y^2} = x + C.$$

$$7)\ a^2 - y^2 = (x+C)^2.$$

$$8)\ y^2 + (x+C)^2 = a^2.$$

Die gesuchte Curve ist also ein Kreis, dessen Radius gleich a ist, und dessen Mittelpunkt auf der Abscissen-Achse liegt.

Bemerkung. Setzen wir $C = 0$, so wird Gleichung 8 die Mittelpunkts-Gleichung des Kreises, d. h. in diesem Falle fällt der Mittelpunkt des genannten Kreises in den Anfangspunkt des Coordinaten-Systems.

Aufgabe 9. Man soll die Gleichung derjenigen Curve aufstellen, deren Normale der Gleichung $N = \sqrt{x^2+y^2}$ genügt.

Auflösung. Nach D. R., Seite 128, Gl. 10, ist für jede Curve

$$1)\ N = y \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Demnach wird die gesuchte Curve bestimmt durch die Gleichung

$$2)\ y \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

3) $y^2 + y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2 + y^2.$

4) $y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2.$

5) $y\,dy = \pm x \,.\, dx.$

Hieraus folgt durch Integration

6) $\frac{y^2}{2} = \pm \frac{x^2}{2} + C.$

7) $y^2 \mp x^2 = C.$

Je nachdem das obere oder untere Zeichen in Gl. 7 gilt, entspricht sie einer gleichseitigen Hyperbel oder einem Kreise (vergl. Aufgabe 2, Seite 286).

Aufgabe 10. Man soll die Gleichung der Curve aufstellen, deren Krümmungs-Halbmesser constant, etwa gleich a ist.

Auflösung. Bezeichnen wir den Krümmungs-Halbmesser durch ϱ, so ist ganz allgemein nach D. R., Seite 198, Gl. 23

1) $\varrho = \frac{(1+p^2)^{3/2}}{q}$ } Bekanntlich ist $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Die Curve, welche unserer Aufgabe entspricht, muss demnach folgender Gleichung genügen

2) $\frac{(1+p^2)^{3/2}}{q} = a.$

Weil nun $q = \frac{dp}{dx}$, so folgt aus Gl. 2

3) $(1+p^2)^{3/2} = a \,.\, \frac{dp}{dx}.$

4) $\frac{dx}{a} = \frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}}.$

5) $x = a \int \frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} + c_1.$

Um das Integral von der rechten Seite von Gl. 5 auszuführen, setzen wir

$$6)\ p = \operatorname{tg} u;\ (1 + p^2) = \sec^2 u = \frac{1}{\cos^2 u};\ dp = \frac{du}{\cos^2 u}.$$

Hieraus folgt dann weiter

$$7)\ \int \frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = \int \frac{\frac{du}{\cos^2 u}}{\frac{1}{\cos^3 u}} = \int \cos u\, du = \sin u + C.$$

Nun ist bekanntlich $\sin u = \frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}$. Setzen wir diesen Werth von $\sin u$ in Gl. 7 ein, so folgt

$$8)\ \int \frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = \frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$ **Man beachte, dass nach Gl. 6 $\operatorname{tg} u = p$ ist.**

Setzen wir nach Gl. 8 den Werth von $\int \frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}}$ in Gl. 5 ein, so folgt

$$9)\ x = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} + c_1.$$

Nun ist ferner

$$10)\ dy = p\, dx$$ **Dies folgt aus der Gleichung $p = \frac{dy}{dx}$**

Setzen wir in diese Gleichung den Werth von dx nach Gl. 4, so folgt

$$11)\ dy = a \cdot \frac{p\, dp}{(1+p^2)^{3/2}}.$$

Hieraus folgt durch Integration nach Gl. 6, Seite 5

$$12)\ y = \frac{a}{(1+p^2)^{1/2}} + c_2.$$

Es kömmt jetzt noch darauf an, aus den Gleichungen 9 und 12 p zu eliminiren. Zu dem Ende setzen wir nach Gl. 12

13) $(y - c_2)^2 = \frac{a^2}{1+p^2}$.

14) $p^2 = \frac{a^2 - (y - c_2)^2}{(y - c_2)^2}$.

Aus Gleichung 9 folgt

15) $(x - c_1)^2 = \frac{a^2 p^2}{1+p^2}$.

Setzen wir hierin den Werth von p^2 nach Gl. 14, so folgt

16) $(x - c_1)^2 = \frac{a^2 \frac{a^2 - (y - c_2)^2}{(y - c_2)^2}}{1 + \frac{a^2 - (y - c_2)^2}{(y - c_2)^2}} = a^2 - (y - c_2)^2$.

17) $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = a^2$.

Unsere Curve ist demnach ein Kreis, dessen Radius $= a$, und dessen Mittelpunkt-Coordinaten, resp. die **willkürlichen Constanten** Werthe c_1 und c_2 haben, und zwar **ist der Kreis die einzige Curve, welche dieser Bedingung Genüge leistet.** (Vergl. die folgende Aufgabe.)

Aufgabe 11. Man soll diejenige Curve bestimmen, deren Krümmungs-Halbmesser den entsprechenden Normalen gleich sind.

Auflösung. Nach D. R., Seite 128, Gl. 10 und Seite 198, Gl. 23 ist

1) $N = y \cdot \sqrt{1+p^2}$, $\varrho = \frac{(1+p^2)^{3/2}}{q}$.

Da nun nach der Forderung unserer Aufgabe $N = \varrho$ sein soll, so folgt aus Gl. 1

2) $y \cdot \sqrt{1+p^2} = \mp \frac{(1+p^2)^{3/2}}{q}$.

3) $y = \mp \frac{1+p^2}{q}$.

4) $y \cdot q = \mp (1+p^2)$.

Nun ist $q = \frac{dp}{dx}$, **also folgt aus Gl. 4**

5) $y \cdot \frac{dp}{dx} = \mp (1 + p^2)$.

6) $y \cdot \frac{dp}{dx} \cdot dy = \mp (1 + p^2)\, dy$.

7) $y \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dp = \mp (1 + p^2)\, dy$.

8) $y \cdot p \cdot dp = \mp (1 + p^2)\, dy$.

9) $\frac{p \cdot dp}{1 + p^2} = \mp \frac{dy}{y}$.

Wir machen darauf aufmerksam, dass wir durch diese Operationen aus Gl. 3, in welcher 3 Variable y, p und q vorkamen, eine Gl. (9) hergestellt haben, in der nur 2 Variable p und y enthalten sind.

Hierdurch folgt durch Integration

10) $\frac{1}{2} l (1 + p^2) = \mp (ly + lc_1)$.

Berücksichtigen wir in Gl. 10 vor der Hand allein das Zeichen „—“, so folgt daraus

11) $1 + p^2 = \frac{1}{c_1^2 \cdot y^2}$.

Aus Gleichung 11 folgt weiter

12) $p = \frac{\sqrt{1 - c_1^2 \cdot y^2}}{c_1 \cdot y}$.

Da nun $p = \frac{dy}{dx}$, so folgt hieraus

13) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - c_1^2 \cdot y^2}}{c_1 \cdot y}$.

14) $\frac{c_1 y \cdot dy}{\sqrt{1 - c_1^2 \cdot y^2}} = dx$.

15) $\frac{1}{c_1} \cdot \sqrt{1 - c_1^2 \cdot y^2} = x + c_2$.

16) $\frac{1}{c_1^2} - y^2 = (x = c_2)^2$

17) $y^2 + (x + c_2)^2 = \left(\frac{1}{c_1}\right)^2$.

Gleichung 17 ist die Gleichung eines Kreises, dessen Radius gleich $\frac{1}{c_1}$ ist, und dessen Mittelpunkt (wegen des wilkürlichen Werthes von c_2) in einem beliebigen Punkte der Abscissen-Achse liegt. Ein solcher Kreis genügt also der Bedingung unserer Aufgabe. **Der Kreis ist aber nicht die einzige Curve, welche unserer Aufgabe genügt. Lassen wir in Gl. 10 das Zeichen „+“ gelten, so folgt**

18) $1 + p^2 = c_1^2 \,.\, y^2.$

19) $p = \sqrt{c_1^2 \,.\, y^2 - 1}.$

20) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{c_1^2 \,.\, y^2 - 1}.$

21) $\frac{dy}{\sqrt{c_1^2 \,.\, y^2 - 1}} = dx.$

Hieraus folgt nach Gl. 13, Seite 80,

22) $\frac{1}{c_1} \,.\, l \left\{ \sqrt{c_1^2 \,.\, y^2 - 1} + c_1 \,.\, y \right\} = x + c_2.$

Um die Natur der Curve kennen zu lernen, welcher Gl. 22 entspricht, formen wir dieselbe etwas um, und setzen zunächst

23) $l \left\{ \sqrt{c_1^2 \,.\, y^2 - 1} + c_1 \,.\, y \right\} = c_1 (x + c_2).$

24) $\sqrt{c_1^2 \,.\, y^2 - 1} + c_1 \,.\, y = e^{c1 (x - c_2)}.$

25) $\sqrt{c_1^2 \,.\, y^2 - 1} = e^{c_1 (x + c_2)} - c_1 \,.\, y.$

26) $c_1^2 \,.\, y - 1 = e^{c_1 (x + c_2)} - 2\, c_1 \,.\, y\, e^{c_1 (x + c_2)} + c_1^2\, y^2.$

27) $2\, c_1 \,.\, y\, e^{c_1 (x + c_2)} = e^{2\, c1 (x + c_2)} + 1.$

Multipliciren wir Gl. 27 mit $e^{-c_1 (x + c_2)}$, so folgt

28) $2\, c_1 \,.\, y = e^{c_1 (x + c_2)} + e^{-c_1 (x + c_2)}.$

29) $y = c_1 \frac{e^{c_1 (x + c_2)} + e^{-c_1 (x + c_2)}}{2}.$

Diese Gleichung ist offenbar die Gleichung einer Kettenlinie, **so dass ausser dem Kreise Gl. 17 auch die Kettenlinie der Bedingung unserer Aufgabe genügt.**

Setzen wir in Gl. 29 $c_2 = 0$, so folgt aus derselben

$$30)\ y = c_1 \frac{e^{c_1 x} + e^{-c_1 x}}{2} \Big\}$$ Vergl. D. R., Seite 131.

Aufgabe 12. Man soll eine Curve bestimmen, deren Krümmungs-Halbmesser proportional sind den Quadraten der entsprechenden Ordinaten.

Auflösung. Der Forderung unserer Aufgabe entspricht folgende Gleichung.

$$1)\ \varrho = ay^2.$$

Hieraus folgt nach D. R., Seite 198, Gl. 23,

$$2)\ \frac{(1+p^2)^{3/2}}{q} = ay^2.$$

$$3)\ (1+p^2)^{3/2} = ay^2\, q.$$

Nun ist

$$4)\ q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Setzen wir nach Gl. 4 den Werth von q in Gl. 3 ein, so folgt

$$5)\ (1+p^2)^{3/2} = ay^2 p \frac{dp}{dy}.$$

Wir machen darauf aufmerksam, dass es bei den letzten Operationen darauf ankam, aus Gl. 3, welche 3 Variable q, p und y enthält, eine Gleichung (5) herzustellen, in welcher nur 2 Variable (p und y) enthalten sind.

$$6)\ \frac{dy}{y^2} = a \cdot \frac{p\, dp}{(1+p^2)^{3/2}}.$$

$$7)\ -\frac{1}{y} = -\frac{a}{(1+p^2)^{1/2}} + C.$$

oder

$$8)\ \frac{1}{y} = \frac{a}{(1+p^2)^{1/2}} + c_1.$$

Setzen wir hierin $c_1 = 0$*), so ergiebt sich durch eine einfache Zwischen-Rechnung

9) $p = \sqrt{a^2y^2 - 1}$.

10) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2y^2 - 1}$.

11) $\frac{dy}{\sqrt{a^2y^2 - 1}} = dx$.

12) $\frac{1}{a} l \{ \sqrt{a^2y^2 - 1} + ay \} = y + c_2$ } Vergl. Gl. 13, Seite 79.

Nach einigen Umformungen erhält man aus Gl. 12.

13) $y + a \cdot \frac{a^{a(x+c_2)} + e^{-a(x+c_2)}}{2}$ } Die Umformungen, durch welche wir Gl. 13 aus Gl. 12 ableiten, sind denen ganz analog, die Seite 289, Gl. 23 bis 30 vorkommen.

Die Curve, welche unserer Aufgabe entspricht, ist nach Gl. 13 offenbar eine Kettenlinie. Um die gewöhnliche Form für die Gleichung der Kettenlinie herzustellen, setzen wir in Gl. 13, $c_2 = 0$. Hierdurch erhalten wir

14) $y = a \cdot \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$.

Es ist klar, dass durch die Annahme $c_2 = 0$ in Gl. 13 die Natur der Curve nicht berührt wird, indem diese Annahme geometrisch nichts anderes bedeutet, als dass dem Anfangspunkt des Coordinaten-Systems eine bestimmte Lage auf der Abscissen-Achse gegeben ist.

Aufgabe 13. Man soll die Curve bestimmen, deren Krümmungs-Halbmesser doppelt so lang sind, als die entsprechenden Normalen.

---

*) Durch die Annahme $c_1 = 0$ wird das Coordinaten-System insofern bestimmt, als für $p = 0$, $y = \frac{1}{a}$ sein muss. Wir empfehlen dem geübteren Leser, die Rechnung von Gl. 8 an fortzuführen, ohne $c_1 = 0$ zu setzen. Welchen Einfluss hat die Annahme $c_1 = 0$ auf das Resultat?

Auflösung. Nach D. R., Seite 128, Gl. 10 und Seite 198, Gl. 23, erhalten wir gemäss der Bedingung unserer Aufgabe

$$1)\quad \frac{(1+p^2)^{3/2}}{q} = \pm 2y \cdot \sqrt{1+p^2}.$$

Hieraus folgt weiter

$$2)\quad 1+p^2 = \pm 2y \cdot q.$$

Nun ist

$$3)\quad q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Setzen wir nach Gl. 3 den Werth von q in Gl. 2, so folgt

$$4)\quad 1+p^2 = \pm 2y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy}.$$

$$5)\quad \frac{dy}{y} = \pm 2 \frac{p \cdot dp}{1+p^2}.$$

$$6)\quad ly = \pm l(1+p^2) + lc_1.$$

Berücksichtigen wir in Gl. 6 vor der Hand allein das Zeichen + in dem Ausdruck „±“, so folgt

$$7)\quad y = c_1(1+p^2).$$

$$8)\quad \frac{y-c_1}{c_1} = p^2.$$

$$9)\quad p = \sqrt{\frac{y-c_1}{c_1}}.$$

$$10)\quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y-c_1}{c_1}}.$$

$$11)\quad \sqrt{\frac{c_1}{y-c_1}}\, dy = dx.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$12)\quad \sqrt{c_1 y - c_1^2} = x + c_2.$$

Die Integration lässt sich am einfachsten ausführen, wenn man setzt $y - c_1 = u$, und dann nach Gl. 6, Seite 5 verfährt.

13) $c_1 y - c_1^2 = (x + c_2)^2.$

14) $c_1 (y - c_1) = (x + c_2)^2.$

Diese Gleichung drückt offenbar eine Parabel aus, deren Parameter gleich der willkürlichen Constante c_1, und deren geometrische Achse parallel der Ordinaten-Achse ist.

Es lässt sich nun leicht übersehen, dass die Parabel nicht die einzige Curve ist, welche der Bedingung unserer Aufgabe genügt, denn berücksichtigen wir Gl. 6 das Zeichen „—“, so folgt aus dieser Gleichung

15) $y = \frac{c_1}{1 + p^2}$

16) $1 + p^2 = \frac{c_1}{y}$

17) $p = \sqrt{\frac{c_1 - y}{y}}$

18) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c_1 - y}{y}}$

19) $\sqrt{\frac{y}{c_1 - y}} \,.\, dy = dx.$

Hieraus folgt

20) $\frac{y\,dy}{\sqrt{c_1 y - y^2}} = dx.$

uud ferner nach Gl. 9, Seite 92

21) $- \sqrt{c_1 y - y^2} + \frac{c^1}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{2y - c_1}{c_1} = x + c_2.$

Diese Gleichung ist aber die Gleichung der Cycloide, so dass ausser der Parabel auch **die Cycloide der Bedingung unserer Aufgabe genügt.**

Bemerkung 1. Wenn es nicht einleuchten sollte, dass Gl. 21 die Gleichung einer Cycloide ist, so setze man

22) $y = \frac{c^1}{2} (1 - \cos t).$

Schalten wir diesen Werth von y in Gl. 21 ein, so folgt

$$23)\ -\sqrt{c_1 \frac{c_1}{2}(1-\cos t)-\frac{c_1^2}{4}(1-\cos t)^2}+\frac{c^1}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{c_1(1-\cos t)-c_1}{c_1}=x+c_2.$$

$$24)\ -\frac{c^1}{2}\sqrt{2(1-\cos t)-(1-\cos t)^2}\quad+\frac{c^1}{2}\operatorname{arc\,sin}(-\cos t)\quad=x+c_2.$$

$$25)\ -\frac{c^1}{2}\sqrt{(2-2\cos t)-(1-2\cos t+\cos^2 t)}-\frac{c^1}{2}\operatorname{arc\,sin}(\cos t)\quad=x+c_2.$$

$$26)\ -\frac{c^1}{2}\sqrt{1-\cos^2 t}-\frac{c^1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=x+c_2.$$

$$27)\ -\frac{c^1}{2}\sin t+\frac{c^1}{2}-t\frac{c^1}{2}\frac{\pi}{2}=x+c^2.$$

$$28)\ x+c_2+\frac{c_1\pi}{4}=\frac{c^1}{2}(t-\sin t).$$

Setzen wir nun in Gl. 28

$$29)\ c_2=-\frac{c_1\pi}{4}\ \text{so folgt}$$

$$30)\ x=\frac{c^1}{2}(t-\sin t).$$

Vergleichen wir nun die Gleichungen 22 und 30 mit D. R., Seite 135, Gl. 5 und 6, so ist evident, dass diese beiden Gleichungen (22 und 30) eine Cycloide bestimmen. Da aber diese Gleichungen (22 und 30) aus Gl. 21 abgeleitet sind, **so ist damit bewiesen, dass Gl. 21 die Gleichung einer Cycloide ist**, w. z. b. w.

Bemerkung 2. Durch die Bestimmung des Werthes von c_2 nach Gl. 29 wird **die Natur der Curve nicht geändert, sondern es wird dadurch blos die Lage des Anfangspunktes unseres Coordinaten-Systems auf der Abscissen-Achse bestimmt.** Aus dem Vergleich der Gleichungen 22 und 30 mit den Gleichungen 5 und 6, D. R., Seite 135, folgt ausserdem noch, dass der Radius des erzeugenden Kreises gleich $\frac{c^1}{2}$ ist.

§. 114.

Aufgaben zur Bestimmung einer Curve aus den Beziehungen ihrer Flächen oder Bogen-Längen.

Aufgabe 14. Man soll die Gleichung der krummen Linie aufstellen, welche der folgenden Gleichung entspricht

$$1)\ z+c={}^2/_3\,x\,y.$$

Hier soll z die Bedeutung haben, die wir ihm in §. 60, Seite 140 ff., beigelegt haben.

Auflösung. Durch Differentiation von Gl. 1 erhalten wir

2) $dz = {}^2/_3\,(x\,dy + y\,dx)$.

Setzen wir hierin den Werth von dz nach Gl. 6, Seite 96, so folgt

3) $y\,dx = {}^2/_3\,x\,dy + {}^2/_3\,y\,dx$

4) $y\,dx = 2\,x\,dy$

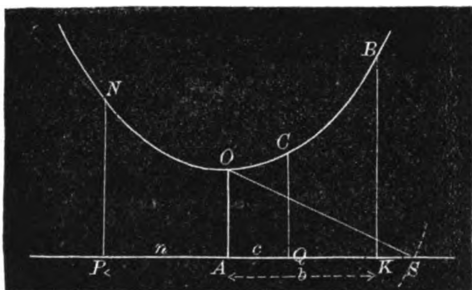
5) $\frac{2\,dy}{y} = \frac{dx}{x}$

6) $2\,ly = lx + lc$

7) $y^2 = cx$. } Gl. der Parabel.

Aufgabe 15. Eine Curve Fig. 88 soll durch einen Punkt O gehen, dessen Coordinaten $x = 0$, $y = m$ sind, und ausserdem der Bedingung genügen, dass die Bogenlängen, vom Punkte O angerechnet, stets gleich $\sqrt{y^2 - m^2}$ sind.

Fig. 88.



$s = \sqrt{y^2 - m^2}$

$\overset{\frown}{OB} = \sqrt{\overline{BK}^2 - AO^2}$

Auflösung. Der Bedingung unserer Aufgabe gemäss ist

1) $s = \sqrt{y^2 - m^2}$.

Hieraus folgt weiter

2) $ds = \frac{y\,.\,dy}{\sqrt{y^2 - m^2}}$.

Nun ist nach D. R., Seite 199, $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.\,dx$.

Setzen wir diesen Werth von ds in Gl. 2 ein, so folgt

3) $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,.\, dx = \frac{y \,.\, dy}{\sqrt{y^2 - m^2}}$

4) $1 + p^2 = \frac{y^2 \,.\, p^2}{y^2 - m^2}$

5) $y^2 - m^2 + p^2 (y^2 - m^2) = y^2 p^2$

6) $p^2 m^2 = y^2 - m^2$

7) $p m = \pm \sqrt{y^2 - m^2}$

8) $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{m} \sqrt{y^2 - m^2}$

9) $\frac{dy}{\sqrt{y^2 - m^2}} = \pm \frac{1}{m} dx.$

Hieraus folgt nach Gl. 13, Seite 79

10) $l \{ \sqrt{y^2 - m^2} + y \} + lc + \pm \frac{x}{m}.$

In Gleichung 10 hat die Constante lc keinen willkürlichen Werth mehr, weil nach der Bedingung unserer Aufgabe $x = c$ und $y = m$ Coordinaten eines Punktes (0) auf unserer Curve sein sollen. (Vergl. Bemerk. 1, Seite 2.)

Um den Werth der Constanten lc zu ermitteln, setzen wir demnach in Gl. 10 **$x = 0$ und $y = m$.**

Hieraus folgt

11) $lm + lc = 0$, also ist

12) $lc = - lm$, oder $c = \frac{1}{m}.$

Setzen wir diesen Werth von c in Gl. 10 ein, so folgt

13) $\frac{1}{m} \{ \sqrt{y^2 - m^2} + y \} = e^{\pm \frac{x}{m}}$

14) $\sqrt{y^2 - m^2} + y = m \,.\, e^{\pm \frac{x}{m}}$

15) $\sqrt{y^2 - m^2} = m \,.\, e^{\pm \frac{x}{m}} - y$

16) $y^2 - m^2 = m^2 . e^{\pm \frac{2}{m}} - 2 m y e^{\pm \frac{x}{m}} + y^2$

17) $- m^2 = m^2 e^{\pm \frac{2x}{m}} - 2 m y e^{\pm \frac{x}{m}}$.

Multipliciren wir diese Gleichung mit $\frac{e^{\mp \frac{x}{m}}}{m}$, so folgt

18) $- m . e^{\mp \frac{x}{m}} = m e^{\pm \frac{2x}{m}} - 2 y$

19) $2 y = m \left\{ e^{\pm \frac{x}{m}} + e^{\mp \frac{x}{m}} \right\}$

20) $y = m . \frac{e^{\pm \frac{x}{m}} + e^{\mp \frac{x}{m}}}{2}$.

Diese Gleichung ist die Gleichung der Kettenlinie. Vergl. Aufgabe 2, Seite 197.

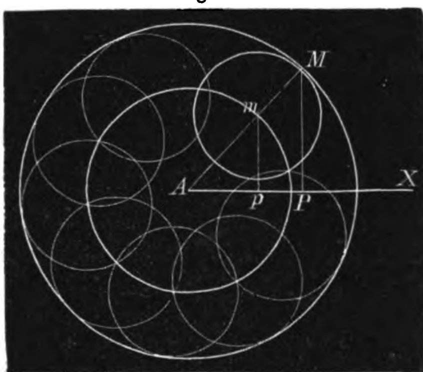
Macht es einen Unterschied, ob man in Gl. 20 $\pm$ und $\mp$ die obern oder untern Zeichen berücksichtigt?

§. 115.

Einhüllungs - Curven.

Denkt man ein System gleichartiger Curven gezeichnet, so nennt man diejenige Curve, welche alle Curven des gedachten Systems berührt, deren **Umhüllungs-Curve.** Ist z. B. ein Kreis Fig. 89 der geometrische Ort der Mittelpunkte eines **Systems von Kreisen,** welche denselben Radius (r) haben, so würden die Curven (die in diesem

Fig. 89.



$Am = \varrho$, $mp = \beta$, $Ap = \alpha$.

Falle wieder Kreise sind), welche alle jene ersteren Kreise berühren, die **Umhüllungs-Curven** der ersteren Kreise genannt.

Es ist leicht denkbar, das ganze System unserer eingehüllten Curven durch **eine einzige** Gleichung auszudrücken. Setzen wir z. B. in diesem speciellen Falle die Mittelpunkts-Coordinaten **eines** dieser eingehüllten Kreise resp. gleich α und β, so ist die Gleichung des betreffenden Kreises

$$1)\ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2.$$

Weil aber der Mittelpunkt dieses Kreises selbst wieder auf einem Kreise liegt, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkt des Coordinaten-Systems liegt, und dessen Radius gleich δ ist, so müssen die Coordinaten α und β folgender Gleichung genügen

$$2)\ \alpha^2 + \beta^2 = \varrho^2, \text{ also}$$

$$3)\ \beta = \sqrt{\delta^2 - \alpha^2}$$ {Der Einfachheit wegen vernachlässigen wir das doppelte Vorzeichen vor $\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}$.

Setzen wir den Werth von β nach Gl. 3 in Gl. 1 ein, so folgt

$$4)\ (x-\alpha)^2 + (y - \sqrt{\varrho^2 - \alpha^2})^2 = r^2.$$

Diese Gleichung stellt offenbar wieder einen von unsern eingehüllten Kreisen dar. Da man aber α jeden beliebigen Werth geben kann*), so kann Gleichung 4 als Gleichung **eines jeden** der eingehüllten Kreise angesehen werden, d. h. **sie ist die Gleichung des Systems derjenigen Kreise, deren Radien gleich r sind und deren Mittelpunkte nach Fig. 89 auf einem Kreise liegen, der mit dem Radius ϱ um den Anfangspunkt des Coordinaten-Systems beschrieben worden sind**; und es erfolgt der Uebergang von dem einen Kreise des Systems zu dem nachfolgenden durch Aenderung von α.

---

*) Man beachte, dass wegen des Ausdruckes $\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}$ die Gleichung 4 keinen geometrischen Sinn mehr haben kann, wenn $\alpha > +\varrho$ oder $\alpha < -\varrho$ ist.

§. 116.

Fortsetzung.

Nehmen wir nun an, es sei die Gleichung

1) $f(x, y, \alpha) = 0$

gegeben, so wird diese Gleichung — falls sie überhaupt eine geometrische Bedeutung hat — im Allgemeinen eine ganz bestimmte Curve ausdrücken, so lange α einen ganz bestimmten constanten Werth behält

Wenn man dagegen annimmt, dass die (in Bezug auf x und y) constante Grösse α continuirlich ihren Werth ändern kann, **so lässt sich nach §. 115 leicht erkennen, dass durch Gl. 1 ein System von gleichartigen Curven ausgedrückt wird.** Die Umhüllungs-Curve dieses Systems ist nun offenbar der Art, dass für jeden Punkt derselben **nicht allein** x und y, **sondern auch** $\frac{dy}{dx}$ oder p gleich sind, **sowohl** den Werthen von x und y, **als auch** dem Werthe von p für den Berührungs-Punkt der entsprechenden eingehüllten Curve. Hieraus folgt, dass die Umhüllungs-Curve **sowohl** der Gleichung 1, **als auch** ihrem Differential genügen muss, d. h. sie muss folgenden beiden Gleichungen genügen

2) $f(x, y, \alpha) = 0$

3) $\frac{\partial f(x, y, \alpha)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f(x, y, \alpha)}{dx} = 0.$*)

---

*) Eliminiren wir α aus den Gleichungen 2 und 3, so entsteht eine Differential-Gleichung von der Form

$$\varphi(X, y, p) = 0.$$

Lösen wir dieselbe auf, so erhalten wir im Allgemeinen eine **Integral-Gleichung** und eine **besondere Lösung**. Die Integral-Gleichung hat dann die Form von Gleichung 2 resp. 1, und die Integrations-Constante entspricht der Grösse a, während die besondere Lösung der Umhüllungs-Curve entspricht.

Differentiiren wir aber Gl. 2 nach α, so folgt*)

$$4)\ \frac{\partial f(x,y,\alpha)}{dy}\cdot\frac{dy}{d\alpha}+\frac{\partial f(x,y,\alpha)}{dx}\cdot\frac{dx}{d\alpha}+\frac{\partial f(x,y,\alpha)}{d\alpha}=0$$

$$5)\ \frac{\partial f(x,y,\alpha)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d\alpha}+\frac{\partial f(x,y,\alpha)}{dx}\cdot\frac{dx}{d\alpha}+\frac{\partial f(x,y,\alpha)}{d\alpha}=0$$

$$6)\ \left\{\frac{\partial f(x,y,\alpha)}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f(x,y,\alpha)}{dx}\right\}\cdot\frac{dx}{d\alpha}+\frac{\partial f(x,y,\alpha)}{d\alpha}=0.$$

Nach Gl. 3 ist das erste Glied in Gl. 6 gleich Null. Demnach folgt aus den Gleichungen 3 und 6

$$7)\ \frac{\partial f(x,y,\alpha)}{d\alpha}=0.$$

Berücksichtigen wir jetzt, dass die Umhüllungs-Curve den Gleichungen 1 oder 2 und 3 genügen muss, und ferner, dass Gl. 7 aus Gl. 1 oder 2 und 3 abgeleitet ist, so folgt, dass die etwaige Umhüllungs-Curve ebenfalls den Gleichungen 1 und 7 genügen muss, d. h.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f(x,y,\alpha)=0 \\ 7)\ \dfrac{\partial f(x,y,\alpha)}{d\alpha}=0 \end{array}\right\}$$ Gleichungen, denen die etwaige Umhüllungs-Curve genügen muss.

Wenn also wirklich eine Umhüllungs-Curve existirt, so erhalten wir deren Gleichung dadurch, dass wir aus den beiden Gleichungen 1 und 7, α eliminiren.

---

*) Man beachte, dass wir durch eine Aenderung von α, von einer eingehüllten Curve des betreffenden Systems (Gl. 1 oder 2) zu der nächstfolgenden übergehen, dass also in Folge dessen auch x und y (die Coordinaten des Berührungspunktes unserer Umhüllungs-Curve mit der betreffenden eingehüllten Curve) sich ändern müssen.

Diese Differentiationen sind den Differentiationen analog, durch welche wir D. R., Seite 214, zu den Gleichungen 4 und 5 gelangt sind. Dies wird vielleicht noch mehr einleuchten, wenn man bedenkt, dass **jede Curve die Umhüllungs-Curve ihrer Krümmungskreise ist.**

§. 117.

Fortsetzung.

Im vorigen §. haben wir gesehen, dass eine **etwaige** Umhüllungs-Curve den Gleichungen 1 und 7 genügen muss; **indessen folgt daraus nicht mit Nothwendigkeit, dass den Gleichungen 1 und 7 stets eine Umhüllungs-Curve entspricht.** Dies folgt schon daraus, dass nicht jedes System von gleichartigen Curven eine Umhüllungs-Curve besitzt. Denken wir uns z. B. ein System von concentrischen Kreisen oder von Parabeln, die der Gleichung $y^2 = ax$ entsprechen (vergl. Fig. 93, Seite 316), so sieht man ohne Weiteres, dass diese Curven-Systeme überall keine Umhüllungs-Curve haben können. Wenn wir also nach Anleitung des vorigen §. durch Elimination von α eine neue Gleichung aufgestellt haben, so handelt es sich immer noch darum, **zu untersuchen, ob diese neue Gleichung wirklich die Gleichung einer Umhüllungs-Curve ist.** Zu dem Ende beachte man, dass jedem Punkte einer etwaigen Umhüllungs-Curve eine eingehüllte Curve entsprechen muss, weil jeder der genannten Punkte **ein Berührungspunkt** zwischen der etwaigen Umhüllungs-Curve und der **entsprechenden** eingehüllten Curve ist (vergl. S. 308 und Bemerkung 1). Diese eingehüllte Curve **unterscheidet sich** aber von den übrigen eingehüllten Curven des eingehüllten Curven-Systems **dadurch,** dass in der Gleichung (1 oder 2) des Systems die Grösse α für sie einen **ganz bestimmten Werth hat.** Hieraus folgt, dass jedem Punkte der etwaigen Umhüllungs-Curve ein ganz bestimmter Werth von α entsprechen muss (vergl. Bemerk. 1). Da nun in den Gl. 1 und 7, x und y laufende Coordinaten der etwaigen Umhüllungs-Curve sind, so müssen event. jedem Werthe von α zwei ganz bestimmte Werthe von x und y entsprechen. Man

kann demnach folgender Massen untersuchen, ob den Gleichungen 1 und 7 eine Umhüllungs-Curve entspricht oder nicht.

Man eliminire nämlich aus den Gleichungen 1 und 7 y (oder x) und untersuche, ob in der dadurch entstehenden Gleichung x (oder y) eine Function von α ist. **Ist dies der Fall, so entspricht diesen Gleichungen wirklich eine Umhüllungs-Curve; ist es dagegen nicht der Fall, so entspricht ihnen keine Umhüllungs-Curve**, sie bestimmen vielmehr eine bestimmte Curve aus dem gegebenen System (vergl. Bemerkung 2).

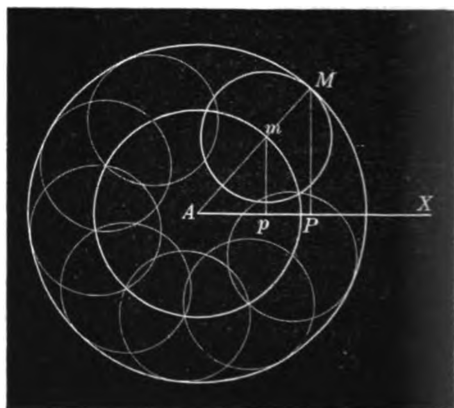
Bemerkung 1. Um das Vorstehende durch ein Beispiel zu erläutern, nehme man in nebenstehender Figur 90 auf der Umhüllungs-Curve einen beliebigen Punkt M an. Der Augenschein lehrt dann

I. dass die Umhüllungs-Curve in dem Punkte M eine der eingehüllten Curven (Kreise in diesem Falle) berührt, und dass

II. durch diesen Punkt M die berührte eingehüllte Curve (Kreis) bestimmt wird.

Ist aber die Lage des berührten Kreises bestimmt, so ist auch sein Mittelpunkt und deshalb auch dessen Abscisse $Ap = \alpha$ bestimmt; also muss α von der Lage des Punktes M, d. h. von dessen Coordinaten x oder y abhängen.

Fig. 90.



$AP = x$, $MP = y$,
$Ap = \alpha$.

Bemerkung 2. Wird ein System von Parabeln durch die Gleichung

1) $y^2 = \alpha x$

bestimmt, und wollte man nach den vorstehenden §§. untersuchen, ob diesem Systeme eine Umhüllungs-Curve angehört, und event. die Gleichung derselben aufstellen, so müsste man Gl. 1 nach α differentiiren. Hieraus würde folgen

2) $0 = x$.

Um nun x zu eliminiren, setzen wir nach Gl. 2 und 1

3) $\alpha = \frac{y^2}{x} = \frac{y^2}{0} = \infty$.

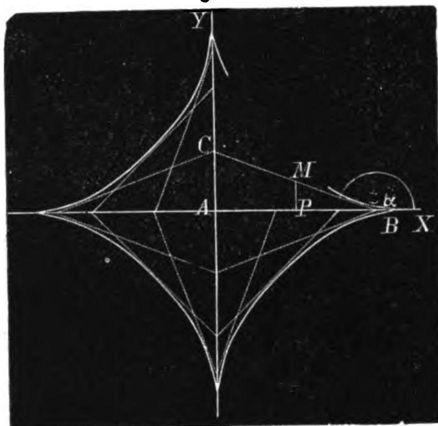
Demnach ist α keine Function von y, und die Gleichungen 1 und 2 bezeichnen keine Umhüllungs-Curve, so dass das System von Parabeln Gl. 1 überhaupt keine Umhüllungs-Curve besitzt. (Siehe Fig. 93, Seite 316.)

§. 118.

Fortsetzung. — Aufgabe.

Aufgabe 16. Ein System von geraden Linien, Fig. 91, ist bestimmt durch die Bedingung, dass die Stücke derselben, welche zwischen den Coordinaten-Achsen liegen, dieselbe Grösse m haben. Man soll die Gleichung der Umhüllungs-Curve dieses Systems aufstellen..

Fig. 91.



BC = m.

Auflösung. Zunächst handelt es sich darum, für das System unserer geraden Linien eine Gleichung aufzustellen. Zu dem Ende beachten wir **irgend eine** von diesen Linien, etwa die Linie BC, und beziehen einen beliebigen Punkt (M) dieser Linie auf unser Coordinaten-System; dann ist

$$1)\quad y = BM \,.\, \sin\alpha$$

$$2)\quad x = AB - BP = -m \,.\, \cos\alpha + BM \,.\, \cos\alpha.$$

Aus Gl. 2 folgt

$$3)\quad BM = \frac{x + m \,.\, \cos\alpha}{\cos\alpha}.$$

Setzen wir den Werth von BM nach Gl. 3 in Gl. 1 ein, so folgt

$$4)\quad y = \sin\alpha \left\{\frac{x}{\cos\alpha} + m\right\}.$$

Gleichung 4 ist die Gleichung der **einzelnen** Linie BC, so lange $\alpha = CBX$ sein soll. **Setzen wir aber voraus, dass** α **alle Werthe von 0 bis** 2π **annehmen kann, so wird Gl. 4 die Gleichung des gegebenen Systems.**

Unsere Aufabe ist also darauf zurückgeführt, die Umhüllungs-Curve desjenigen Systems zu ermitteln, welches der Gl. 4 enspricht. Zu dem Ende differentiiren wir Gl. 4 nach α. Hierdurch erhält man

$$5)\quad 0 = \frac{x}{\cos^2\alpha} + m \, . \cos\alpha.$$

Wir müssen jetzt α aus den Gleichungen 4 und 5 eliminiren. Zu dem Ende setzen wir nach Gl. 5

$$6)\quad 0 = x + m \, . \cos^3\alpha$$

$$7)\quad \cos\alpha = -\sqrt[3]{\frac{x}{m}}$$

$$8)\quad \sin\alpha = -\sqrt{1 + \left(\frac{x}{m}\right)^{2/3}}$$

Setzen wir die Werthe von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ nach Gl. 7 und 8 in Gl. 4 ein, so folgt

$$9)\quad y = \left\{ - x \, . \frac{m^{1/3}}{x^{1/3}} + m \right\} . \sqrt{1 - \frac{x^{2/3}}{m^{2/3}}}$$

$$10)\quad y = m \left\{ 1 - \frac{x^{2/3}}{m^{2/3}} \right\} . \sqrt{1 - \frac{x^{2/3}}{m^{2/3}}}$$

$$11)\quad y = m \left\{ 1 - \frac{x^{2/3}}{m^{2/3}} \right\}^{3/2}.$$

$$12)\quad \left(\frac{y}{m}\right)^{2/3} = 1 - \frac{x^{2/3}}{m^{2/3}}$$

$$13)\quad \left(\frac{y}{m}\right)^{2/3} + \left(\frac{x}{m}\right)^{2/3} = 1.$$

$$14)\quad y^{2/3} + x^{2/3} = m^{2/3}$$

(13 und 14:) Gleichungen für Umhüllungs-Curven des Systems.

Die Gleichung 13 oder 14 ist also die Gleichung der Umhüllungs-Curve für unser Linien-System, **wenn überhaupt eine Umhüllungs-Curve möglich ist.** Dies könnte man nach §. 118 aber leicht nachweisen dadurch, dass man aus den Gleichungen 4 und 5 x eliminirt und dass dann y eine Function von α ist.

In dem vorliegenden Falle liess sich schon aus der Natur der Aufgabe unmittelbar kennen, dass eine Umhüllungs-Curve möglich sei; wir können deshalb die Prüfung der Möglichkeit einer Umhüllungs-Curve, wie sie nach §. 118 ausgeführt wird, sparen.

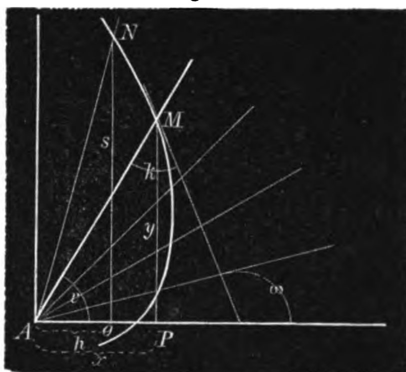
Welches ist die Gleichung der Umhüllungs-Curve für alle Linien, die der Gleichung 8, Seite 277, entsprechen, wenn c alle möglichen constanten Werthe annehmen kann?

§. 119.

Trajectorien-Aufgaben.

Wenn ein System von Curven, welche durch eine gemeinschaftliche Gleichung, etwa $f(x, y, \alpha)$ bestimmt ist, von einer andern Linie nach einem gegebenen Gesetze geschnitten wird, so nennt man die schneidende Curve **die Trajectorie des gegebenen Systems.** Unter den Trajectorien sind besonders diejenigen bemerkenswerth, welche dadurch entstehen, dass ein System von Curven unter einem gegebenen Winkel geschnitten wird. Ist dieser Winkel ein rechter Winkel, so nennt man die Trajectorie eine **orthogonale Trajectorie.**

Fig. 92.



Aufgabe 17. Ein System von geraden Linien Fig. 92 ist bestimmt durch die Gleichung

$$1)\ y = \alpha x.$$

Man soll die Gleichung der Trajectorie aufstellen, welche alle diese geraden Linien unter dem gegebenen Winkel k schneidet.

Auflösung. Bezeichnen wir die Coordinaten der Trajectorie durch x und y, und nehmen wir an, dass M ein Punkt derselben sei, so ist nach den Bezeichnungen der Figur

2) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \omega.$

Ferner ist $\omega = v + k$, also ist

3) $\operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{tg} v + \operatorname{tg} k}{1 - \operatorname{tg} v \,.\, \operatorname{tg} k}.$

Nun ist (nach Gl. 1) für jeden Punkt der Trajectorie

4) $\operatorname{tg} v = \alpha.$

Ausserdem wollen wir setzen

5) $\operatorname{tg} k = m.$

Schalten wir nach den Gl. 4 und 5 die Werthe von $\operatorname{tg} v$ ung $\operatorname{tg} k$ in Gl. 3 ein, so folgt

6) $\operatorname{tg} \omega = \frac{\alpha + m}{1 - \alpha \,.\, m}.$

Setzen wir nach Gl. 6 den Werth von $\operatorname{tg} \omega$ in Gl. 2 ein, so folgt

7) $\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha + m}{1 - \alpha\, m}.$

Weil nun im Punkte m, als **Durchschnittspunkt** unserer Trajectorie mit der entsprechenden Graden unseres Systems (Gl. 1), die Coordinaten für die schneidende und geschnittene Linie gleich sein müssen, so folgt aus Gl. 1 und 4 $\alpha = \frac{y}{x}$. Setzen wir diesen Werth von α in Gl. 7 ein, so folgt

8) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} + m}{1 - m\frac{y}{x}}$

9) $\frac{dy}{dx} = \frac{y + mx}{x - my}$

10) $x\,dy - m\,y\,dy - y\,dx - m\,x\,dx = 0.$

Wir erhalten also die Gleichung unserer gesuchten Trajectorie durch Auflösung der Differential-Gleichung 10. Diese Gleichung ist **homogen.** Wir setzen also nach §. 99, Seite 253 ff.

11) $y = u\,x;\; dy = u\,dx + x\,du.$

Setzen wir nach Gl. 11 die Werthe von y und dy in Gl. 10 ein, so folgt

12) $x(u\,dx + x\,du) - m\,u\,x\,(u\,dx + x\,du) - u\,x\,dx - m\,x\,dx = 0$

13) $u\,dx + x\,du - m\,u^2\,dx - m\,u\,x\,du - u\,dx - m\,dx = 0$

14) $u\,dx + x\,du - m\,u^2\,dx - m\,u\,x\,du - u\,dx - m\,dx = 0$

15) $(u - mu^2 - u - m)\,dx = (-x + m\,u\,x)\,du$

16) $m\,(1 + u^2)\,dx = x\,(1 - m\,u)\,du$

17) $m\,.\,\frac{dx}{x} = \frac{1 - m\,u}{1 + u^2}\,du$

18) $m\,.\,l\,x = \text{arc tg}\,u - \frac{m}{2}\,l(1 + u^2) + c.$

Setzen wir hierin den Werth von u nach Gl. 11, so folgt

19) $m\,.\,l\,x = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} - \frac{m}{2}\,l\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + c.$

20) $m\,.\,l\,x + \frac{m}{2}\,l\,\frac{x^2 + y^2}{x^2} = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} + c.$

21) $m\,l\,\sqrt{x^2 + y^2} = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} + c.$

Gleichung 21 ist die Gleichung einer **Exponential-Spirale.** (Vergl. Bemerkung 2.)

Bemerkung 1. Aus Gl. 21 ersieht man, dass wegen des **beliebigen Werthes** der Constanten c unendlich viel Trajectorien unserer Aufgabe genügen müssen. Man erkennt aber auch, dass jede Unbestimmtheit aus der Aufgabe beseitigt wäre, wenn man von vorn herein der Integrations-Constante einen ganz bestimmten Werth beigelegt hätte. Dies

entspricht im geometrischen Sinne der Forderung, dass unsere Curve (Fig. 92) durch einen bestimmten Punkt, etwa durch den Punkt N (dessen Coordinaten x = h und y = s sein mögen), gehen soll. Damit nämlich dieser Forderung genügt wird, muss in Gl. 21 y = s sein, wenn x = h ist. Hierdurch entsteht die Gleichung

$$22)\quad m\, l\sqrt{h^2+s^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{s}{h}+c.$$

Eine Gleichung, durch welche der Werth von c bestimmt wird.

Bemerkung 2. Um zu zeigen, dass Gl. 21 die Gleichung einer Exponential-Spirale ist, gehe man zu Polar-Coordinaten über und setze demgemäss

$$23)\quad r=\sqrt{x^2+y^2},\ \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

Hierdurch verwandelt sich Gl. 21 in folgende Gleichung

$$24)\quad m\,.\,l r = \alpha + c$$

$$25)\quad l r = \frac{\alpha+c}{m}$$

$$26)\quad r = e^{\frac{\alpha+c}{m}}.$$

Setzt man hierin m = 1, d. h. nach Gl. 5, $k=\frac{\pi}{4}$ und c = 0, so geht Gl. 26 über in

$$27)\quad r = e^{\alpha}$$ } vergl. D. R., §. 79, Seite 139 und 140.

Bemerkung 3. Soll die Trajectorie unser Linien-System unter einem rechten Winkel schneiden, so wird sie zu einem Kreise. Um dies zu zeigen, setzten wir, Fig. 92, k = 90°. Dann ist

$$28)\quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\omega = -\frac{1}{\operatorname{tg}v} = -\frac{1}{\alpha} = -\frac{x}{y}.$$ } Siehe Gl. 4 u. 1.

Hieraus folgt weiter

$$29)\quad y\,dy + x\,dx = 0$$

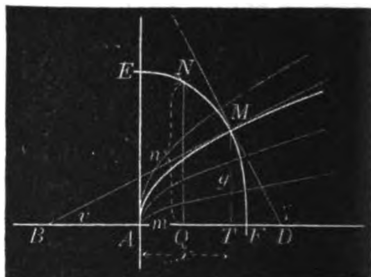
$$30)\quad y^2 + x^2 = C.$$ } Gleichung des Kreises. w. z. b. w.

Aufgabe 18. Ein System von Parabeln Fig. 93 ist bestimmt durch die Gleichung

$$1)\quad y^2 = \alpha x.$$

Man soll diejenige rechtwinklige Trajectorie dieses Systems ermitteln, welche durch einen Punkt (N) geht, dessen Coordinaten resp. m und n sind.

Fig. 93.



Auflösung. Wenn M ein beliebiger Punkt der gesuchten Trajectorie ist, so ist nach der Bedingung unserer Aufgabe $\measuredangle BMD = \frac{\pi}{2}$, also

$$2)\quad \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{ctg} v.$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten unserer Trajectorie durch x und y, so ist nach D. R., Seite 32, Gl. 2

$$3)\quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{dy}{dx}.$$

Ferner ist nach Gl. 1

$$4)\quad \operatorname{tg} v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{x}}$$

$$5)\quad \operatorname{ctg} v = 2\sqrt{\frac{x}{\alpha}}.$$

Setzen wir die Werthe von $\operatorname{tg}\gamma$ und $\operatorname{ctg} v$ nach den Gleichungen 3 und 5 in Gl. 2 ein, so folgt

$$6)\quad \frac{dy}{dx} = -2\sqrt{\frac{x}{\alpha}}.$$

Setzen wir hierin den Werth von α nach Gl. 1 und berücksichtigen wir, dass wir für den Punkt M als Durchschnittspunkt der Trajectorie mit der entsprechenden Parabel $y = \mathrm{y}$ setzen dürfen, so folgt

$$7)\quad \frac{dy}{dx} = -2\sqrt{\frac{x}{\frac{y^2}{x}}} = -2\,\frac{x}{y}.$$

Hierdurch ist unsere Aufgabe auf die Lösung der Differential-Gleichung 7 zurückgeführt. Aus Gl. 7 folgt weiter

$$8)\quad y\,dy = -2\,x\,dx$$

$$9)\quad y^2 = -2\,x^2 + C$$

$$10)\quad y^2 + 2\,x^2 = C.$$

In Gl. 10 ist der Werth der Constanten C noch unbestimmt, **in sofern als Gl. 10 durch Integration aus Gl. 8 entstanden ist.**

Weil aber der Aufgabe gemäss unsere Trajectorie durch einen Punkt (N) gehen soll, dessen Coordinaten resp. m und n sind, so muss in Gl. 10

11) $y = n$

sein, wenn wir setzen $x = m$.

Demnach folgt aus Gl. 10

12) $n^2 + 2m^2 = C$.

Hierdurch ist der Werth von C vollkommen bestimmt. Setzen wir denselben in Gl. 10 ein, so folgt

13) $y^2 + 2x^2 = n^2 + 2m^2$.

Die gesuchte Trajectorie ist demnach eine Ellipse, welche der Gleichung 13 entspricht.

Bemerkung. Multipliciren wir Gleichung 13 mit dem Factor $\frac{n^2 + 2m^2}{2}$ so folgt

14) $\frac{n^2 + 2m^2}{2} y^2 + (n^2 + 2m^2) x^2 = \frac{n^2 + m^2}{2} . (n^2 + m^2)$.

Gleichung 14 hat die Form $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 . b^2$. Demnach sind die Achsen unserer Ellipse Gl. 13 oder 14 resp. gleich $\sqrt{\frac{n^2 + 2m^2}{2}}$ und $\sqrt{n^2 + 2m^2}$, und zwar fällt ihre grosse mit der Ordinaten-Achse und ihre kleine mit der Abscissen-Achse zusammen.

Welche Form würden wohl die Trajectorien eines Systems von Ellipsen haben, deren numerische Excentricitäten gleich sind, und deren Achsen in ihren Richtungen zusammen fallen?

§. 120.

Aufgaben aus der Mechanik.

Aufgabe 19. In einem Gefässe befindet sich eine Flüssigkeit. Dasselbe rotirt mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit (ω) um eine verticale Achse. Man soll die Form der Oberfläche nach dem Eintritt des Beharrungszustandes bestimmen.

Auflösung. Die Oberfläche, die hier in Frage kömmt, ist offenbar eine Rotationsfläche, deren Rotations-Achse mit der Achse zusammenfällt, um welche die Flüssigkeit rotirt. Es handelt sich also nur darum, die Gleichung der Meridianlinie zu bestimmen. Hierbei stützen wir uns auf einen Satz aus der Hydraulik, nach welchem die Resultante sämmtlicher Kräfte, welche auf einen beliebigen Punkt der Oberfläche wirken, auf der Oberfläche stehen muss.

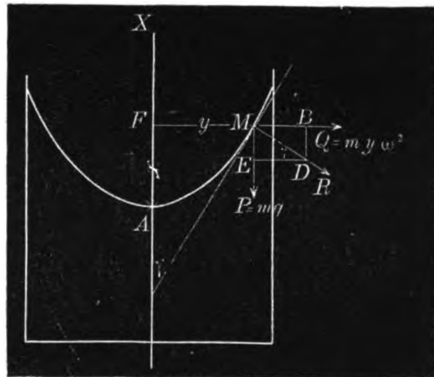
Nun wirken hier auf jeden materiellen Punkt zwei Kräfte, nämlich die Centrifugalkraft und die Schwerkraft. Setzen wir die Masse eines solchen Punktes gleich m, so ist

die Centrifugalkraft $= m \varrho \omega^2$,

die Schwerkraft $= m g$.

Beziehen wir nun die gesuchte Meridianlinie auf ein Coordinaten-System, dessen Abscissen-Achse mit der Dreh-Achse zusammenfällt, dessen Anfangspunkt wir vor der Hand aber noch unbestimmt lassen können, so ist entsprechend den Bezeichnungen von Fig. 94

Fig. 94.



2) $Q = m y \omega^2$.

3) $P = mg$.

Weil nun, nach dem angeführten Satze aus der Hydraulik, die Resultante R ⊥ zu der Meridianlinie gerichtet ist, so ist $\measuredangle EDM = \measuredangle \gamma$, also

$$4)\quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \gamma = \frac{P}{Q}.$$

Setzen wir in Gl. 4 die Werthe von P und Q nach Gl. 2 und 3 ein, so folgt

$$5)\ \frac{dy}{dx} = \frac{mg}{m\,y\,\omega^2} = \frac{g}{y\,.\,\omega^2}.$$

In Gleichung 5 ist unsere Aufgabe zurückgeführt auf die Lösung einer Differential-Gleichung. Aus dieser Gleichung 5 folgt aber

$$6)\ y\,dy = \frac{g}{\omega^2}\,dx.$$

$$7)\ y^2 = \frac{2g}{\omega^2}\,x + C.$$

Diese Gleichung ist offenbar die Gleichung einer **Parabel,** deren **Parameter** $= \frac{2g}{\omega^2}$ **ist,** und **die gesuchte Oberfläche ist das entsprechende Rotations-Paraboloid.**

Bemerkung. Wir haben in der vorstehenden Auflösung angenommen, dass die Abscissen-Achse zusammenfalle mit der Rotations-Achse; über die Lage des Anfangspunktes aber haben wir (absichtlich) Nichts bestimmt. Daher rührt es, dass in Gl. 7 die Constante C einen willkürlichen Werth haben kann.

Bestimmen wir die Lage des Anfangspunktes auf der Abscissen-Achse, so wird dadurch C bestimmt. Nehmen wir z. B. an, dass der Anfangspunkt des Coordinaten-Systems in den Scheitelpunkt der Parabel Gl. 17 fällt,

so wird $y = 0$, wenn man $x = 0$ setzt.

Unter dieser Voraussetzung ist also auch C gleich 0, und Gl. 7 geht über in

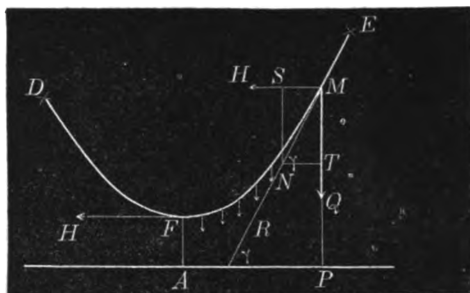
$$8)\ y^2 = \frac{2g}{\omega^2}\,x.$$

Aufgabe 20. Ein vollkommen biegsames Seil (Fig. 95) ist in den Punkten D und E befestigt, und so belastet, **dass auf gleiche horizontale Projectionen gleiche Lasten kommen.** Man soll die Gleichung der Curve aufstellen, welche unter dieser Voraussetzung von unserem Seile gebildet wird.

Auflösung. Es ist einleuchtend, dass die Spannungen (Kräfte) in allen Punkten des Seiles mit der Richtung der Tangente zusammenfallen. **Hieraus folgt, dass die Spannung im**

tiefsten Punkte F horizontal gerichtet ist. Ist diese horizontale Spannung gleich H, so werden die Spannungen im Seil-Ende E F nicht geändert, wenn wir das Seil im Punkte F durchschneiden, und dafür in F die Kraft H in horizontaler Richtung wirken lassen. Etwas Analoges gilt in Beziehung auf das Seil-Ende D F.

Fig. 95.



$Q = \mu x$.

Beziehen wir nun unsere Seil-Curve auf ein Coordinaten-System, dessen Abscissen-Achse eine horizontale Lage hat, und dessen Anfangspunkt vertical unter dem Punkte F liegt, und setzen wir die Belastung für die Einheit der horizontalen Projection unseres Seiles $= \mu$, so ergiebt sich aus den vorstehenden Betrachtungen, dass in einem beliebigen Punkte (M) unseres Seiles zwei Kräfte wirken

eine horizontale Kraft $= H$,
eine verticale Kraft $Q = \mu x$.

Die Spannung im Punkte M ist natürlich gleich der Resultante der genannten beiden Kräfte H und Q ($= \mu x$) und tangential zur Seil-Curve gerichtet. Es ergiebt sich also nach den Bezeichnungen unserer Figur 95

$$1)\quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\mu x}{H}.$$

Ferner ist nach D. R., Seite 32,

$$2)\quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{dy}{dx}.$$

Eliminiren wir $\operatorname{tg}\gamma$ aus Gl. 1 und 2, **so folgt für die gesuchte Curve folgende Differential-Gleichung**

$$3)\ \frac{dy}{dx} = \frac{\mu x}{H}.$$

$$4)\ dy = \frac{\mu}{H} x . dx.$$

$$5)\ y = \frac{\mu}{2H} x^2 + C.$$

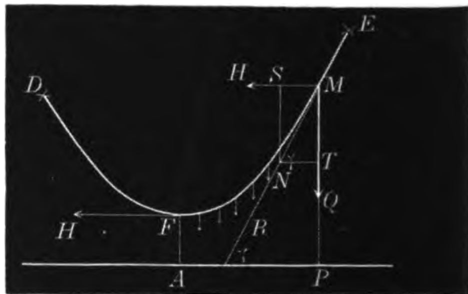
$$6)\ y^2 = \frac{2H}{\mu} y - \frac{2H}{\mu} C.$$

Unsere Seil-Curve (Spannungs-Curve) ist also in diesem Falle eine Parabel, deren Parameter gleich $\frac{2H}{\mu}$ ist.

Wie lässt sich der Werth des Parameters durch Worte ausdrücken? Der unbestimmte Werth von C rührt in diesem Falle daher, dass die Lage der Abscissen-Achse nicht bestimmt ist. Wir haben nämlich nur angenommen, dass sie horizontal sein soll. Welchen Werth erhält C, wenn die Abscissen-Achse Fig. 95 durch F geht?

Aufgabe 21. Ein vollkommen biegsamer Faden ist in den Punkten D und E (Fig. 96) befestigt und gleichmässig belastet, d. h. so, **dass auf gleiche Seil-Längen gleiche Belastungen kommen.** Man soll die Gleichung der Seil-Curve aufstellen, wenn die Last für die Längen-Einheit $= \mu$ ist.

Fig. 96.



$Q = \mu$.

Auflösung. Wir beziehen unsere Curve auf ein Coordinaten-System, dessen Abscissen-Achse horizontal ist, und dessen Anfangspunkt normal unter dem tiefsten Punkte F liegt. Nehmen wir nun auf der Curve einen beliebigen Punkt M, und setzen wir die Länge des Bogens FM = s, so gelangen wir

durch ähnliche Betrachtungen, wie wir sie bei der Auflösung von Aufgabe 20 angestellt haben, zu dem Resultate, dass im Punkte M eine **horizontale Kraft** und eine **verticale Kraft** wirkt.

Die horizontale Kraft bezeichnen wir mit H,

Die verticale Kraft, Q, ist $= \mu$ s.

Dann ist

1) $\operatorname{tg}\gamma = \frac{Q}{H} = \frac{\mu s}{H}$.

2) $\operatorname{tg}\gamma = \frac{dy}{dx} = p.$ } nach D. R., Seite 32.

Eliminiren wir aus Gl. 1 und 2 den Werth von $\operatorname{tg}\gamma$, so folgt

3) $p = \frac{\mu}{H} s.$

Die Lösung unserer Aufgabe ist also auf die Auflösung der Differential-Gleichung 3 zurückgeführt.

Aus Gleichung 3 folgt nun durch Differentiation

4) $dp = \frac{\mu}{H} ds = \frac{\mu}{H} \sqrt{1+p^2}.dx.$

5) $\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\mu}{H}.dx.$

} Man beachte, dass μ und H constante Grössen sind.

Hieraus folgt nach Gl. 10, Seite 82,

6) $l\left\{\sqrt{1+p^2}+p\right\} = \frac{\mu}{H}x + C.$

In Gl. 6 ist C eine **willkürliche** Constante, insofern als Gl. 6 durch Integration von Gl. 5 entstanden ist, weil aber der Anfangspunkt des Coordinaten-Systems, auf welches wir unsere Seil-Curve beziehen, vertical unter dem tiefsten Punkt F liegen soll, und weil in diesem Punkte die Tangente horizontal, also $p = 0$ ist, so muss

7) **$p = 0$ sein, wenn wir setzen $x = 0$.**

Setzen wir diese Werthe von p und x in Gleichung 6 ein, so folgt

8) $C = 0.$ (Vergl. Seite 2.)

Hiernach geht jetzt Gl. 6 in folgende Gleichung über

$$9)\quad l\left\{\sqrt{1+p^2}+p\right\}=\frac{\mu}{H}x.$$

$$10)\quad \sqrt{1+p^2}+p=e^{\frac{\mu}{H}x}.$$

$$11)\quad \sqrt{1+p^2}=e^{\frac{\mu}{H}x}-p.$$

$$12)\quad 1+p^2=e^{2\frac{\mu}{H}x}-2p\,.\,e^{\frac{\mu}{H}x}+p^2.$$

$$13)\quad 1=e^{2\frac{\mu}{H}x}-2p\,.\,e^{\frac{\mu}{H}x}.$$

Multipliciren wir Gl. 13 mit $e^{-\frac{\mu}{H}x}$ so folgt

$$14)\quad e^{-\frac{\mu}{H}x}=e^{\frac{\mu}{H}x}-2p.$$

$$15)\quad 2p=e^{\frac{\mu}{H}x}-e^{-\frac{\mu}{H}x}.$$

$$16)\quad 2\,dy=\left\{e^{\frac{\mu}{H}x}-e^{-\frac{\mu}{H}x}\right\}.dx.$$

Hieraus folgt nach Gl. 8, Seite 6,

$$17)\quad 2y=\frac{H}{\mu}\left\{e^{\frac{\mu}{H}x}+e^{-\frac{\mu}{H}x}\right\}+C.$$

$$18)\quad y=\frac{H}{\mu}\cdot\frac{e^{\frac{\mu}{H}x}+e^{-\frac{\mu}{H}x}}{2}+\frac{C}{2}.$$

Bestimmen wir nun die Lage der Abscissen-Achse so, dass $y=\frac{H}{\mu}$ ist, wenn $x=0$, so ist auch $C=0$.

Hiernach geht Gl. 18 in folgende Gleichung über

$$19)\ y = \frac{H}{\mu} \cdot \frac{e^{\frac{\mu}{H}x} + e^{-\frac{\mu}{H}x}}{2}.$$

Setzt man $\frac{H}{\mu} = m$, so erhält man statt Gl. 19

$$20)\ y = m \cdot \frac{e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}}{2}.$$ Vergl. D. R., Seite 131.

Bemerkungen.

1) In D. R., Seite 131, haben wir schon die Curve, welche der Gl. 19 oder 20 genügt, Kettenlinie genannt. Dort verbanden wir mit dieser Benennung **blos den Begriff des Namengebens**, während wir jetzt wissen, dass es diejenige Curve ist, welche durch einen überall **gleich dichten und gleich dicken, vollkommen biegsamen, frei hängenden** Faden gebildet wird. Man nennt sie zum Unterschied von den übrigen Kettenlinien die **gemeine Kettenlinie.**

2) Man kann eine unendliche Zahl von Kettenlinien erzeugen, dadurch, dass man über die ganze Länge eines vollkommen biegsamen Fadens die Belastung nach verschiedenen Gesetzen vertheilt.

3) Die Kettenlinien finden unter Anderm in der Gewölbetheorie als **Spannungs-Curven** eine wichtige Anwendung.

Anhang.

Fragen und Aufgaben zur Wiederholung und zur Anleitung beim Selbst-Studium.

1) Was ist ein Integral? Was versteht man unter Integrations-Constante, und welche Bedeutung hat sie?

2) Was ist ein allgemeines Integral, und was ist ein besonderes Integral?

3) Was ist ein bestimmtes Integral, und was versteht man unter den Grenzen eines bestimmten Integrals?

4) Welche geometrische Bedeutung kann man einem bestimmten Integral beilegen?

5) Man soll zeigen, dass man ein bestimmtes Integral als Summe auffassen kann.

6) Worin stimmt das besondere Integral mit dem bestimmten Integral überein?

7) Man soll folgende Fundamental-Sätze der Integral-Rechnung beweisen:

$$\int A\,\varphi x\,.\,dx = A\int \varphi x\,.\,dx.$$

$$\int(\varphi x\,.\,dx + \psi x\,.\,dx + \chi x\,.\,dx) = \int \varphi x\,.\,dx + \int \psi x\,.\,dx + \int \chi x\,.\,dx.$$

8) Man soll beweisen, dass

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x + C = -\text{arc}\cos x + C'$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C.$$

9) In welchem Falle ist die Formel $\int m^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ nicht anwendbar, und welche Formel tritt dann für sie an die Stelle?

10) Wie kann man die scheinbare Ausnahme, welche die Formel

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

erleidet, wenn $m = -1$ ist, erklären?

11) Wie verfährt man, um eine Differential-Function zu integriren, wenn die Integration sich nicht **unmittelbar** nach den Fundamental-Formeln von Seite 5 und 6 ausführen kann?

12) Man soll beweisen, dass $\int u\,dv = uv - \int v\,du + C$.

13) Worauf muss man besonders Rücksicht nehmen bei Anwendung der Formel

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C.$$

14) Welche Methode kann man im Allgemeinen anwenden, um **echt gebrochene** rationale algebraische Functionen zu integriren?

15) Wie verfährt man, um die Integration einer **unecht gebrochenen** rationalen algebraischen Function auf die Integration einer ganzen und einer echt gebrochenen rationalen algebraischen Function zurückführen?

16) Ist es unter allen Umständen möglich, die Integration einer echt gebrochenen rationalen algebraischen Function auszuführen?

17) Welche drei Fälle kann man bei der Integration der Function $\frac{dx}{x^2 + px + q}$ unterscheiden?

18) Ist es unter allen Umständen zweckmässig oder nothwendig, eine gebrochene rationale algebraische Function vor der Integration erst in Partial-Brüche zu zerlegen; kann man nicht vielmehr in manchen Fällen durch Substitution oder auf andere Weise viel leichter zum Ziele kommen?

19) Was versteht man unter Rationalisation einer irrationalen Function; und was ist zu beachten, wenn die Irrationalität von dem Vorhandensein der Wurzelgrösse $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ abhängt?

20) Ist es unter allen Umständen zweckmässig oder nothwendig, eine irrationale Function rational zu machen, ehe man sie integrirt?

21) Wenn man eine Differential-Function auf verschiedenen Wegen integrirt, so sind die Resultate in **formeller Beziehung** oft sehr verschieden. Was lässt sich hierüber sagen?

22) Wie berechnet man die Fläche einer Curve, und welche allgemeinen Formeln lassen sich hierfür aufstellen?

23) Man soll folgende Curven quadriren:
die Parabel,
die Ellipse,
die Hyperbel,
die Kettenlinie,
die Cycloide,
die archimedische Spirale.

24) Was ist in Bezug auf die Quadratur einer Curve zu bemerken, wenn die Curve zwischen der Anfangs-Ordinate und der End-Ordinate die Abscissen-Achse schneidet?

25) Wie berechnet man den Werth von arc sin x, arc tg x etc.?

26) Erleidet die gewönliche Methode zur Berechnung des Flächen-Inhalts einer Curve Modificationen, wenn die Curve zwischen der Anfangs-Ordinate und der End-Ordinate discontinuirlich wird?

27) Wie verfährt man, um die Integrations-Constante bei der Quadratur einer Curve zu ermitteln?

28) Worin unterscheidet sich das bestimmte Integral von dem besondern Integral?

29) Wie verfährt man bei der Berechnung eines bestimmten Integrals, wenn dasselbe zwischen den Integrations-Grenzen discontinuirlich wird?

30) Man soll folgende Formeln beweisen:

$$\int_0^x fx \, . \, dx = x \, . \, f(\theta x)$$

$$\int_n^{n+h} fx \, . \, dx = h \, . \, f(n + \theta h)$$

$$\int_n^m fx \, . \, dx = (m - n) f(m + \theta (m - n)).$$

31) In welcher Weise ändern sich die Grenzen eines bestimmten Integrals, wenn man eine neue Variable einführt?

32) Worauf ist besonders zu achten, wenn in ein bestimmtes Integral

$$\int_m^n fx \, . \, dx$$

eine neue Variable, u, nach der Gleichung $\psi x = u$ eingeführt werden soll, unter der Voraussetzung, dass diese Gleichung mehrere **reelle** Wurzeln für x hat.

33) Was ist ein Doppel-Integral? oder ein vielfaches Integral?

34) Darf man in einem Doppel-Integral oder einem vielfachen bestimmten Integral die Reihenfolge der Integration in Bezug auf x, y etc. ohne Weiteres umkehren?

35) Welche Methoden haben wir kennen gelernt zur angenäherten Berechnung eines bestimmten Integrals? Wie lautet Simpson's Regel?

36) Man soll Simpson's Regel ableiten; ein Mal mit Hülfe der graphischen Methode, und darauf rein analytisch.

37) Man soll mit Hülfe der Integral-Rechnung folgende Functionen in Reihen entwickeln:

$$l\,(1+x),\ l\,\frac{1+x}{1-a},\ l\,\frac{a+x}{a-x},\ \text{arc tg}\,x,\ \text{arc sin}\,x.$$

38) Wie ist Bernoulli's Reihe?

39) Man soll Bernoulli's Reihe aus Taylor's Reihe ableiten.

40) Man soll die Richtigkeit folgender Gleichung beweisen

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{2.4}-\frac{\pi^3}{2.4.6}+\frac{\pi^4}{2.4.6.8}+--\ldots=0.$$

41) Man soll die Function e^x in eine Reihe entwickeln.

42) Man soll folgende Curven rectificiren:

Parabel, Kettenlinie, Cycloide, Ellipse, archimedische Spirale.

43) Wie lauten die allgemeinen Formeln, die hierbei angewendet werden?

44) Man soll an einem speciellen Beispiele zeigen, dass die sogenannte Infinitesimal-Methode sich vor der eigentlichen Grenz-Methode durch Einfachheit in der Anwendung auszeichnet.

45) Welche Formeln werden angewendet zur Berechnung der Volumina von Körpern, und wie entwickelt man dieselben?

46) Welche Formeln werden angewendet zur Berechnung von Rotationsflächen oder andern Flächen, und wie entwickelt man dieselben?

47) Was versteht man unter einer Differential-Gleichung, und was unter deren Auflösung?

48) Wodurch unterscheidet sich die besondere Auflösung einer Differential-Gleichung von deren Integral-Gleichung?

49) Wird durch eine Differential-Gleichung zwischen den Coordinaten einer Curve diese Curve vollkommen bestimmt, oder giebt es nicht vielmehr unzählig viele Curven, die dieser Differential-Gleichung genügen. Worin hat dies seinen Grund?

50) Was lässt sich über die Anwendung der Differential-Gleichungen nnd deren Lösungen sagen?

51) Was versteht man unter Umhüllungs-Curven?

52) Was ist eine Trajectorie?

53) Jede Curve ist die Umhüllungs-Curve ihrer sämmtlichen Krümmungs-Kreise. Warum?

54) Die Evolute einer Curve ist die Umhüllungs-Curve für sämmtliche Krümmungs-Halbmesser der gegebenen Curve. Warum?

55) Man soll zeigen, dass die **besondere Auflösung** von Gl. 1, Seite 276, die Gleichung der Umhüllungs-Curve für alle Linien ist, die entstehen, wenn man in der **Integral-Gleichung** für c alle möglichen Werthe einsetzt.

56) Was versteht man unter Trajectorie eines Systems von Curven?

